Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Die folgenden Aufgaben sollen Ihnen zeigen, wie die schriftliche Prüfung zur Vorlesung *Elementargeometrie* im SS 2016 aussehen *könnte*.

Probeklausur 1

Aufgabe 1

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine absolute ebene Geometrie.

a) Definieren Sie den Begriff der Kongruenz von zwei Deiecken ΔABC und $\Delta A'B'C'$.

b) Formulieren Sie das Kongruenzaxiom einer absoluten ebenen Geometrie.

c) Formuieren und beweisen Sie den Kongruenzsatz (WSW).

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass in einer Euklidischen Ebene die Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen kongruent sind.

b) Gilt diese Aussage auch in einer hyperbolischen Ebene? (Beweisen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 3

Es sei ΔABC ein Dreieck in einer Euklidischen Ebene, w die Winkelhalbierende des Innenwinkels im Eckpunkt C und P der Schnittpunkt von w mit der Strecke $\overline{AB}$. Zeigen Sie, dass das Verhältnis von $|\overline{AC}|$ zu $|\overline{BC}|$ gleich dem Verhältnis von $|\overline{AP}|$ zu $|\overline{PB}|$ ist:

$$\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|}.$$

Aufgabe 4

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine absolute ebene Geometrie.

a) Definieren Sie den Begriff der Geradenspiegelung an einer Geraden $g \subset \mathcal{E}$.

b) Zeigen Sie, dass jede Geradenspiegelung eine Isometrie ist.

c) Beschreiben Sie im Fall einer Euklidischen Ebene die Abbildung $\phi = S_g \circ S_h$, wobei S_g und S_h die Geradenspiegelungen an zwei sich orthogonal schneidenden Geraden g und h sind.

d) Wir betrachten die Poincaré-Halbebene $(H, \mathcal{G}(H), d_H, w_H)$ und die Spiegelung $S_{\ell_{b,r}}$ an der Geraden $\ell_{b,r} := \{z \in H \mid |z - b| = r\}$.
Bestimmen Sie den Bildpunkt $S_{\ell_{b,r}}(b + iy)$ für $y \in \mathbb{R}^+$.

— bitte wenden —

Probeklausur 2

Aufgabe 1

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine ebene Geometrie, die das Inzidenzaxion, das Abstandsaxiom und das Trennungaxiom erfüllt.

a) Formulieren Sie das Trennungsaxiom.

b) Zeigen Sie, dass jede Gerade l, die ein Dreieick ΔABC im Inneren der Seite $\overline{AB}$ schneidet, mit diesem Dreieck einen weiteren Schnittpunkt auf der Seite $\overline{AC}$ oder der Seite $\overline{BC}$ hat.

Aufgabe 2

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine absolute ebene Geometrie, g eine Gerade und $P \in \mathcal{E}$ ein Punkt, der nicht in g liegt.

a) Definieren Sie den Grenzwinkel $\omega(P, g)$ von P zu g.

b) Was wissen Sie über diesen Grenzwinkel?

c) Zeigen Sie: Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene, so ist $\omega(P, g) = \frac{\pi}{2}$.

d) Zeigen Sie: Ist $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine hyperbolische Ebene, so ist $\omega(P, g) < \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene, $K(M, r)$ ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, $\overline{AB}$ eine Sehne von $K(M, r)$, $C \in K(M, r) \setminus \{A, B\}$ und P ein Punkt auf der Tangente an $K(M, r)$ im Punkt A, der auf der anderen Seite von AB liegt als C. Zeigen Sie, dass der Sehnen-Tangenten-Winkel $\measuredangle PAB$ kongruent zum Umfangswinkel $\measuredangle ACB$ ist.

Aufgabe 4

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene.

a) Definieren Sie den Begriff der zentrischen Streckung.

b) Zeigen Sie, dass jede zentrische Streckung $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Winkelmaße erhält, d.h. es gilt $|\measuredangle ASB| = |\measuredangle \phi(A)\, \phi(S)\, \phi(B)|$ für alle $A, S, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq S$ und $B \neq S$.

Probeklausur 3

Aufgabe 1

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine absolute ebene Geometrie.

a) Formulieren und beweisen Sie den Basiswinkelsatz für ein gleichschenkliges Dreieck $\Delta ABC \subset \mathcal{E}$.

b) Formulieren Sie eine Umkehrung dieses Satzes. In welchem Typ Geometrien gilt diese Umkehrung (in der absoluten ebenen Geometrie, in der Euklidischen ebenen Geometrie, in der hyperbolischen ebenen Geometrie?). Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine absolute ebene Geometrie und $g \subset \mathcal{E}$ eine Gerade in $\mathcal{E}$. Wir fixieren eine Seite $\mathcal{H}$ von g und eine positive reelle Zahl r. Sei g_r die Menge der Punkte in $\mathcal{H}$, die von g den Abstand r haben:

$$g_r := \{P \in \mathcal{H} \mid d(P, g) = r\}.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine Euklidischen Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ die Menge g_r eine Gerade ist, die zu g parallel ist.

c) Gilt dies auch in einer hyperbolischen Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 3

Wir betrachten ein Dreieck ΔABC in der Euklidischen Ebene. Sei M der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von ΔABC, E der Schnittpunkt des Strahls $\overrightarrow{AM}$ mit dem Umkreis von ΔABC und H_a der Höhenfußpunkt der Höhe auf der Seite $\overline{BC}$. Zeigen Sie, dass das Verhältnis von $|\overline{AB}|$ zu $|\overline{AE}|$ gleich dem Verhältnis von $|\overline{AH_a}|$ zu $|\overline{AC}|$ ist:

$$\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AE}|} = \frac{|\overline{AH_a}|}{|\overline{AC}|}.$$

Aufgabe 4

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene.

a) Definieren Sie den Begriff der Ähnlichkeitsabbildung $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.

b) Sei $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung und g und h zwei parallele Geraden in $\mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass die Bildgeraden $\phi(g)$ und $\phi(h)$ ebenfalls parallel sind.
(*Sie dürfen dabei ohne Beweis benutzen, dass bei einer Ähnlichkeitsabbildung jede Gerade auf eine Gerade abgebildet wird.*).

c) Sei $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung und $K \subset \mathcal{E}$ ein Kreis. Zeigen Sie, dass das Bild $\phi(K)$ ebenfalls ein Kreis ist.

Probeklausur 4

Aufgabe 1

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine absolute ebene Geometrie, g eine Gerade und P ein Punkt in $\mathcal{E}$.

a) Definieren Sie das Lot durch P auf g.

b) Zeigen Sie, dass es genau ein Lot durch P auf g gibt.

c) Wir betrachten die Poincaré-Halbebene $(H, \mathcal{G}(H), d_H, w_H)$.
Geben Sie das Lot auf die Gerade $\ell_0 = i\mathbb{R}^+$ durch den Punkt $(1+i) \in H$ an.

Aufgabe 2

a) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene und $\triangle ABC$ ein Dreieck in $\mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass für die Innenwinkelsumme von $\triangle ABC$ gilt:

$$IWS(\triangle ABC) := |\measuredangle A| + |\measuredangle B| + |\measuredangle C| = \pi.$$

b) Was wissen Sie über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks in einer hyperbolischen Ebene?

Aufgabe 3

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene und $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck in $\mathcal{E}$. $H_a \in \overline{BC}$ sei der Fußpunkt der Höhe durch A und $H_b \in \overline{AC}$ der Fußpunkt der Höhe durch B. Zeigen Sie, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle H_a H_b C$ ähnlich sind.

Aufgabe 4

Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene und $K(M, r) \subset \mathcal{E}$ ein Kreis in $\mathcal{E}$.

a) Definieren Sie die Inversion $I_{K(M,r)}$ am Kreis $K(M, r)$.

b) Sei ℓ eine Gerade, die M nicht enthält. Wie sieht die Bildmenge $I_{K(M,r)}(\ell)$ aus? (Beweisen Sie Ihre Aussage).

c) Wir betrachten den Kreis $K(0, 1) \subset \mathbb{C}$ und die Inversion $I_{K(0,1)}$ an diesem Kreis.
Zeigen Sie, dass $I_{K(0,1)}$ die obere Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ auf sich abbildet und $I_{K(0,1)}|_H : H \to H$ eine Isometrie der Poincaré-Halbebene $(H, \mathcal{G}(H), d_H, w_H)$ ist.