Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 1

Vorlesung Elementargeometrie, SS 2016

Abgabe am 25.04.2016

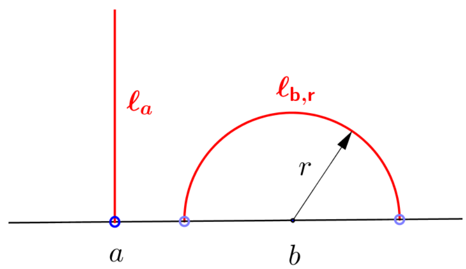
Aufgabe 1

Wir betrachten die Poincaré-Halbebene $(H, \mathcal{G}(H))$:

$$\begin{aligned} H &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \\ \mathcal{G}(H) &:= \{\ell_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\ell_{b,r} \mid b \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+\}, \end{aligned}$$

wobei die Geraden ℓ_a und $\ell_{b,r}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \ell_a &:= \{(x,y) \in H \mid x = a\} \\ \ell_{b,r} &:= \{(x,y) \in H \mid (x-b)^2 + y^2 = r^2\} \end{aligned}$$



Zeigen Sie, dass die Poincaré-Halbebene $(H, \mathcal{G}(H))$ eine Inzidenzgeometrie ist.

4 P

Aufgabe 2

a) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ eine Inzidenzgeometrie. Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $P \in \mathcal{E}$ eine Gerade g gibt, die P nicht enthält.

b) Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d)$ eine Inzidenzgeometrie mit Abstandsfunktion d, die das Abstandsaxiom $\mathcal{E}2$ erfüllt. Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $P \in \mathcal{E}$ unendlich viele verschiedene Geraden gibt, die sich im Punkt P schneiden.

c) Geben Sie eine Inzidenzgeometrie $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ an, die die unter b) formulierte Eigenschaft nicht hat.

5 P

Aufgabe 3

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* auf X und das Paar (X, d) *metrischer Raum*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $d(P,Q) \geq 0$ für alle $P, Q \in X$ und es gilt $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$.

(2) $d(P,Q) = d(Q,P)$ für alle $P, Q \in X$.

(3) $d(P,Q) \leq d(P,Z) + d(Z,Q)$ für alle $P, Q, Z \in X$.

Wir betrachten die Cartesische Ebene $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}(\mathbb{R}^2))$, die Euklidische Abstandsfunktion $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_2(P,Q) := \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \qquad P = (p_1, p_2), Q = (q_1, q_2),$$

sowie die Funktion $d^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$d^*(P,Q) = \min\{1, d_2(P,Q)\}, \quad P, Q \in \mathbb{R}^2.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d_2)$ ein metrischer Raum ist und $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}(\mathbb{R}^2), d_2)$ das Abstandsaxiom $\mathcal{E}2$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d^*)$ ein metrischer Raum ist, aber $(\mathbb{R}^2, \mathcal{G}(\mathbb{R}^2), d^*)$ das Abstandsaxiom $\mathcal{E}2$ **nicht** erfüllt.

8 P

Insgesamt: **17 P**