Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 2

Vorlesung Elementargeometrie, SS 2016

Abgabe am 02.05.2016

Aufgabe 4
Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^3$ das *Minkowski-Skalarprodukt* $\ll \cdot, \cdot \gg$:

$$\ll p, q \gg := p_1q_1 + p_2q_2 - p_3q_3, \qquad \text{wobei } p = (p_1, p_2, p_3), q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3.$$

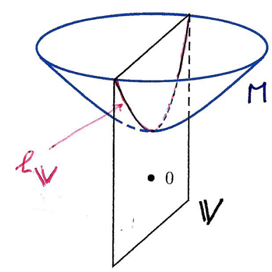
Ein 2-dimensionaler Unterraum $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$ heißt *zeitartig*, wenn es ein $p \in \mathbb{V}$ gibt mit $\ll p, p \gg = -1$.

Wir betrachten eine Geometrie, deren Punkte die Elemente des Hyperboloids

$$M := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \ll p, p \gg = -1,\ p_3 > 0\} \ = \ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z > 0\}$$

sind und deren Geradenmenge $\mathcal{G}(M)$ aus den *Großhyperbeln* besteht, d.h.

$$\mathcal{G}(M) := \{\ell_{\mathbb{V}} := M \cap \mathbb{V} \mid \mathbb{V} \text{ 2-dim. zeitartiger Unterraum des } \mathbb{R}^3\}.$$



Aus der 1. Übung ist bekannt, dass $(M, \mathcal{G}(M))$ eine Inzidenzgeometrie ist.

Zeigen Sie:

a) Für alle $p, q \in M$ gilt $\ll p, q \gg \leq -1$.

b) Für einen 2-dimensionalen zeitartigen Unterraum $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$ existiert eine Basis (p, v), so dass $\ll p, p \gg = -1$, $\ll v, v \gg = 1$ und $\ll p, v \gg = 0$.

c) Ist $\ell_{\mathbb{V}} := M \cap \mathbb{V}$ eine Großhyperbel und (p, v) eine Basis von $\mathbb{V}$ wie in b). Dann ist die Abbildung $c : \mathbb{R} \to \ell_{\mathbb{V}}$ mit

$$c(t) := \cosh(t) \cdot p + \sinh(t) \cdot v$$

bijektiv.

d) Sei $d_M : M \times M \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$d_M(p, q) := \operatorname{arcosh}(- \ll p, q \gg), \qquad p, q \in M.$$

Dann erfüllt $(M, \mathcal{G}(M), d_M)$ das Abstandsaxiom $\mathcal{E}_2$.

8 P

Aufgabe 5
Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d)$ eine ebene Geometrie, die das Inzidenzaxiom $\mathcal{E}1$, das Abstandsaxiom $\mathcal{E}2$ und das Trennungsaxiom $\mathcal{E}3$ erfüllt. Wir betrachten einen echten Winkel $\sphericalangle ASB$ in $\mathcal{E}$ und die Winkelfläche $Int \sphericalangle ASB$.

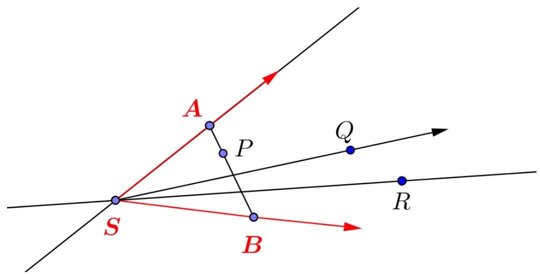
Zeigen Sie:

a) Ist P ein innerer Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so gilt $P \in Int \sphericalangle ASB$.

b) Ist $Q \in Int \sphericalangle ASB$, so schneidet der Strahl $\underrightarrow{SQ}$ das Innere der Strecke $\overline{AB}$.

c) Schneidet der Strahl $\underrightarrow{SQ}$ das Innere der Strecke $\overline{AB}$, so liegt Q in $Int \sphericalangle ASB$.

d) Sei R ein Punkt, der auf der gleichen Seite der Geraden SA liegt wie B. Dann liegt R genau dann in $Int \sphericalangle ASB$, wenn A und B auf verschiedenen Seiten der Geraden SR liegen.

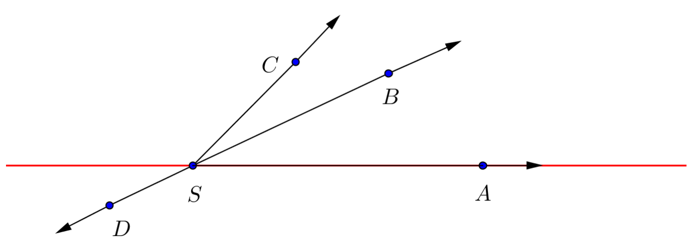


8 P

Aufgabe 6
Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine ebene Geometrie, die das Inzidenzaxiom $\mathcal{E}1$, das Abstandsaxiom $\mathcal{E}2$, das Trennungsaxiom $\mathcal{E}3$ und das Winkelmaßaxiom $\mathcal{E}4$ erfüllt. Zeigen Sie:

a) Sind B und C zwei Punkte auf der gleichen Seite einer Geraden SA und gilt $|\sphericalangle ASB| < |\sphericalangle ASC|$, so liegt B im Innern des Winkels $\sphericalangle ASC$.

b) Sind B und D zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Geraden SA liegen und gilt $|\sphericalangle BSA| + |\sphericalangle ASD| = \pi$, so liegt S zwischen B und D.



6 P

Insgesamt: **22 P**