



Übungsblatt 6

Vorlesung Elementargeometrie, SS 2016

Abgabe am 30.05.2016

In den Aufgaben 15 - 17 sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene.

Aufgabe 15 Ähnlichkeitssätze

Es seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei Dreiecke in \mathcal{E} . Zeigen Sie:

- a) Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn die Innenwinkel an einer korrespondierenden Ecke kongruent sind und die Längenverhältnisse der korrespondierenden anliegenden Seiten übereinstimmen. D.h. es gilt:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \sphericalangle A \simeq \sphericalangle A' \text{ und } \frac{|\overline{AB}|}{|A'B'|} = \frac{|\overline{AC}|}{|A'C'|}.$$

- b) Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind genau dann ähnlich, wenn die Längenverhältnisse zweier korrespondierender Seiten übereinstimmen und die Winkel, die der jeweils längeren Seite gegenüberliegen, kongruent sind (falls die Längen gleich sind, entfällt die Einschränkung für die Wahl des Winkels). D.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \iff \frac{|\overline{AB}|}{|A'B'|} = \frac{|\overline{AC}|}{|A'C'|} \text{ und} \\ \sphericalangle C \simeq \sphericalangle C', \text{ falls } |\overline{AB}| \geq |\overline{AC}|, \text{ bzw.} \\ \sphericalangle B \simeq \sphericalangle B', \text{ falls } |\overline{AC}| \geq |\overline{AB}|. \end{aligned}$$

- c) Gilt der Ähnlichkeitssatz bei b) auch, wenn man die Einschränkung für den ausgewählten Winkel weglässt?

8 P

Aufgabe 16

- a) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in \mathcal{E} mit den in der Vorlesung vereinbarten Standardbezeichnungen und bezeichne P_S den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden von $\triangle ABC$. Zeigen Sie, dass für den Abstand des Eckpunktes A zum Schnittpunkt P_S die folgende Formel gilt:

$$d(A, P_S)^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{9}.$$

- b) Sei $\sphericalangle ASB$ ein echter Winkel in \mathcal{E} und w seine Winkelhalbierende, d.h. der von S ausgehende und ins Innere von $\sphericalangle ASB$ zeigende Strahl, der das Winkelmaß halbiert. Zeigen Sie:

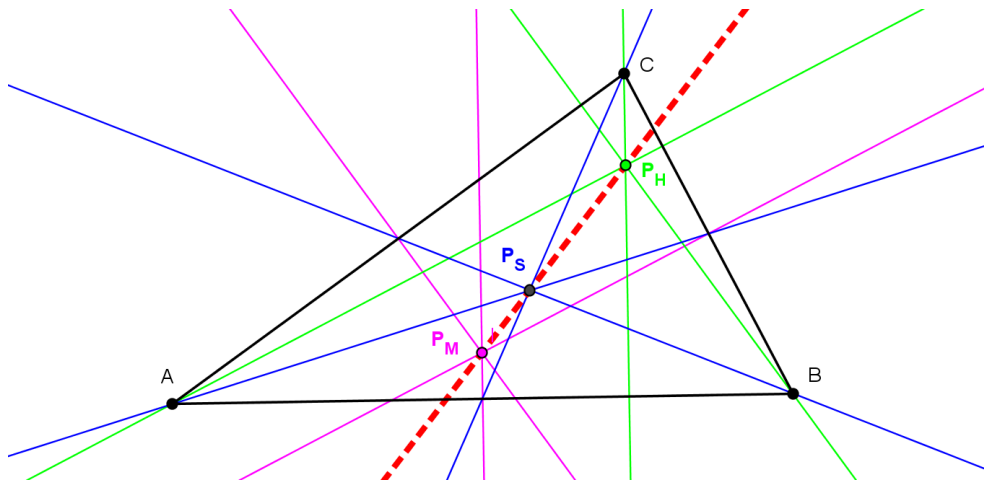
$$P \in w \iff P \in \text{Int } \sphericalangle ASB \cup \{S\} \text{ und } d(P, SA) = d(P, SB).$$

6 P

Aufgabe 17

Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck in \mathcal{E} und seien P_M , P_H und P_S die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten, der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\triangle ABC$.

- Zeigen Sie, dass für ein gleichseitiges Dreieck $P_M = P_H = P_S$ gilt.
- In dem in der Skizze gezeichneten Dreieck liegen P_M , P_H und P_S auf einer Geraden. Ist dies ein Zufall? Stellen Sie (z.B. mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware) eine Hypothese über die Lage dieser drei Punkte im allgemeinen Fall auf und beweisen Sie diese.



8 P

Insgesamt: 22 P