Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

# Übungsblatt 8

## Vorlesung Elementargeometrie, SS 2016

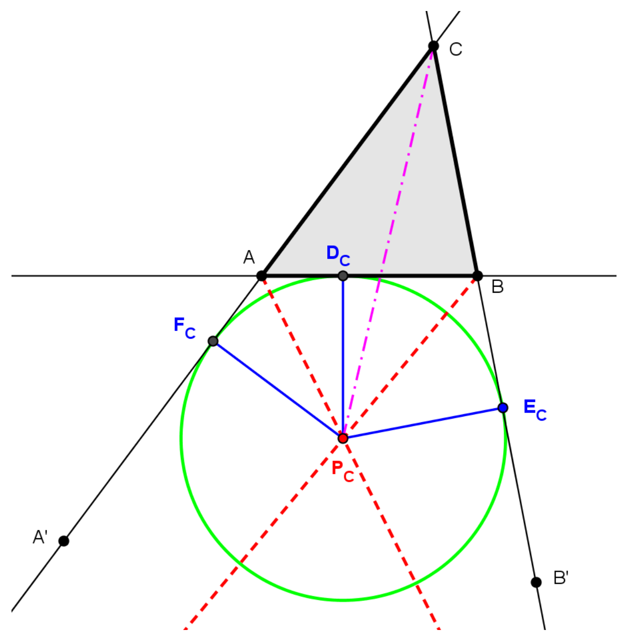
**Abgabe am 13.06.2016**

---

Die Aufgaben 21 - 23 beschäftigen sich mit Eigenschaften der *Ankreise eines Dreiecks* in der Euklidischen Ebene.

### Aufgabe 21

Sei $\Delta ABC$ ein Dreieck in der Euklidischen Ebene. Wir fixieren einen Punkt $A'$ auf dem Strahl $\underrightarrow{CA}$ und einen Punkt $B'$ auf dem Strahl $\underrightarrow{CB}$ auf der anderen Seite von $AB$ als $C$. Die Winkelhalbierenden $\widehat{w}_A$ von $\measuredangle A'AB$ und $\widehat{w}_B$ von $\measuredangle B'BA$ nennt man die *Außenwinkelhalbierenden von $\Delta ABC$ an der Seite $AB$.*




Zeigen Sie:

a) Die Außenwinkelhalbierenden $\widehat{w}_A$ und $\widehat{w}_B$ an der Seite $AB$ schneiden sich in einem Punkt $P_C$.

b) Seien $D_C$, $E_C$, $F_C$ die Fußpunkte der Lote von $P_C$ auf die Geraden $AB$, $BC$ bzw. $AC$ und $r_C := |\overline{P_C D_C}|$. Dann gilt

$$r_C = |\overline{P_C E_C}| = |\overline{P_C F_C}|.$$

D.h. der Kreis $K(P_C, r_C)$ berührt nicht nur die Gerade $AB$, sondern auch die Geraden $BC$ und $AC$.

*Bemerkung:* Der Kreis $K(P_C, r_C)$ heißt *der Ankreis des Dreiecks $\Delta ABC$ an die Seite $AB$.* (Die Ankreise an die Seiten $BC$ und $AC$ werden analog definiert).

c) Der Strahl $\underrightarrow{CP_C}$ ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels des Dreiecks $\Delta ABC$ an der Ecke $C$.

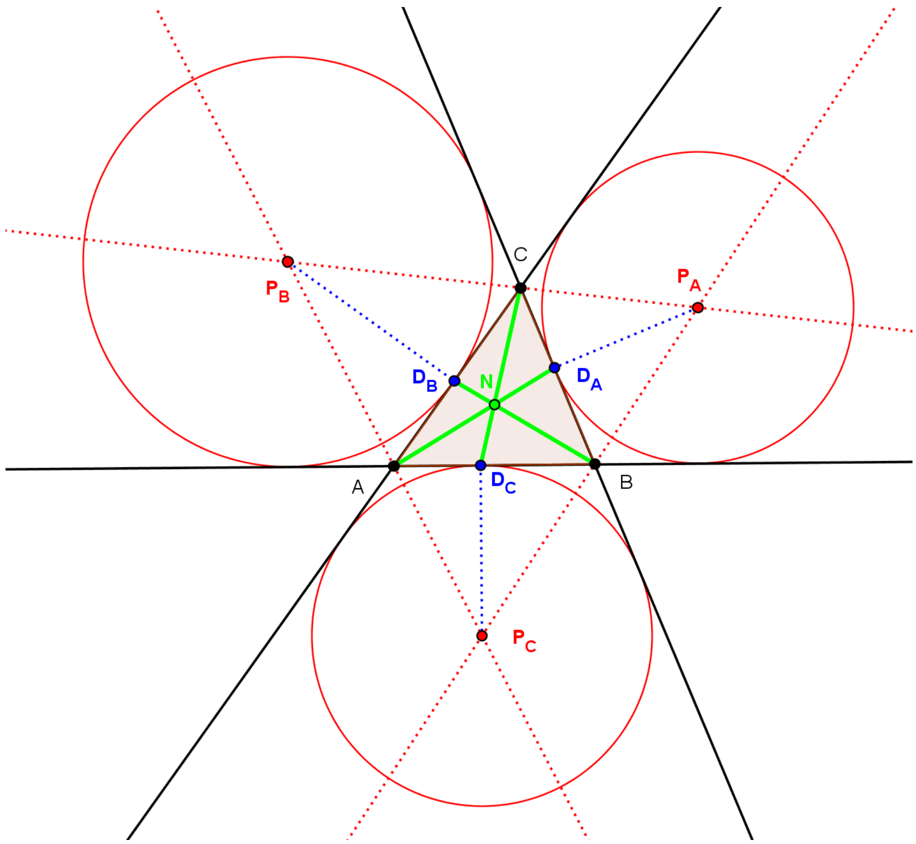
**6 P**

—- bitte wenden —-

**Aufgabe 22**

Zeigen Sie: In jedem Dreieck $\Delta ABC$ schneiden sich die Geraden $AD_A$, $BD_B$ und $CD_C$ durch die Eckpunkte und den jeweiligen Berührpunkt des Ankreises des Dreiecks an die gegenüberliegende Seite in einem Punkt $N$ (siehe Skizze).

*Bemerkung:* Dieser Punkt $N$ heißt *Nagelpunkt von* $\Delta ABC$.




**6 P**

**Aufgabe 23**

Sei $\Delta ABC$ ein Dreieck in der Euklidischen Ebene mit den Standardbezeichnungen, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang von $\Delta ABC$ und $\mu(\mathcal{D}ABC)$ der Flächeninhalt der Dreiecksfläche. $r$ bezeichne den Radius des Inkreises von $\Delta ABC$, $R$ den Radius des Umkreises von $\Delta ABC$ und $r_A$, $r_B$, $r_C$ die Radien der drei Ankreise von $\Delta ABC$ (wie oben definiert). Zeigen Sie:

a) $r_A = \frac{\mu(\mathcal{D}ABC)}{p-a}$ , $r_B = \frac{\mu(\mathcal{D}ABC)}{p-b}$ , $r_C = \frac{\mu(\mathcal{D}ABC)}{p-c}$ .

b) $r = \frac{\mu(\mathcal{D}ABC)}{p}$ .

c) $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\,\mu(\mathcal{D}ABC)}$ .

d) $r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C = \mu(\mathcal{D}ABC)^2$ .

e) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$ .

**10 P**

Insgesamt: **22 P**