Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 11

Vorlesung Elementargeometrie, SS 2016

Abgabe am 04.07.2016

Aufgabe 30
Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene und $I_{K(M,r)}$ die Inversion am Kreis $K(M, r)$. Zeigen Sie:

a) Für jede Isometrie $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ gilt: $\phi \circ I_{K(M,r)} \circ \phi^{-1} = I_{K(\phi(M),r)}$.

b) Die Verkettung $I_{K(M,R)} \circ I_{K(M,r)}$, wobei $r, R \in \mathbb{R}^+$, ist eine zentrische Streckung. Geben Sie das Streckzentrum und den Streckfaktor an.

c) Für alle $P, Q \in \mathcal{E} \setminus \{M\}$ gilt mit $I := I_{K(M,r)}$:

$$d(I(P), I(Q)) = d(P, Q) \cdot \frac{r^2}{d(M, P) \cdot d(M, Q)}.$$

6 P

Aufgabe 31 Es sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, w)$ eine Euklidische Ebene. I_K bezeichne die Inversion am Kreis K.

a) Es seien $K := K(M, r)$ und $\widetilde{K} := K(\widetilde{M}, \widetilde{r})$ zwei Kreise, so dass M im Innern von $\widetilde{K}$ liegt. Zeigen Sie, dass $I_K(\widetilde{K})$ ein Kreis ist, der M nicht enthält.

Bemerkung: In der Vorlesung haben wir das für den Fall bewiesen, dass M im Äußeren *von $\widetilde{K}$ liegt.*

Tipp für den Fall $M \neq \widetilde{M}$: Betrachten Sie die beiden Schnittpunkte der Geraden $M\widetilde{M}$ mit $\widetilde{K}$ und deren Spiegelpunkte $D' := I_K(D)$ und $E' := I_K(E)$. Zeigen Sie, dass $I_K(\widetilde{K})$ der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{D'E'}$ ist.

b) Sei K der Inkreis eines Dreiecks ΔABC, W sein Mittelpunkt und r sein Radius. Zeigen Sie, dass $I_K(AB)$, $I_K(AC)$ und $I_K(BC)$ Kreise mit dem Radius $\frac{r}{2}$ sind, die sich in W schneiden.

c) Sei K' der Umkreis von Dreieck ΔABC. Zeigen Sie, dass der Radius des Kreises $I_K(K')$ ebenfalls $\frac{r}{2}$ ist. Kennen Sie den Kreis $I_K(K')$?

6 P

— bitte wenden —

Aufgabe 32

Wir betrachten die Cartesische Ebene und identifizieren ihre Punkte mit den komplexen Zahlen. Beschreiben Sie die folgenden, in der Vorlesung elementargeometrisch definierten Abbildungen analytisch durch komplexe Zahlen:

a) Die *Translation* $t_{\overrightarrow{z_0 z_1}}$ mit $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$.

b) Die *Punktspiegelung* S_{z_0}, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$.

c) Die *Geradenspiegelung* S_g, wobei g die Gerade $g = z_0 + \mathbb{R} \cdot v$ ist mit $z_0, v \in \mathbb{C}$ und $v \neq 0$.

d) Die *Drehung* $D^+_{z_0,\alpha}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und die positiv-orientierte Drehung diejenige entgegen dem Uhrzeigersinn ist.

e) Die *zentrische Streckung* $S_{z_0,k}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

f) Die *Inversion am Kreis* $I_{K(z_0,r)}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$.

6 P

Insgesamt: **18 P**