Übung 5 : Euklidische Ebenen

Äquivalente Bedingungen zum Euklidischen Parallelenaxiom $\mathcal{E}6$

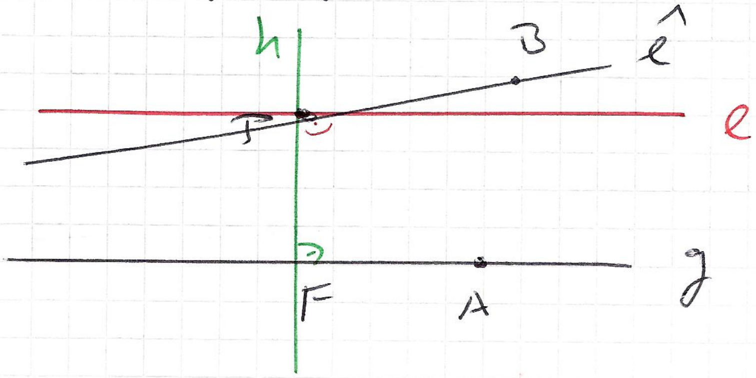
Im folgenden sei $(\mathcal{E}, \mathcal{G}, d, W)$ eine absolute ebene Geometrie (d.h. $\mathcal{E}1$ – $\mathcal{E}5$ gelten)

Aufgabe 1 : Zeige:

$\mathcal{E}6 \iff$ die Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

Lösung : $(\Longrightarrow)$ VL Satz II. 1.

$(\Longleftarrow)$ Sei $g \in \mathcal{G}$ und $P \in \mathcal{E}$ mit $P \notin g$.



Sei h Lot durch P auf g
Sei ℓ Lot durch P auf h } Doppellot-Konstruktion

$\Rightarrow \ell \parallel g$ und $P \in g$ (Satz I. 19)

Sei $\hat{e}$ eine weitere Parallele durch P zu g.

Z: $\ell = \hat{e}$:

h schneidet die Parallelen g und $\hat{e}$

$\Longrightarrow$ Stufenwinkel in F und P an g bzw $\hat{e}$ sind kongruent $\boxed{\text{Vor}}$

$\Rightarrow \underset{\uparrow \text{(Lot)}}{\frac{\pi}{2}} = |\sphericalangle AFP| = |\sphericalangle BPF|$

$\Rightarrow$ BP ist Lot auf h durch P

$\Rightarrow$ $BP = \ell$ (Eindeutigkeit des Lots)

$\Rightarrow$ $\ell = \hat{\ell}$. $\blacksquare$

Wissen aus ÜA 12*:

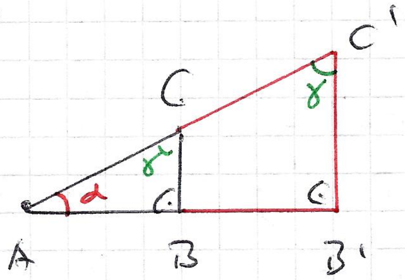
$$\boxed{\mathcal{E}6 \iff \text{Es existiert } \boxed{\text{ein}} \text{ Dreieck } \Delta \subset \mathcal{E} \text{ mit } IWS(\Delta) = \pi}$$

Benutzen dies, um weitere Kriterien zu beweisen.

__Aufgabe 2__: $\mathcal{E}6 \iff$ Es existieren 2 Dreiecke $\Delta, \Delta' \subset \mathcal{E}$ mit $\Delta \sim \Delta'$, $\Delta \not\cong \Delta'$.

__Lösung__:

$(\Rightarrow)$



Sei ΔABC mit $|\angle B| = \frac{\pi}{2}$

Fix $B' \in \overrightarrow{AB}$ mit $|\overline{AB'}| = 2 \cdot |\overline{AB}|$

C' Schnittpunkt des Lots auf AB durch B' und AC

$IWS(\Delta ABC) = IWS(\Delta AB'C') = \pi$ (da $\mathcal{E}6$ gilt)

$\Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta AB'C'$

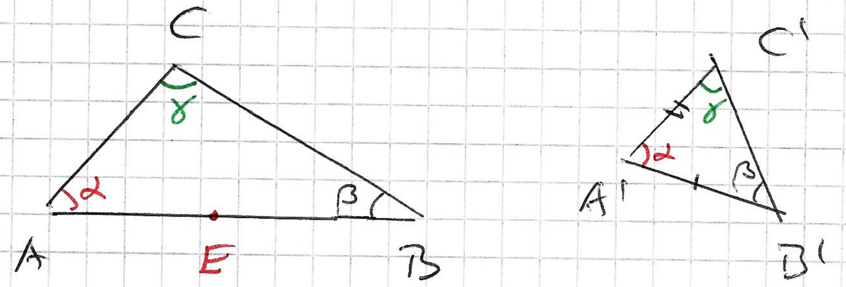
$\Delta ABC \not\cong \Delta AB'C'$ da $|\overline{AB}| = \frac{1}{2} |\overline{AB'}|$

(⇐) Konstruieren ein Dreieck Δ mit $IWS(\Delta) = \pi$.

Nach ÜA 12* gilt dann E6:

Seien $\Delta = \Delta ABC \sim \Delta' = \Delta A'B'C'$ und

$\Delta ABC \ncong \Delta A'B'C'$

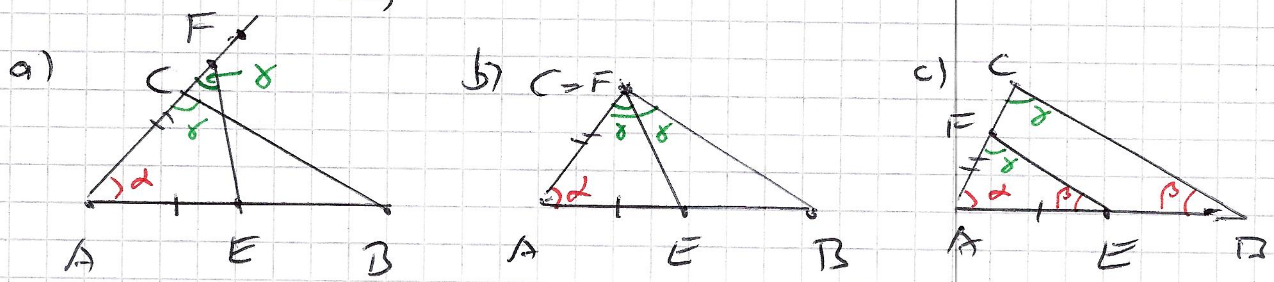


Sei OBdA $|\overline{AB}| > |\overline{A'B'}|$ (ex, da $\Delta \ncong \Delta'$)

Bel: $\boxed{|\overline{AC}| > |\overline{A'C'}|}$:

Sei $E \in \text{Int}\,\overline{AB}$ und $|\overline{AE}| = |\overline{A'B'}|$

Sei $F \in \overrightarrow{AC}$ mit $|\overline{AF}| = |\overline{A'C'}|$



$\underset{SWS}{\Rightarrow}$ $\Delta AEF \cong \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow |\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle A'C'B'| = \gamma = |\sphericalangle C'|$

$= |\sphericalangle ACB|$

- ⇒ Fall a) kann nicht auftreten, da nach Stufenwinkelsatz der absoluten Geometrie dann $CB \parallel FE$

  $\Rightarrow E \in \mathcal{H}_+(CB, F) \Rightarrow$ Wid zu $E \in \text{Int}\,\overline{AB}$

- Fall b) kann nicht auftreten nach Winkelmaßaxiom E4(3)

⇒ • Es gilt c), d.h. $|\overline{AC}| > |\overline{A'C'}|$,

d.h. $F \in \text{Int}\,\overline{AC}$.

Im Fall d) gilt:

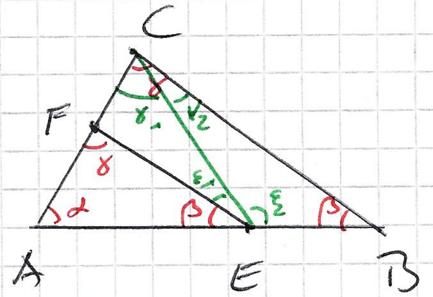
$EF \parallel BC$ (Stufenwinkelsatz der absoluten Geometrie)

Nebenwinkelsatz $\Rightarrow$

$|\sphericalangle FEB| = \pi - \beta$

$|\sphericalangle EFC| = \pi - \gamma$

Betrachten die Diagonale $\overline{CE}$ im Viereck $\square CFEB$.



Nach Konstruktion gilt, dass F und B auf verschiedenen Seiten von CE liegen $\Rightarrow$

$E \in \text{Int} \sphericalangle FCB$

$C \in \text{Int} \sphericalangle FEB$

$\Rightarrow$ Können an den Ecken C und E das Winkelmaßaxiom §4(3) anwenden

$\Rightarrow \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \;, \; \pi - \beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$\Rightarrow \text{Iws}(\triangle CFE) + \text{Iws}(\triangle CEB) =$

$= (\gamma_1 + (\pi - \gamma) + \varepsilon_1) + (\varepsilon_2 + \beta + \gamma_2)$

$= \gamma + (\pi - \gamma) + \pi - \beta + \beta = \underline{\underline{2\pi}}$

Da $\text{Iws}(\triangle) \leq \pi$

$\Rightarrow \text{Iws}(\triangle CEF) = \text{Iws}(\triangle CEB) = \underline{\underline{\pi}}$

$\Rightarrow$ §6

4A 12

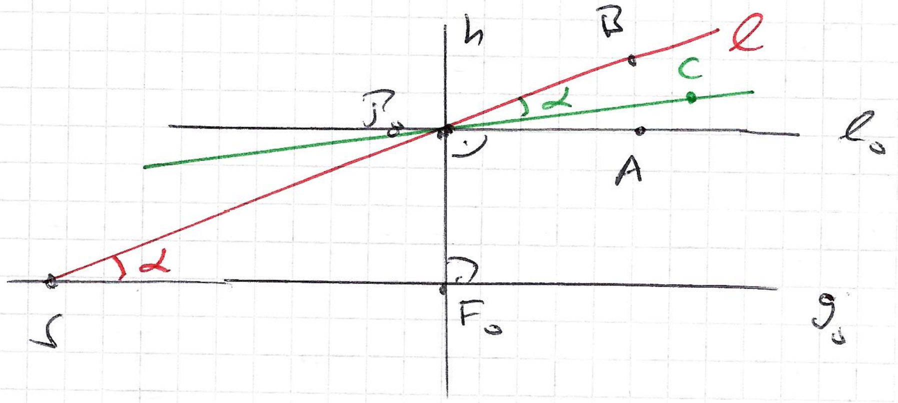
Aufgabe 3 : Es gilt:

$\Sigma 6 \Longleftrightarrow$ Es existiert eine Gerade g_0 und ein Punkt $P_0 \notin g_0$, so dass genau eine Parallele l_0 zu g_0 und $P_0 \in l_0$ existiert.

Lösung:

($\Rightarrow$) Klar

($\Leftarrow$) Konstruieren wieder ein Dreieck Δ mit $|WS(\Delta)| = \pi$. (Dann gilt $\Sigma 6$ und UA 12)



h Lot durch P_0 auf g_0 mit Fußpunkt F_0

l_0 Lot auf h durch P_0

$\Rightarrow l_0 \parallel g_0 \quad P_0 \in l_0$

(diese Gerade l_0 ist die einzige Parallele zu g_0 durch P_0 (Vor)).

Sei l eine weitere Gerade durch P_0 und $l \neq l_0$

Da $l \nparallel g_0 \Rightarrow$ es ex. Schnittpunkt S von g_0 und l

Sei $\alpha := |\measuredangle P_0 S F_0|$

Seien $A \in l_0$ und $B \in l$ auf der gleichen Seite von h und $A, B \in \mathcal{H}_-(h, S)$

Wähle $C \in \mathcal{H}_+(l, A)$ mit

$|\measuredangle B P_0 C| = \alpha$

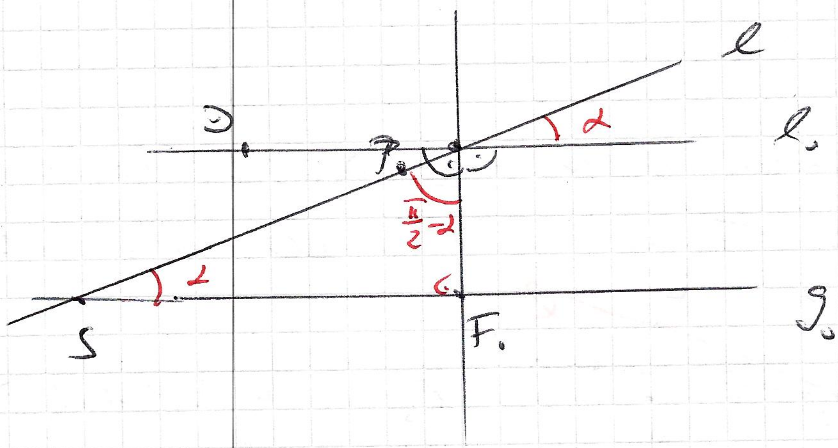
Stufenwinkelsatz der absoluten Geometrie $\Rightarrow$

$P_0C \parallel g_0$ (beide von ℓ geschnitten und kongr. Stufenwinkel)

$\Rightarrow$ $P_0C = \ell_0$ $\Rightarrow$ $C \in \ell_0$

Vor

$\Rightarrow$ $|\angle AP_0B| = \alpha = |\angle F_0SP_0|$



Da $|\angle DP_0F_0| = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $|\angle SP_0F_0| = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\Rightarrow$ $\text{Ws}(\triangle SF_0P_0) = \alpha + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\underline{\pi}}$

$\Rightarrow$ EG gilt. ∎