Humboldt-Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Helga Baum

Aufgaben der Prüfungsklausur – Analysis I

26. Februar 2018

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) := x \cdot e^{3x-1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

definierte Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = (3^n x + n \cdot 3^{n-1}) \cdot e^{3x-1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(*Formulieren Sie die benutzte Induktionsprozedur sorgfältig und ausführlich*)

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Aufgabe 3: **1+1+3+1 Punkte**

a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte Menge. Was versteht man unter dem Supremum von A? (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Wann nennt man eine Folge reeller Zahlen (x_n) konvergent? (Definieren Sie diesen Begriff).

c) Zeigen Sie: Wenn (x_n) eine nach oben beschränkte und monoton wachsende Folge reeller Zahlen ist, dann ist (x_n) konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

d) Gilt für Folgen reeller Zahlen (x_n) auch die Implikation:

$$(x_n) \text{ nach oben beschränkt} \quad \Longrightarrow \quad (x_n) \text{ konvergent.}$$

(*Begründen Sie Ihre Aussage*)

Aufgabe 4: **3+3 Punkte**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{k^2-1}$.

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^k} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$.

(*Formulieren Sie die benutzten Konvergenzkriterien sorgfältig und ausführlich*).

Aufgabe 5: **1+1+4 Punkte**

Sie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Wann nennt man f stetig? (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Wann nennt man f lipschitzstetig? (Definieren Sie diesen Begriff).

c) Zeigen Sie: Wenn f lipschitzstetig ist, dann ist f auch stetig.

Aufgabe 6: **1+5 Punkte**

a) Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion.
Wann nennt man f in $x_0 \in I$ differenzierbar? (Definieren Sie diesen Begriff)

b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie ggf. die Ableitung $f'(x_0)$.

Aufgabe 7: **6 Punkte**

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte der Funktion $f : [-2, 2] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := (x-1)^4 + 3(x-1)^3, \qquad \forall\, x \in [-2, 2],$$

und geben Sie an, an welchen Stellen sie angenommen werden.

Aufgabe 8: **3+3 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \cos(\ln(x)), \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

a) Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom $T_2(f,1)(x)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass für $x > 1$ die Fehlerabschätzung

$$|\, f(x) - T_2(f,1)(x)\,| \leq \frac{2}{3}|x-1|^3$$

gilt.

Tipp: Die Lagrange-Form des 2. Restgliedes von f im Entwicklungspunkt x_0 lautet:

$$R_2(f, x_0)(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3,$$

wobei ξ eine Zahl zwischen x_0 und x ist.

Bewertung: Gesamtpunktzahl: 44 Punkte

ab Punkte	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22
Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0

Lösungen

Aufgabe 1:

Induktionsanfang: Die Ausage gilt für $n = 1$, da:

$$f'(x) = e^{3x-1} + 3xe^{3x-1} = (1 + 3x)e^{3x-1} = (1 \cdot 3^0 + 3^1 \cdot x)e^{3x-1}.$$

Induktionsschritt: $n \mapsto n + 1$:
I.Vor: Es gelte für <u>ein</u> $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = (3^n x + n \cdot 3^{n-1}) \cdot e^{3x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
I.Beh: Es gilt $f^{(n+1)}(x) = (3^{n+1}x + (n + 1)3^n) \cdot e^{3x-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
I.Bew:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) &\overset{I.Vor}{=} \frac{d}{dx}((3^n x + n \cdot 3^{n-1}) \cdot e^{3x-1}) \\ &= 3^n \cdot e^{3x-1} + 3(3^n x + n \cdot 3^{n-1}) \cdot e^{3x-1} \\ &= (3^n + 3^{n+1}x + n \cdot 3^n) \cdot e^{3x-1} \\ &= (3^{n+1}x + (n + 1)3^n) \cdot e^{3x-1}. \qquad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) + (z - w)(\overline{z - w}) \\ &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \qquad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

a) $g \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von A, wenn g die kleinste obere Schrankr von A ist, d.h. es gilt:

   – $a \leq g$ für alle $a \in A$ (*obere Schranke*) und
   – Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $a \in A$, so dass $g - \varepsilon < a$ (*kleinste* obere Schranke).

b) (x_n) heißt konvergent, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|x - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

c) Wir setzen $g := \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da g die <u>*kleinste*</u> obere Schranke der Folgenelemente ist, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $g - \varepsilon < x_{n_0}$. Da (x_n) monoton wachsend und g eine <u>*obere*</u> Schranke der Folgenelemente ist, gilt

$$g - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq g < g + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

   Damit gilt aber $|g - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Folglich konvergiert (x_n) gegen g.

d) Nein. Gegenbeispiel: (x_n) mit $x_n := (-1)^n$. Diese Folge ist beschränkt, hat aber zwei verschiedene Häufungspunkte $+1$ und -1, ist also nicht konvergent.

Aufgabe 4:

a) Es gilt $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{k^2-1} = \sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{(k+1)(k-1)} = \sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k-1}$.
$(\frac{1}{k-1})$ ist eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen. Deshalb konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Die Reihe ist nicht absolut-konvergent, da

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k+1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

und die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergent.

b) Sei $a_k := \frac{1}{3^k}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$. Dann gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3}\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^{k^2\cdot\frac{1}{k}} = \frac{1}{3}\Big(\frac{k+1}{k}\Big)^{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\cdot e,$$

wobei e die Eulerzahl bezeichnet. Da $e < 3$ gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{e}{3} < 1.$$

Somit ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent (und auch konvergent).

Aufgabe 5:

a) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn für alle $x \in D$ gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in D$ gilt:

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

b) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt lipschitzstetig, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| \leq L \cdot |y - x|.$$

c) Sei f lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstante L. Wir zeigen, dass f stetig ist.
Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Dann gilt nach Voraussetzung für alle $x, y \in D$ mit $|y - x| < \delta$:

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x| < L\cdot\delta = L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Folglich ist f stetig.

Aufgabe 6:

a) $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

in $\mathbb{R}$ existiert.

b) Wir betrachten die Fälle $x < 0$, $x > 0$ und $x = 0$.

1. Fall: $x < 0$. Dann gilt:

$$f(x) = (-x)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Funktion f ist auf $(-\infty, 0)$ differenzierbar, da sie die Verknüpfung und das Produkt differenzierbarer Funktionen ist und es gilt nach Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}(-1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + (-x)^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - |x|^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

2. Fall: $x > 0$. Dann gilt:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Funktion f ist auf $(0, +\infty)$ differenzierbar, da sie die Verknüpfung und das Produkt differenzierbarer Funktionen ist und es gilt nach Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - |x|^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

3. Fall: $x_0 = 0$. Dann gilt für die links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{1}{x})}{-(-x)} = \lim_{x\to 0^-} -\underbrace{(-x)^{\frac{1}{2}}}_{\to 0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschr.Fkt}} = 0. \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{\to 0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{beschr.Fkt}} = 0. \end{aligned}$$

Da der linksseitige und der rechtseitige Grenzwert übereinstimmen, existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten und ist gleich 0. Folglich ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$.

Aufgabe 7: Es gilt

$$f'(x) = 4(x-1)^3 + 9(x-1)^2 = (x-1)^2(9 + 4(x-1)) = (x-1)^2(5+4x).$$

Kandidaten für lokale Extremstellen im offenen Intervall $(-2, 2)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1 \text{ und } x = -\frac{5}{4}.$$

Wir untersuchen das Monotonieverhalten von f auf $[-2, 2]$:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \qquad &\forall\, x \in [-2, -\frac{5}{4}), \\ f'(x) > 0 \qquad &\forall\, x \in (-\frac{5}{4}, 2] \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

d.h. f ist streng monoton fallend auf $[-2, -\frac{5}{4})$ und streng monoton wachsend auf $(-\frac{5}{4}, 1)$ und $(1, 2]$.

Folglich nimmt f in $x = -\frac{5}{4}$ ein lokales *und* globales Minimum an, nämlich $f(-\frac{5}{4}) =$

$-\frac{3}{4}(\frac{9}{4})^3 = -\frac{2187}{256}$ und hat in $x = 1$ keinen lokalen Extremwert.
In den Randpunkten nimmt f lokale Maxima an und es gilt: $f(-2) = 0$ und $f(2) = 4$. Folglich ist 4 das globale Maximum von f und wird in $x = 2$ angenommen.

Aufgabe 8: Wir berechnen die ersten drei Ableitungen von f mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} \\
f''(x) &= -\cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x^2} + \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \Big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) \Big) \\
f'''(x) &= \frac{-2}{x^3}\Big(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) \Big) + \frac{1}{x^2}\Big(\frac{\cos(\ln(x))}{x} + \frac{\sin(\ln(x))}{x} \Big) \\
&= \frac{1}{x^3} \cdot \Big(3\cos(\ln(x)) - \sin(\ln(x)) \Big).
\end{aligned}$$

Für das 2. Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
T_2(f,1)(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 = 1 + 0 + \frac{1}{2}(-1)(x-1)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2.
\end{aligned}$$

Für die Fehlerabschätzung folgt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - T_2(f,1)(x)| &= |R_2(f,1)(x)| \\
&= \left| \frac{f'''(\xi)}{6}(x-1)^3 \right| \qquad \text{für ein } \xi \in (1,x) \\
&= \frac{1}{6}|x-1|^3 |f'''(\xi)| \\
&\overset{\triangle}{\leq} \frac{1}{6}|x-1|^3 \cdot \frac{1}{\xi^3} \cdot (\, 3 \cdot |\cos(\ln(\xi))| + |\sin(\ln(\xi))|\,) \\
&\leq \frac{4}{6}|x-1|^3 \frac{1}{\xi^3} \\
&\leq \frac{2}{3}|x-1|^3.
\end{aligned}$$