Humboldt-Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Helga Baum

Aufgaben der Prüfungsklausur – Analysis I

1. März 2018

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) := \ln(1+x), \qquad x \in (-1, +\infty),$$

definierte Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n-te Ableitung von f gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \qquad \forall\, x \in (-1, +\infty).$$

(*Formulieren Sie die benutzte Induktionsprozedur sorgfältig und ausführlich*)

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^3 = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{1-i}$$

und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.
(*Tipp: Benutzen Sie die trigonometrische Darstellung von* $w := \frac{8\cdot\sqrt{2}}{1-i}$.)

Aufgabe 3: **2+3+1 Punkte**

Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen.

a) Definieren Sie die Begriffe:
  - (x_n) ist konvergent.
  - (x_n) ist beschränkt.

b) Beweisen Sie die Implikation: (x_n) ist konvergent $\Longrightarrow$ (x_n) ist beschränkt.

c) Gilt auch die Implikation: (x_n) ist beschränkt $\Longrightarrow$ (x_n) ist konvergent ?
(*Begründen Sie Ihre Aussage*)

Aufgabe 4: **2+4 Punkte**

Sei $P(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine komplexe Potenzreihe.

a) Was wissen Sie über die Konvergenzeigenschaften von $P(z)$?

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$P_1(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} (z-1)^k,$$

$$P_2(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3} (z-2)^k.$$

Aufgabe 5: **2+4 Punkte**

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

a) Wann nennt man f in $x_0 \in I$ stetig?
(Definieren Sie diesen Begriff mit dem $\varepsilon - \delta$ -Kriterium).

b) Beweisen Sie: Wenn f in $x_0 \in I$ stetig ist, dann gilt für *jede* Folge (x_n) aus I, die gegen x_0 konvergiert, dass die Bildfolge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 6: **1+1+4 Punkte**

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $x_0 \in I$.

a) Definieren Sie, was es bedeutet, dass f in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum annimmt.

b) Wann nennt man f in $x_0 \in I$ differenzierbar? (Definieren Sie diesen Begriff).

c) Es sei x_0 ein innerer Punkt von I, d.h. es existiert ein offenes Intervall (α, β), so dass $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset I$. Beweisen Sie:
Ist f in x_0 differenzierbar und nimmt f in x_0 ein lokales Maximum an, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Aufgabe 7: **6 Punkte**

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte der Funktion $f : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \arctan\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right), \qquad \forall\, x \in [-1, 1],$$

und geben Sie an, an welchen Stellen sie angenommen werden.

Aufgabe 8: **3+3 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \ln(x^2), \qquad x \in \mathbb{R}^+.$$

a) Bestimmen Sie das 2. Taylorpolynom $T_2(f, 1)(x)$ von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $x > 1$ die Fehlerabschätzung

$$|\, f(x) - T_2(f, 1)(x)\, | \leq \frac{2}{3}|x - 1|^3$$

gilt.
Tipp: Die Lagrange-Form des 2. Restgliedes von f im Entwicklungspunkt x_0 lautet:

$$R_2(f, x_0)(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3,$$

wobei ξ eine Zahl zwischen x_0 und x ist.

Bewertung: Gesamtpunktzahl: 44 Punkte

ab Punkte	40	38	36	34	32	30	28	26	24	22
Note	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0

Lösungen

Aufgabe 1:

Induktionsanfang: Die Ausage gilt für $n = 1$, da:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{0! \cdot (-1)^{1+1}}{(1+x)^1}.$$

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$:
I. Vor: Es gelte für <u>ein</u> $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)! \cdot (-1)^{n+1}}{(1+x)^n} \quad \forall\, x \in (-1, +\infty)$.
I.Beh: Es gilt $f^{(n+1)}(x) = \frac{n! \cdot (-1)^{n+2}}{(1+x)^{n+1}} \quad \forall\, x \in (-1, +\infty)$.
I.Bew:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) &\overset{I.Vor}{=} \frac{d}{dx}\Big(\frac{(n-1)! \cdot (-1)^{n+1}}{(1+x)^n}\Big) \\ &= (n-1)! \cdot (-1)^{n+1} \cdot \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{(1+x)^n}\Big) \\ &= (n-1)!(-1)^{n+1}(-n)(1+x)^{-n-1} \\ &= \frac{n! \cdot (-1)^{n+2}}{(1+x)^{n+1}} \qquad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Es sei $w := \frac{8\sqrt{2}}{1-i}$. Dann gilt

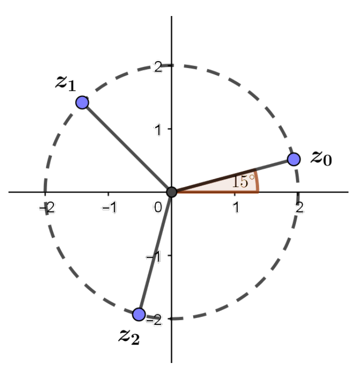
$$\begin{aligned} w &= \frac{8\sqrt{2}}{1-i} = \frac{8\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = 8 \cdot \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \\ &= 8 \cdot (\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ)). \end{aligned}$$

Dann hat die Gleichung $z^3 = w$ die drei Lösungen

$$z_k = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\Big(\frac{45^\circ}{3} + k\frac{360^\circ}{3}\Big) + i\,\sin\Big(\frac{45^\circ}{3} + k\frac{360^\circ}{3}\Big)\right), \quad k = 0, 1, 2,$$

d.h.

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \cdot (\cos(15^\circ) + i \sin(15^\circ)), \\ z_1 &= 2 \cdot (\cos(135^\circ) + i \sin(135^\circ)), \\ z_2 &= 2 \cdot (\cos(255^\circ) + i \sin(255^\circ)). \end{aligned}$$



Aufgabe 3:

a) Die Folge (x_n) heißt konvergent, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $|x - x_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.
Die Folge (x_n) heißt beschränkt, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $|x_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei (x_n) konvergent und $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|x - x_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir die Abschätzung:

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Folglich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-2}|, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\} =: C.$$

Somit ist (x_n) beschränkt.

c) Nein. Gegenbeispiel: (x_n) mit $x_n := (-1)^n$ ist beschränkt, da $|x_n| = 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
(x_n) ist aber nicht konvergent, da -1 und $+1$ zwei verschiedene Häufungspunke von (x_n) sind.

Aufgabe 4:

a) Es gibt eine offene Kreisscheibe $K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ vom Radius R um z_0 (Konvergenzkreisscheibe), so dass gilt:

- $P(z)$ konvergiert absolut für alle $z \in K_R(z_0)$
- $P(z)$ divergiert außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe, d.h. für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.

Sei $\lambda := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Für den Konvergenzradius R gilt dann:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{falls } \lambda \in (0, +\infty), \\ 0 & \text{falls } \lambda = +\infty, \\ +\infty & \text{falls } \lambda = 0. \end{cases}$$

b) Sei $a_k := \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$. Dann gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2 \cdot \frac{1}{k}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} e,$$

wobei e die Eulerzahl bezeichnet. Der Konvergenzradius R_1 von $P_1(z)$ ist somit: $R_1 = \frac{1}{e}$.
Sei $b_k := \frac{2^k}{k^3}$. Dann gilt

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \frac{2}{\sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{k} \cdot \sqrt[k]{k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 2.$$

Der Konvergenzradius R_2 von $P_2(z)$ ist somit: $R_2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 5:

a) f heißt in $x_0 \in I$ stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

b) Sei f in $x_0 \in I$ stetig und (x_n) eine beliebige Folge in I, die gegen x_0 konvergiert. Z.z. $(f(x_n))$ konvergiert gegen $f(x_0)$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da f in x_0 stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ so dass $\forall\, x \in I$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Da (x_n) gegen x_0 konvergiert, existert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $|x_0 - x_n| < \delta\ \forall\, n \geq n_0$. Wegen $(*)$ gilt dann $|f(x_0) - f(x_n)| < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_0$. Folglich konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$.

Aufgabe 6:

a) f nimmt in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum an, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

b) f heißt in $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert.

c) Da der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert und x_0 ein innerer Punkt von I ist, gilt für den links- und rechtsseitigen Grenzwert:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Da f in x_0 ein lokales Maximum annimmt, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq 0 \qquad \forall\, x \text{ mit } x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq 0 \qquad \forall\, x \text{ mit } x_0 < x < x_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich gilt für die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \\ f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f'(x_0) = 0$.

Aufgabe 7: Es gilt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Aus der Kettenregel folgt:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)^2} \cdot \Big(x - \frac{1}{2}\Big).$$

Kandidaten für lokale Extemstellen im offenen Intervall $(-1, 1)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Monotonieverhalten von f:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \qquad & \forall\, x \in \Big(\frac{1}{2}, 1\Big], \\ f'(x) < 0 \qquad & \forall\, x \in \Big[-1, \frac{1}{2}\Big). \end{aligned}$$

Also ist f auf $[-1, \frac{1}{2})$ streng monoton fallend und auf $(\frac{1}{2}, 1]$ streng monoton wachsend. Folglich hat f in $x = \frac{1}{2}$ ein lokales und globales Minimum, nämlich

$$f(\frac{1}{2}) = \arctan\Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\Big) = \arctan\Big(-\frac{1}{8}\Big) = -\arctan\Big(\frac{1}{8}\Big) < 0,$$

und in den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$ lokale Maxima, nämlich:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \arctan\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \\ f(1) &= \arctan\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big) = \arctan(0) = 0. \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{4}$ ist also das globale Maximum von f und wird in $x = -1$ angenommen.

Aufgabe 8: Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}, \\ f''(x) &= -\frac{2}{x^2}, \\ f'''(x) &= \frac{4}{x^3}. \end{aligned}$$

Folglich gilt für das 2. Taylorpolynom

$$T_2(f,1)(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 0 + 2(x-1) - (x-1)^2 = 2(x-1) - (x-1)^2.$$

Für die Fehlerabschätzung erhält man

$$\begin{aligned} |f(x) - T_2(f,1)(x)| &= |R_2(f,1)(x)| \\ &= \Big|\frac{f'''(\xi)}{6}(x-1)^3\Big| \qquad \text{für ein } \xi \in (1, x) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \Big|\frac{4}{\xi^3}\Big| \cdot |x-1|^3 \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{|\xi|^3} \cdot |x-1|^3 \\ &\leq \frac{2}{3} \cdot |x-1|^3. \end{aligned}$$