Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 3

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Abgabe am 13.11.2017

Bitte beachten Sie die Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben auf den letzten beiden Übungsblättern. Diese gelten für <u>alle</u> Übungsblätter zur Vorlesung Analysis I.

Aufgabe 7 Beweisen Sie folgende Summenformeln:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}$. **6 P**

Aufgabe 8 Zeigen Sie:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $d_n := n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

b) Jede natürliche Zahl $n \geq 8$ kann man in der Form $n = 3s_n + 5t_n$ mit $s_n, t_n \in \mathbb{N}_0$ darstellen.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k = 1$, so gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geq n$. Die Gleichheit tritt dabei genau dann ein, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$. **6 P**

Aufgabe 9

a) Beweisen Sie das folgende Induktionsschema:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ sei eine Ausssage $A(n)$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- $A(n_0)$ ist wahr und
- für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ gilt: Sind $A(m)$ wahr für alle $n_0 \leq m \leq n$, dann ist $A(n+1)$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0$ wahr.

b) Beweisen Sie: Es gibt genau $\binom{n-k+1}{k}$ verschiedene Möglichkeiten, k Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ so auszuwählen, dass darunter keine zwei benachbarten sind (wobei k hier eine natürliche Zahl zwischen 1 und n ist). **2+4 P**

Insgesamt: **18 P**