Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Abgabe am 27.11.2017

Aufgabe 13

Wir betrachten zwei abzählbare Mengen A und B. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen höchstens abzählbar, abzählbar oder überabzählbar sind:

a) $A \times B$,

b) $A \cup B$,

c) $A \cap B$.

Beweisen Sie Ihre Aussagen.

6 P

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle positiven reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ gilt:

$$\underbrace{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{arithmetisches Mittel} \\ \textit{von } a_1,\dots,a_n}} \geq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{geometrisches Mittel} \\ \textit{von } a_1,\dots,a_n}} \geq \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{harmonisches Mittel} \\ \textit{von } a_1,\dots,a_n}}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass in beiden Ungleichungen die Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Tipp: Sie können zum Beweis die Aufgabe 8c) benutzen. Setzen Sie dazu $p_n := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ und $x_i := \frac{a_i}{\sqrt[n]{p_n}}$.

6 P

Aufgabe 15

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$,

b) $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \sqrt[n]{|x-y|}$,

c) $\frac{x-1}{n} \geq \sqrt[n]{x} - 1$.

Tipp: Sie können zur Lösung der Aufgabe die Binomische Formel und die Bernoullische Ungleichung benutzen. **6 P**

Insgesamt: **18 P**