Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Abgabe am 04.12.2017

Aufgabe 16

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der algebraischen Form $a + ib$ dar:

$$\frac{5+i}{1-3i}\,, \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\,, \qquad \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^4\,.$$

b) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen die trigonometrische Darstellung:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \qquad \frac{1-i}{1+i}\,, \qquad (-3+3i)^3\,.$$

3+3 P

Aufgabe 17

a) Beweisen Sie, dass für zwei komplexe Zahlen z und w das folgende *Parallelogrammgesetz* gilt:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Was bedeutet diese Formel geometrisch?

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$.
$M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z-i| \leq 2\}$.
$M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$.
$M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \text{ und } \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1\}$.
$M_5 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| - Im(z) = 1\}$.
$M_6 := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z^2) = 1\}$.

Eine Begründung wird dabei nicht verlangt, aber die Menge muß in der Zeichnung klar erkennbar sein. (Sie dürfen zum Zeichnen auch ein Computerprogramm verwenden).

2+6 P

Aufgabe 18

Wir betrachten die Abbildung $F : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(z) := \frac{z-i}{z+i} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},\ z \neq -i.$$

Wir bezeichnen mit H^+ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$ und mit D die offene Einheitskreisscheibe um 0, d.h.

$$\begin{aligned} H^+ &:= \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}, \\ D &:= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass F die obere Halbebene H^+ in die Kreisscheibe D abbildet, d.h. dass $F(H^+) \subset D$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F|_{H^+} : \begin{array}{ccl} H^+ & \longrightarrow & D \\ z & \longmapsto & F(z) := \frac{z-i}{z+i} \end{array}$$

bijektiv ist.

c) Geben Sie die Umkehrabbildung von $F|_{H^+}$ an.

4 P

Insgesamt: **18 P**