Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 8

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Abgabe am 18.12.2017

Aufgabe 22

Seien x_1 und c positive reelle Zahlen und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zuerst, das die Folge $(x_n)_{n=2}^{\infty}$ von unten beschränkt und monoton fallend ist und benutzen Sie den Satz von Bolzano/Weierstrass.

4 P

Aufgabe 23

1. Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $b, c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
   Gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n < b$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x_n < b$ für alle $n \geq n_0$.
   Gilt $c < \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, so existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so dass $c < x_n$ für alle $n \geq m_0$.
2. Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:
   a) $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
   Tipp: Stellen Sie $\sqrt[n]{a_n}$ in der Form $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}\right)^{\frac{1}{n}}$ dar und benutzen Sie 1.
   b) Wenn die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(\sqrt[n]{a_n})$ gegen a.
3. Sei e die Eulerzahl. Zeigen Sie mit Hilfe von 2., dass
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

2+4+2 P

Aufgabe 24

a) Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft:
Es existiert eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, so dass
$$|z_{n+1} - z_n| < q \cdot |z_n - z_{n-1}| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$
Zeigen Sie, dass (z_n) konvergent ist.
Tipp: Cauchy-Kriterium.

b) Sei $x_1 \in \mathbb{R}$ und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge reeller Zahlen:
$$x_{n+1} := \frac{2x_n + 1}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Untersuchen Sie (x_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.
Tipp: Nutzen Sie a).

6 P

Insgesamt: **18 P**