

Übungsblatt 11

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18
Abgabe am 22.1.2018

Aufgabe 31

- a) Für zwei Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei das Minimum $\min(f, g) : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\min(f, g)(z) := \min\{f(z), g(z)\} \quad \forall z \in D.$$

Zeigen Sie: Sind f und g stetig, so ist auch $\min(f, g)$ stetig.

Tipp: Zeigen Sie, dass $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ und benutzen Sie dann Sätze aus der Vorlesung).

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

- c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2} & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 2 \\ A & \text{falls } x = 1 \\ B & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Kann man die reellen Zahlen A und B so wählen, dass f stetig ist?

6 P

Aufgabe 32

Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen. Zeigen Sie:

- a) Sind f und g gleichmäßig stetig, so ist $f + g$ gleichmäßig stetig.
b) Sind f und g Lipschitzstetig, so ist $f + g$ Lipschitzstetig.

6 P

Aufgabe 33

Untersuchen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der bisherigen Vorlesung (!), ob die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) \cdot \frac{1}{x-1}$.
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$.
c) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^{(x^x)}}{(x^x)^x}$, wobei e die Eulerszahl ist.

6 P

Insgesamt: 18 P