Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Abgabe am 29.1.2018

Aufgabe 34

a) Es sei $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie:

i) Ist n ungerade, so besitzt P mindstens eine reelle Nullstelle.

ii) Ist n gerade und $a_0 \cdot a_n < 0$, so besitzt P mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

(*Tipp: Klammern Sie x^n aus, untersuchen Sie das Verhalten von $P(x)$ bei $x \to \pm\infty$ und nutzen Sie den Zwischenwertsatz*)

b) Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = 0$$

gibt, die im offenen Intervall $(0, 2)$ liegen.
(*Tipp: Zwischenwertsatz.*)

6 P

Aufgabe 35

a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, für die *jedes* $y \in \mathbb{R}$ *genau zwei* Urbilder besitzt.

b) Zeigen Sie, dass es keine *stetige* Funktion gibt, für die jedes $y \in \mathbb{R}$ genau zwei Urbilder besitzt.

6 P

Aufgabe 36

Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine lipschitzstetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L < 1$, d.h. es gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in [a, b].$$

a) Zeigen Sie, dass f *genau einen* Fixpunkt ξ besitzt.

b) Zeigen Sie des Weiteren, dass man den Fixpunkt ξ wie folgt bestimmen kann:
Man fixiert $x_0 \in [a, b]$ und betrachtet die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt (unabhängig vom Startpunkt x_0 !):

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(*Tipp: Vergleichen Sie mit Aufgabe 24 a)*)

6 P

Insgesamt: **18 P**