Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 13

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Abgabe am 5.2.2018

Aufgabe 37

Zeigen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung (bis einschließlich Kapitel 4) die folgenden Grenzwertformeln:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$

Tipp: Benutzen Sie für b) und c) das Einschließungslemma für $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$ *aus der Vorlesung und zeigen Sie für a), dass* $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ *für alle* $x<1$. **6 P**

Aufgabe 38

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-3x+2} & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 2, \\ A & \text{falls } x = 1, \\ B & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Kann man A und B so wählen, dass h in $x_1 = 1$ bzw. $x_2 = 2$ differenzierbar ist? Falls ja, dann bestimmen Sie die Ableitung in diesem Punkt.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar bzw. 2-mal differenzierbar ist. **6 P**

Aufgabe 39

a) Sei $\alpha > 1$ eine fixierte reelle Zahl und $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit

$$|f(x)| \leq |x|^\alpha \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist und dass $f'(0) = 0$ gilt.

b) Sei $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Wir definieren die Funktion $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g stetig ist. **6 P**

Insgesamt: **18 P**