



Übungsblatt 14

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

ohne Abgabe (Woche vom 5.2.-9.2.2015)

Aufgabe 40

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion, $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $Tan(f, P_0)$ die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P_0 . Zeigen Sie:

- Wenn $f = \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. dann schneidet die Tangente $Tan(f, P_0)$ die x -Achse immer im Punkt $(x_0 - 1, 0)$.
- Wenn $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(x) = \frac{1}{x}$, dann hat das von der Tangente $Tan(f, P_0)$ und den Koordinatenachsen gebildete Dreieck immer den Flächeninhalt 2.

Aufgabe 41

- Es seien M und r zwei reelle Zahlen mit $M > 0$ und $r > 1$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^r \quad \text{für alle } x, y \in (a, b).$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

- Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$0 \leq h'(x) \leq h(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Besitzt h eine Nullstelle, so gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Tipp: Betrachten Sie auch die Funktion $g(x) := e^{-x}h(x)$.)

Aufgabe 42

 Wieviele reelle Lösungen haben die Gleichungen

- $x(x - \sin x) = \cos x$.
- $2^x = 1 + x^2$.

Aufgabe 43

 Bestimmen Sie die Grenzwerte

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}$.