HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 1 – Analysis I

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6^n - 5n + 4$ ist durch 5 teilbar. **2 P**

Aufgabe 2

Bestimmen Sie, falls diese jeweils existieren, Supremum, Infimum, Minimum und Maximum der Menge

$$M = \{\, \mathrm{Re}(z) \mid z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}.$$

3 P

Aufgabe 3

a) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen. Wann nennt man (x_n) beschränkt?

b) Beweisen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist sie auch beschränkt.

4 P

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgende Folge (x_n) konvergent ist und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

$$x_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$$

3 P

Aufgabe 5

a) Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe?

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)^n}{n!}(z-3)^n$$

4 P

Aufgabe 6

Kann man $a \in \mathbb{R}$ so wählen, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^4-1} & \text{falls } x \geq 0, x \neq 1 \\ a & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

4 P

Aufgabe 7

Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Nennen Sie zwei notwendige und eine hinreichende Bedingung dafür, dass f in $x_0 \in (a, b)$ ein Maximum annimmt. **4 P**

Aufgabe 8

Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$\cos x = e^x - 1$$

auf $[0, 1]$ genau eine Lösung hat. **4 P**

Insgesamt: 28 Punkte