Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 2 – Analysis I

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$. **2 P**

Aufgabe 2

Definieren Sie den Begriff des Supremums einer nichtleeren Menge $A \subset \mathbb{R}$. Was wissen Sie über die Existenz von Suprema von Teilmengen der reellen Zahlen? Auf welcher Eigenschaft der reellen Zahlen beruht diese Aussage? **4 P**

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die folgende Folge komplexer Zahlen (z_n) konvergiert. Geben Sie ggf. den Grenzwert an:

$$z_n := \frac{\ln n}{n} \cdot e^{in}$$

3 P

Aufgabe 4

a) Wann nennt man eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergent? Wann absolut-konvergent?

b) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{\sqrt[n]{3^n + 5^{(n^2)}}}$ konvergent? Ist sie absolut-konvergent?

4 P

Aufgabe 5

a) Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Definieren Sie die Begriffe:
   – f ist gleichmäßig stetig.
   – f ist Lipschitz-stetig.

b) Beweisen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch gleichmäßig stetig ist.

4 P

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für geeignet gewählte reelle Zahlen a und b stetig ist:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{2x^3-2x^2}{x(x-1)} & x > 0,\, x \neq 1 \\ b & x = 1 \end{cases}$$

4 P

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, die gerade ist, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $f'(0) = 0$ sein muss. **3 P**

Aufgabe 8

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := xe^{x-1}$, um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. **4 P**

Insgesamt: 28 Punkte