Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 3 – Analysis I

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subset Y$. Zeigen Sie, dass für die Urbilder gilt:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

2 P

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt:

$$\mathrm{Im}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = 0 \text{ oder } |z| = 1.$$

3 P

Aufgabe 3

a) Was versteht man unter einer alternierenden Reihe?

b) Formulieren Sie das Leibniz-Kriterium für die Konvergenz alternierender Reihen.

c) Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)$ konvergent?

4 P

Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} (z - z_0)^n.$$

3 P

Aufgabe 5

a) Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Definieren Sie, wann man f in $z_0 \in D$ stetig nennt ($\varepsilon - \delta$ –Kriterium).

b) Beweisen Sie: Ist $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in D$ stetig, so gilt für jede Folge (z_n) in D, die gegen z_0 konvergiert, dass die Bildfolge $(f(z_n))$ gegen $f(z_0)$ konvergiert.

4 P

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar bzw. stetig-differenzierbar ist:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4 P

Aufgabe 7

Sei $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, für die der Grenzwert $a := \lim\limits_{x\to\infty} f'(x) \in \mathbb{R}$ existiert. Untersuchen Sie, ob dann auch der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x))$ existiert und falls ja, geben Sie diesen an. **4 P**

Aufgabe 8

a) Was versteht man unter der Taylorreihe $T(f, x_0)(x)$ einer reellen Funktion $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Entwicklungspunkt $x_0 \in (a, b)$? Wann existiert diese Reihe?

b) Unter welchen Bedingungen konvergiert die Taylorreihe $T(f, x_0)(x)$ gegen den Funktionswert $f(x)$? Geben Sie eine Bedingung für das Restglied an, die diese Konvergenz sichert.

4 P

Insgesamt: 28 Punkte