HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 1 – Analysis II, SS 2018

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx.$$

Aufgabe 2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Begründen Sie kurz mit einer in der Vorlesung bewiesenen Aussage, dass die Riemann-Integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ und $\int_a^b |f(x)|\, dx$ existieren.

b) Beweisen Sie die Abschätzung

$$\Big|\int_a^b f(x)\, dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Aufgabe 3

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Definieren Sie den Begriff der kompakten Teilmenge $A \subset X$.
2. Charakterisieren Sie die Eigenschaft, dass $A \subset X$ abgeschlossen ist, mit Hilfe von Folgen.
3. Beweisen Sie, dass jede kompakte Teilmenge $A \subset X$ auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, in welchen Punkte des $\mathbb{R}^2$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(x \cdot \sin \frac{y}{x^2}, \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ (0, 0) & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + 3y^3 + 9y^2 - 3xy - 9x + 9y.$$

a) Bestimmen Sie alle Punkte $p \in \mathbb{R}^2$, in denen f ein lokales Minumum oder lokales Maximum annimmt.

b) Besitzt f ein globales Maximum bzw. globales Minumum? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 6

a) Definieren Sie den Begriff des Diffeomorphismus zwischen zwei offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

b) Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\phi(x,y) := \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Big).$$

Zeigen Sie, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.
Tipp: Es gilt $(\phi \circ \phi)(x,y) = (x,y)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Menge

$$F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,\infty) \mid x^2y + e^z\cosh(x) + zy = e\}$$

eine reguläre Fläche ist und bestimmen Sie die Tangentialebene an F im Punkt $P = (0,0,1)$.

Aufgabe 8

a) Skizzieren Sie die Menge

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq e, \ln(x) \leq y \leq e^x\}$$

und begründen Sie, dass A Jordan-meßbar ist.

b) Berechnen Sie das Riemann-Integral

$$\int_A x \, d(x,y).$$