Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 2 – Analysis II, SS 2018

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1-x}{(x+5)^2}\,dx.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ so dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Tipp: Denken Sie an die Monotonieeigenschaften des Riemann-Integrals.

Aufgabe 3

a) Definieren Sie, wann man einen metrischen Raum (X,d) vollständig nennt.

b) Sei $X := (0,\infty)$ und $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$d_1(x,y) := |\ln(x) - \ln(y)|.$$

Zeigen Sie, dass (X,d_1) ein metrischer Raum ist.

c) Zeigen Sie, dass der metrische Raum (X,d_1) vollständig ist.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, in welchen Punkte des $\mathbb{R}^2$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+xy^2}{x\cdot y} & \text{falls } x\cdot y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \\ y + \frac{1}{y} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 5

Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Menge.

a Wann nennt man eine Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ in $p \in U$ differenzierbar? (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Beweisen Sie die Implikation:
$f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ ist in $p \in U$ differenzierbar $\implies$ $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ ist in $p \in U$ stetig.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = (e^y \ln(x^2 + 1), \cos(yx))$$

differenzierbar ist und bestimmen Sie ihr Differential.

Aufgabe 7

Begründen Sie, warum die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := 3xy - x^2y - xy^2$$

auf der Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y \leq -x + 3\}$$

ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt und bestimmen Sie die Punkte, in denen diese Extremwerte angenommen werden.

Aufgabe 8

a) Skizzieren Sie die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$$

und begründen Sie, dass $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-meßbar ist.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_A f(x, y)\, d(x, y)$ für die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + y^2.$$