Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 3 – Analysis II, SS 2018

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$$

auf $(-1, 1)$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion besitzt.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 3

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$.

a) Definieren Sie das Innere $Int(A)$, den Abschluß $cl(A)$ und den Rand ∂A von A.

b) Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Metrik und die Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$:

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 2, 0 < y \leq x^2\} \cup \{(5, 0)\}.$$

Geben Sie $Int(A)$, $cl(A)$ und ∂A an und erläutern Sie an einer Skizze, warum Sie auf diese Ergebnisse kommen.

Aufgabe 4

a) Definieren Sie den Begriff einer stetigen Abbildung zwischen metrischen Räumen.

b) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Formulieren Sie zwei (von der Definition verschiedene) Kriterien für die Stetigkeit einer Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen.

c) Beweisen Sie eines der unter b) genannten Kriterien in der Richtung:
Das Kriterium gilt $\implies$ f ist stetig.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Geben Sie die partielle Ableitung der Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x, y) := f(\sinh(y), \arctan(xy), \ln(x^2 + y^2 + 1))$$

nach der y-Variablen im Punkt $(0, 0)$ an.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}$$

und geben Sie alle Stellen an, in denen sie angenomme werden.

Aufgabe 7

Beweisen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$$

in einer Umgebung von $(1, 1)$ nach y auflösbar ist und bestimmen Sie für die Auflösungsfunktion $y = y(x)$ die Ableitung $y'(1)$.

Aufgabe 8

a) Skizzieren Sie Menge

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 4 - x^2\}$$

und begründen Sie, warum die Menge $A \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-meßbar ist.

b) Berechnen Sie das Volumen von A.