HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Helga Baum

Musterklausur 4 – Analysis II, SS 2018

Achten Sie darauf, dass der **Lösungsweg stets erkennbar** ist; alle nicht aus der Vorlesung oder den Übungen bekannten Aussagen müssen bewiesen werden.

Aufgabe 1

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f \leq g$. Zeigen Sie, dass für die Riemann-Integrale gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Länge der parametrisierten Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\gamma(t) := (\cosh(t), \sinh(t), t).$$

Aufgabe 3

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Wann nennt man eine Teilmenge $K \subset X$ kompakt? (Definieren Sie diesen Begriff).

b) Nennen Sie vier verschiedene Eigenschaften kompakter Teilmengen eines metrischen Raumes (Einschließlich der Eigenschaften stetiger Abbildungen auf kompakten Mengen).

c) Beweisen Sie eine der unter b) genannten Eigenschaften.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, in welchen Punkten des $\mathbb{R}^2$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \left(x \cdot \sin \frac{y}{x}, \frac{\cos y - 1}{y}\right) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ (0,0) & \text{falls } x = 0 \text{ oder } y = 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = e^{xy} + x^2 + y^2$$

und die Punkte, in denen sie angenommen werden.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\phi(x,y) := (xy, x^4 - y^4)$$

um jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ ein lokaler Diffeomorphismus ist und bestimmen Sie die Jabobi-Matrix der lokalen Umkehrabbildung im Punkt $\phi(x,y)$.

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 10\}$ eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Berechnen Sie den Tangentialraum von M im Punkt $p = (2,1,1)$.

Aufgabe 8

a) Skizzieren Sie die Menge

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

und begründen Sie, warum die Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-meßbar ist.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_A f(x,y)\, d(x,y)$ für die Funktion

$$f(x,y) := y\sqrt{x}.$$