Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 2

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

Abgabe am 30.04.2018

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

a) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $[c, d] \subset [a, b]$. Dann ist die Einschränkung $f|_{[c,d]} : [c, d] \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann-integrierbar.

b) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion $\lambda f + \mu g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

c) Sind $g, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen mit $f \leq g$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

9 P

Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe von Riemannschen Summen: Für alle $b > 1$ gilt:

$$\int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \ln(b).$$

Tipp: Benutzen Sie die Zerlegungen $\mathcal{P}_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_k := b^{\frac{k}{n}}$ und die Stützstellen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_k := x_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$.

5 P

Aufgabe 6

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\mathcal{P}_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ die äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ in n Teilintervalle. Die Zahl

$$\mathcal{T}_n(f) := \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right)$$

heißt *Trapezsumme von f zur Schrittweite* $\frac{b-a}{n}$.

a) Skizzieren Sie die Situation und begründen Sie den Namen *Trapezsumme*.

b) Zeigen Sie, dass für das Riemann-Integral von f gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_n(f).$$

4 P

Insgesamt: **18 P**