



# Übungsblatt 4

## Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018  
Abgabe am 14.05.2018

---

### Aufgabe 10

In Kapitel 4 der Vorlesung haben wir die Logarithmus-Funktion  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  definiert und daraus ihre Eigenschaften abgeleitet. In dieser Aufgabe soll ein alternativer Weg für die Definition des Logarithmus besprochen werden. Wir definieren die Logarithmusfunktion  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  durch das Riemann-Integral:

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^+.$$

Zeigen Sie für diese Definition:

- Die Funktion  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav.
- $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .
- $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  und  $r \in \mathbb{R}$ .
- $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist bijektiv.
- Die Umkehrfunktion von  $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

*Tipp:* Sie können für b), c) und e) z.B. folgendes Argument benutzen: Sind  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei differenzierbare Funktionen auf einem beliebigen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $f_1' = f_2'$  und  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$  für ein  $x_0 \in I$ , dann gilt  $f_1 = f_2$ .

**10 P**

### Aufgabe 11

Zeigen Sie für die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**4 P**

— bitte wenden —

## Aufgabe 12

- a) Untersuchen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

für  $\alpha \in (0, \infty)$ .

- b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^\beta} \quad \text{für } \beta \in (0, \infty).$$

*Tipp:* Integral-Vergleichskriterium.

**6 P**

Insgesamt: **20 P**