Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

Abgabe am 23.05.2018

Aufgabe 13 *Invarianz von Tangenten, Schnittwinkeln und Längen von Kurven bei Umparametrisierung*

Seien J und I Intervalle. Eine Funktion $\tau : J \to I$ heißt *Parametertransformation*, wenn sie bijektiv und stetig differenzierbar ist und $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in J$ gilt.
Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve und $\tau : J \to I$ eine Parametertransformation, dann nennt man die Kurve $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau : J \to \mathbb{R}^n$ *Umparametrisierung von* γ. Die Spuren von γ und $\tilde{\gamma}$ stimmen dann überein. Ist τ‘ > 0, dann durchlaufen γ und $\tilde{\gamma}$ die Spur in die gleiche Richtung (*orientierungserhaltende Umparametrisierung*), ist $\tau' < 0$, so durchlaufen γ und $\tilde{\gamma}$ die Spur in entgegengesetzter Richtung (*orientierungsumkehrende Parametertransformation*).

a) Seien $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ und $\eta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ die folgenden Parametrisierungen des Kreises $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= (r\cos(t), r\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi] \\ \delta(s) &:= (r\cos(s), -r\sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi] \\ \eta(\varphi) &:= (r\cos(2\varphi), r\sin(2\varphi)), \quad \varphi \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass δ und η Umparametrisierungen von γ sind. Sind diese Umparametrisierungen orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend?

b) Sei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau : J \to \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung der differenzierbaren Kurve γ. Zeigen Sie, dass für die Tangenten gilt:

$$Tan_{\tau(s)}\gamma = Tan_s\tilde{\gamma} \qquad \text{für alle } s \in J.$$

c) Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\tilde{\gamma}$ eine Umparametisierung von γ. Zeigen Sie, dass für die Längen gilt:

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}).$$

d) Seien $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ und $\delta : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ injektive, differenzierbare, reguläre Kurven, die sich im Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ schneiden und $\tilde{\gamma}$ sowie $\tilde{\delta}$ jeweils orientierungserhaltende Umparametrisierungen von γ bzw. δ. Zeigen Sie, dass für den Schnittwinkel der Kurven im Punkt p gilt:

$$\measuredangle_p(\gamma, \delta) = \measuredangle_p(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}).$$

8 P

— bitte wenden —

Aufgabe 14 *Die Zykloide*

Die Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt $(0, r)$ (Rollkreis) werde wie ein Rad auf der x-Achse nach rechts gerollt, bis derjenige Punkt P auf dem Kreisrand, der am Anfang auf der x-Achse lag, dies wieder tut.

a) Skizzieren Sie die Situation.

b) Geben Sie eine Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ an, welche die Bahn beschreibt, die der Punkt P bei der Rollbewegung durchläuft (Mit Herleitung der Formel !).
Diese Kurve heißt *Zykloide*.

c) Berechnen Sie die Länge von γ.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes, das von der Spur der Zykloide (bei einer Umdrehung des Rollkreises) und der x-Achse gegrenzt wird.

10 P

Aufgabe 15 VERBRINGEN SIE EIN SCHÖNES PFINGSTWOCHENENDE

Insgesamt: **18 P**