Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 7

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

Abgabe am 4.6.2018

Aufgabe 19

Wir betrachten den Vektorraum der stetigen Funktionen $C^0([a,b],\mathbb{R})$ mit der Abstandsfunktion d_1 aus Aufgabe 16:

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \qquad \forall\, f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R}).$$

Sei $c := \frac{a+b}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls $[a,b]$ und (f_n) die Folge der Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [a, c-\frac{1}{n}], \\ nx+1-nc & \text{falls } x \in [c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}], \\ 2 & \text{falls } x \in [c+\frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen f_n, f_{n+1} und f_{n+2}.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_n stetig sind.

c) Zeigen Sie (durch Berechnung von $d_1(f_n,f_m)$), dass die Folge (f_n) eine Cauchy-Folge im metrischen Raum $(C^0([a,b],\mathbb{R}),d_1)$ ist.

d) Zeigen Sie, dass (f_n) im metrischen Raum $(C^0([a,b],\mathbb{R}),d_1)$ *nicht* konvergiert.

Der metrische Raum $(C^0([a,b],\mathbb{R}),d_1)$ ist also *nicht* vollständig.

Tipp zu d): Nehmen Sie an, dass eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ existiert, mit $f_n \to f$ bzgl d_1. Schlußfolgern Sie daraus mit Hilfe von Integraleigenschaften, dass $f|_{[a,c)} = 0$ und $f|_{(c,b]} = 2$. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von f.

10 P

Aufgabe 20

1. Sei $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes. Zeigen Sie:

   a) A ist offen $\iff$ $A = Int(A)$ $\iff$ $A \cap \partial A = \emptyset$.

   b) A ist abgeschlossen $\iff$ $A = cl(A)$ $\iff$ $\partial A \subset A$.

2. Zeigen Sie, dass für die offenen Mengen eines metrischen Raumes folgendes gilt:

   a) Ist $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ eine Familie beliebig vieler offener Mengen, so ist $\bigcup\limits_{i\in\Lambda} U_i$ ebenfalls offen.

   b) Sind $U_1,\ldots,U_n$ offen, so ist $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ ebenfalls offen.
   Gilt dies auch für den Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen? (Begründen Sie Ihre Antwort).

4+4 P

— bitte wenden —

Aufgabe 21

a) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume und $(X \times Y, d)$ ihr kartesisches Produkt. Zeigen Sie: Sind $A \subset X$ und $B \subset Y$ kompakt, so ist $A \times B \subset X \times Y$ ebenfalls kompakt.

Schlussfolgern Sie daraus mittels vollständiger Induktion: Sind $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ metrische Räume, $k \geq 2$, und $A_j \subset X_j$ jeweils kompakte Mengen für $j = 1, \ldots, k$. Dann ist die Produktmenge $A := A_1 \times \ldots \times A_k \subset X_1 \times \ldots \times X_k$ im kartesischen Produkt von $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ ebenfalls kompakt.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ zusammenhängend und $B \subset X$ eine Teilmenge mit

$$A \subset B \subset cl(A).$$

Zeigen Sie, dass B zusammenhängend ist.

Tipp: Führen Sie den Beweis indirekt. Nehmen Sie an, B wäre nicht zusammenhängend.

6+3 P

Insgesamt: **27 P**