Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 8

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

Abgabe am 11.06.2018

Aufgabe 22 (ohne Abgabe)

In Kapitel 7 der Vorlesung haben wir einige Sätze angegeben, deren Beweise analog wie die Beweise für die entsprechenden Sätze aus Kapitel 3 und 4 geführt werden. Wiederholen Sie beim Nacharbeiten der Vorlesung die entsprechenden Beweise aus Kapitel 3 und 4 und schreiben Sie diese für den Fall metrischer Räume nochmal auf (Sätze 7.2, 7.3, 7.15, 7.16, 7.19, 7.22).

Aufgabe 23

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie die *Vierecksungleichung*

$$|d(p,q) - d(x,y)| \leq d(p,x) + d(q,y) \qquad \forall\, p,q,x,y \in X$$

und schlußfolgern Sie daraus, dass die Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist. (Dabei ist $X \times X$ mit der Produktmetrik versehen).

b) Wir versehen den Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen $M(n, \mathbb{R})$ mit der Euklidischen Norm:

$$\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}^2} \qquad \text{für } M = (M_{ij}) \in M(n, \mathbb{R}).$$

- Zeigen Sie, dass die Abbildung $\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die jeder Matrix ihre Determinante zuordnet, stetig ist.
- Gilt dies auch, wenn man $M(n, \mathbb{R})$ mit einer anderen Norm versieht? (Begründung).
- Sei $GL(n, \mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren Matrizen und $SL(n, \mathbb{R})$ die Menge der Matrizen mit Determinante 1. Schlussfolgern Sie aus der Stetigkeit von det, dass $GL(n, \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge von $M(n, \mathbb{R})$ und $SL(n, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $M(n, \mathbb{R})$ ist.

c) Sei $\mathbb{R}^2$ der Euklidische Vektorraum und die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie, in welchen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Abbildung f stetig ist (mit Begründung).

12 P

— bitte wenden —

Aufgabe 24

Wir betrachten die Euklidischen Vektorräume $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^l$ und bezeichnen die Euklidischen Normen darauf jeweils mit $\|\cdot\|$. Sei $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^m$. Für eine lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ definieren wir die *Operatornorm*

$$\|A\| := \max\{\, \|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\|A\|$ ist korrekt definiert (d.h. das Maximum existiert).

b) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$.

c) Der normierte Vektorraum $(L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ ist vollständig.

d) Für alle linearen Abbildungen $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ und $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ gilt:
   - (i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^k$.
   - (ii) $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

e) Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ ist lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $\|A\|$.

12 P

Insgesamt: **24 P**