



Übungsblatt 9

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018
Abgabe am 18.06.2015

Aufgabe 25

- a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) := \left(e^{2x \cdot y^2}, \ln(\cosh(xy)) \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

im Punkt $p = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$.

- b) Ist die Abbildung f aus a) im Punkt $p = (1, 2)$ differenzierbar? Falls ja, dann bestimmen Sie das Differential $df_{(1,2)}$.

- c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$g(x, y) := (\cos(x), \sin(x(y^2 + 1))) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

in Richtung $\mathbf{a} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ im Punkt $p = (\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$.

9 P

Aufgabe 26

Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ eine offene Menge und seien $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Abbildungen, die im Punkt $p \in U$ differenzierbar sind.

Zeigen Sie, dass die Produktabbildung $\varphi \cdot f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ ebenfalls in $p \in U$ differenzierbar ist und dass für die Differentiale die folgende Produktregel gilt:

$$d(\varphi \cdot f)_p = \varphi(p) \cdot df_p + d\varphi_p \cdot f(p),$$

d.h. für alle $h \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$d(\varphi \cdot f)_p(h) = \varphi(p) \cdot df_p(h) + d\varphi_p(h) \cdot f(p).$$

Tipp: Gehen Sie analog vor wie beim Beweis der Produktregel für die Ableitung des Produktes von Funktionen einer reellen Variablen (siehe Analysis I, Kapitel 5) und benutzen Sie an geeigneter Stelle zur Abschätzung eines Summanden die Operatornorm der linearen Abbildung $d\varphi_p$ aus Aufgabe 24.

5 P

Aufgabe 27

Sei $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und α eine reelle Zahl mit $\alpha > 1$. Es gelte

$$\|f(x)\| \leq \|x\|^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^k.$$

Zeigen Sie, dass f im Nullvektor 0 differenzierbar ist und dass für das Differential von f im Punkt 0 gilt

$$df_0 = 0.$$

4 P

Insgesamt: **18 P**