Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 11

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

Abgabe am 2.7.2018

Aufgabe 31

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) := y^2 - 3x^2y + 2x^4$$

und sei $p := (0,0)$. Zeigen Sie:

a) Für jeden Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ hat die Funktion $g_{\mathbf{a}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g_{\mathbf{a}}(t) := f(p + t\mathbf{a})$$

in $t = 0$ ein isoliertes lokales Minimum.

b) f hat in $p = (0,0)$ kein lokales Minimum.
Tipp: Es gilt $f(0,0) = 0$. Benutzen Sie $f(x,y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$ um zu zeigen, dass f in jeder Umgebung von $(0,0)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt.

8 P

Aufgabe 32

a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \frac{1}{2}x^2 + 3y^3 + 9y^2 - 3xy - 6x.$$

Bestimmen Sie alle Punkte $p \in \mathbb{R}^2$, in denen f ein lokales Minumum oder lokales Maximum annimmt und entscheiden Sie, ob f ein globales Maximum bzw. globales Minimum besitzt (mit Begründung).

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x,y) := 4x^2 - 3xy.$$

Begründen Sie, warum g auf der Menge $A := [-1,1] \times [-1,1]$ ein globales Maximum und ein globales Minimum annimmt. Bestimmen Sie diese Werte und geben Sie alle Punkte von A an, in denen sie angenommen werden.

8 P

—- bitte wenden —-

Aufgabe 33

Seien $P_1, P_2, \ldots, P_r$ fixierte Punkte in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Der Punkt

$$S := \frac{P_1 + \ldots + P_r}{r} \in \mathbb{R}^2$$

heißt der *Schwerpunkt von* $P_1, \ldots, P_r$. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \|x - P_1\|^2 + \ldots + \|x - P_r\|^2,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass f ein globales Minimum besitzt und dass dieses in genau einem Punkt der Ebene, und zwar im Schwerpunkt S, angenommen wird.

b) (*Ein kleiner Ausflug in die Schulgeometrie*)
Sei $r = 3$ und seien P_1, P_2, P_3 drei Punkte der Ebene, die ein Dreieck bilden (d.h. die nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen). Zeigen Sie, dass der oben definierte Schwerpunkt von P_1, P_2, P_3 der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $\Delta P_1 P_2 P_3$ ist.

(*Sie können Ihre Schulkenntnisse über die Seitenhalbierenden eines Dreiecks benutzen.*)

8 P

Insgesamt: **24 P**