Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 13

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2018

(Ohne Abgabe, Besprechung in den Übungen)

Aufgabe 37

Wir betrachten die Gleichung

$$g(x,y) := x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0 \qquad (*)$$

und ihre Lösungsmenge $K := g^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$. Der Punkt $p = (1,1)$ liegt offensichtlich in dieser Lösungsmenge.

a) Kann man die Gleichung $(*)$ in einer Umgebung von $(1,1)$ nach der Variablen x oder nach der Variablen y auflösen?

b) Falls ja, dann bestimmen Sie die Ableitung der Auflösungsfunktion im Punkt 1.

c) Besitzt die die Lösungsmenge K der Gleichung $(*)$ eine Tangente im Punkt $(1,1)$? Falls ja, dann bestimmen Sie diese.

Aufgabe 38

Wir betrachten die Gleichung

$$f(x,y,z) := y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0 \qquad (**)$$

und ihre Lösungsmenge $F := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$. Der Punkt $(0,e,2)$ liegt offensichtlich in dieser Lösungsmenge.

a) Zeigen Sie, dass man die Gleichung $(**)$ in einer Umgebung von $(0,e,2)$ nach der z-Variablen auflösen kann.

b) Sei $z = z(x,y)$ eine solche Auflösung. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}(0,e)$ und $\frac{\partial z}{\partial y}(0,e)$.

c) Ist die Lösungsmenge F der Gleichung $(**)$ eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$?

— bitte wenden —

Aufgabe 39

a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ fixierte positive reelle Zahlen.
Zeigen Sie, dass das Ellipsoid

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie für einen beliebigen Punkt $p \in E$ den Tangentialraum T_pE, die Tangentialebene Tan_pE und die Normale Nor_pE.

b) Ist der Kegel

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$$

eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$?

c) Sei $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}^+$ eine positive stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten den Graphen von ψ als Funktion in der zx-Ebene über der z-Achse und rotieren ihn um die z-Achse. Die dabei entstehende Fläche F im $\mathbb{R}^3$ heißt *die von ψ erzeugte Rotationsfläche*. Überlegen Sie sich, dass man F beschreiben kann durch

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \psi(z)^2,\ z \in (a, b)\}.$$

Zeigen Sie, dass F eine reguläre Fläche ist und bestimmen Sie den Tangentialraum T_pF im Punkt $p = (\psi(z), 0, z) \in F$.