Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 1

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in den Übungen 22.10./29.10.

Aufgabe 1

X sei eine überabzählbare Menge und τ_{abz} die Mengenfamilie

$$\tau_{abz} := \{\emptyset\} \cup \{X \setminus A \mid A \text{ abzählbar}^*\}.$$

Zeigen Sie, dass (X, τ_{abz}) ein topologischer Raum ist und bestimmen Sie für eine beliebige Teilmenge $M \subset X$ das Innere $int(M)$, den Abschluß $cl(M)$ und den Rand ∂M.

* *In dieser Vorlesung nennen wir jede leere, endliche oder echt abzählbare Menge abzählbar.*

Aufgabe 2

Zeigen Sie:

a) Jeder topologische Raum mit abzählbarer Basis ist separabel.

b) Jeder separable metrische Raum hat eine abzählbare Basis.

Aufgabe 3 *Ein Schlaufenraum*

Wir betrachten auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie) die folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \iff x = y \text{ oder } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass der Punkt $[0]$ im Faktorraum $\mathbb{R}/_\sim$ keine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Aufgabe 4 *Die Sorgenfrey-Linie*

Wir betrachten die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die folgende Familie τ_{sorg} von Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$U \in \tau_{sorg} \quad :\iff \quad U = \emptyset$ oder U ist eine Vereinigung beliebig vieler halboffener Intervalle der Form $[a, b)$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Zeigen Sie:

a) $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$ ein topologischer Raum.

b) $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$ ist separabel.

c) Jeder Punkt von $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.

d) $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$ besitzt keine abzählbare Basis.

e) $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$ ist nicht metrisierbar.