Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 2

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 29.10./5.11.

Aufgabe 5

Begründen Sie, dass die topologischen Räume $\mathbb{R}^n$, S^n, T^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, das Möbiusband und die Kleinsche Flasche eine abzählbare Basis besitzen und T_2-Räume sind.

Aufgabe 6 *Homöomorphismen*

a) Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$, d.h. die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} \varphi_N : & S^n \setminus \{N\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \text{Schnittpunkt der Geraden durch } N \text{ und } x \\ & & & \text{mit der Hyperebene } \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\} \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ homöomorph zum Raum $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ aller reellen Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$ (mit der in der Vorlesung festgelegten Topologie) ist.

Zeigen Sie, dass der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ homöomorph zum Raum $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ aller komplexen Geraden durch den Ursprung im $\mathbb{C}^{n+1}$ (mit der in der Vorlesung festgelegten Topologie) ist.

c) Wir betrachten den Torus $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$,
den Rotationstorus $\hat{T}^2 := \{((2+\cos(v))\cdot\cos(u), (2+\cos(v))\cdot\sin(u), \sin(v)) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$
und den Faktorraum $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie:

- Die topologischen Räume T^n und $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ sind homöomorph.
- Die topologischen Räume T^2 und $\hat{T}^2$ sind homöomorph.

Aufgabe 7 *Hausdorff-Eigenschaft*

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) X ist ein T_2-Raum.

b) Die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \subset X \times X \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen im Produktraum $X \times X$.

c) Für jedes $x \in X$ gilt: $\quad \{x\} = \bigcap\limits_{U(x)\ Umg.\ von\ x} cl(U(x)).$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass jeder kompakte metrisierbare topologische Raum eine abzählbare Basis besitzt.