Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 3

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 5.11./12.11.

Aufgabe 9 *1-Punkt-Kompaktifizierung*
Es sei (X, τ) ein topologischer Raum und ∞ ein zusätzlicher Punkt (der nicht in X liegt). Wir betrachten die Menge $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ und die Mengenfamilie $\tau_\infty \subset \mathcal{P}(X_\infty)$

$$\tau_\infty := \tau \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus A) \mid A \subset X \text{ ist kompakt und abgeschlossen}\}.$$

Zeigen Sie:

a) (X_∞, τ_∞) ist ein topologischer Raum und für die auf X induzierte Toplogie gilt $(\tau_\infty)_X = \tau$.

b) (X_∞, τ_∞) ist kompakt.

c) Ist (X, τ) nicht kompakt, dann ist $X \subset X_\infty$ dicht.

d) (X, τ) ist lokal-kompakt und $T_2 \iff (X_\infty, \tau_\infty)$ ist T_2.

e) (X, τ) lokal-kompakt mit abzählbarer Basis $\Longrightarrow$ (X_∞, τ_∞) hat abzählbare Basis.

Der topologische Raum (X_∞, τ_∞) heißt *1-Punkt-Kompaktifizierung von* (X, τ) und der Punkt ∞ heißt *unendlich ferner Punkt*.

Aufgabe 10
Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit der von der Euklidischen Norm $\|\cdot\|$ definierten Topologie und einen zusätzlichen Punkt ∞. Sei (x_k) eine Folge in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$x_k \longrightarrow \infty \text{ in } \mathbb{R}^n_\infty \iff \|x_k\| \longrightarrow +\infty \text{ in } \mathbb{R}.$$

Aufgabe 11
Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume homöomorph sind:

a) S^n und $\mathbb{R}^n_\infty$.

b) S^2, $\mathbb{C}_\infty$ und $\mathbb{C}P^1$.

c) S^1, $\mathbb{R}_\infty$ und $\mathbb{R}P^1$.

Aufgabe 12
Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *lokal Euklidisch*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ und einen Homöomorphismus $\varphi : U(x) \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ besitzt. (Hier ist n eine feste Zahl).
Zeigen Sie: Ist (X, τ) lokal Euklidisch, dann gilt:

$$(X, \tau) \text{ ist zusammenhängend} \iff (X, \tau) \text{ ist bogenzusammenhängend.}$$