Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 4

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 12.11./17.11.

Aufgabe 13 *lokal-Euklidische topologische Räume*

a) Ist jeder lokal-Euklidische topologische Raum ein T_2-Raum? Besitzt er immer eine abzählbare Basis? (Begründen Sie Ihre Aussage)

b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt eines lokal-Euklidischen Raumes eine Karte besitzt, deren Bild der gesamte $\mathbb{R}^n$ ist

c) Zeigen Sie, dass jede Zusammenhangskomponente eines lokal-Euklidischen Raumes sowohl abgeschlossen als auch offen ist.

Aufgabe 14 *Die Sphäre S^n als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.*

a) Zeigen Sie, dass der mittels der stereographischen Projektionen definierte Atlas $\mathcal{A} := \{(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N), (S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)\}$ von S^n (siehe Vorlesung) ein Untermannigfaltigkeitsatlas (oder ein "Bügelatlas") ist, d.h. S^n ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Wir betrachten auf der Sphäre S^2 die geographischen (oder sphärischen) Koordinaten, d.h. wir beschreiben jeden Punkt $P \in S^2$, der nicht in der Halbebene $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x \geq 0\}$ liegt, durch seine geographische Länge $u \in (0, 2\pi)$ und seine geographische Breite $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$P = h(u, v) := (\cos u \cos v, \sin u \cos(v), \sin(v)).$$

(*Skizzieren Sie die Winkel u und v für den Punkt $P \in S^2 \setminus E$*).
Zeigen Sie, dass $(S^2 \setminus E, h^{-1})$ eine zulässige Karte auf der glatten Mannigfaltigkeit $(S^2, [\mathcal{A}])$ ist. Ist diese Karte auch eine "Bügelkarte"?

Aufgabe 15 *Glatte Mannigfaltigkeiten*

a) Zeigen Sie, dass der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ die Struktur einer $2n$-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit trägt.

b) Wir betrachten auf $S^{n-1} \times [-1, 1]$ die Äquivalenzrelation

$$(x, t) \sim (y, s) \ :\Longleftrightarrow\ (x, t) = (y, s) \ \text{ oder } \ t = s = 1 \ \text{ oder } t = s = -1.$$

Zeigen Sie, dass der Faktorraum $M := (S^{n-1} \times [-1, 1])/_\sim$ die Struktur einer n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit trägt.
(*Hinweis: Mit welcher bekannten Mannigfaltigkeit können Sie M identifizieren?*).

— bitte wenden —

Aufgabe 16 *Glatte Abbildungen*
Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen *glatte* Abbildungen zwischen den angegebenen Mannigfaltigkeiten sind:

a) Die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$.

b) Die Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq \mathbb{R}^{(n+1)^2}$:

$$f([x])(v) := \frac{\langle v, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x \qquad \text{für } [x] \in \mathbb{RP}^n \text{ und } v \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Aufgabe 17 *Glatte Abbildungen für Untermannigfaltigkeiten*
Seien M und X eine glatte Mannigfaltigkeiten und $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit von M. Zeigen Sie:

a) Die Inklusionsabbildung $\iota : N \hookrightarrow M$ ist glatt.

b) Sei $\Phi : X \to M$ eine Abbildung mit $\Phi(X) \subset N$. Dann gilt:

$$\Phi : X \to M \text{ ist } C^k \iff \Phi : X \to N \text{ ist } C^k.$$

c) Ist $\Psi : M \to X$ eine C^k-Abbildung, so ist die Einschränkung $\Psi_{|N} : N \to X$ ebenfalls eine C^k-Abbildung.