Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 19.11./26.11.

Aufgabe 18 *Der Physiker-Tangentialraum*

Es sei M^n eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Mit $\mathcal{A}_p$ bezeichnen wir die Menge aller zulässigen Karten um p, d.h.

$$\mathcal{A}_p := \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ zulässige Karte mit } p \in U\}.$$

Auf $\mathcal{A}_p \times \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$((U, \varphi), v) \sim ((V, \psi), w) \iff d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(v) = w.$$

Der *Physiker-Tangentialraum* $T_p^{phys}M$ ist die Menge der Äquivalenzklassen für diese Äquivalenzrelation.
(*Tangentialvektoren werden hier durch ihre Koordinatenvektoren bzgl. einer Karte definiert*).
Zeigen Sie:

a) $T_p^{phys}M$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum mit der Operation

$$\lambda \cdot [((U, \varphi), v)] + \mu \cdot [((U, \varphi), w)] := [((U, \varphi), \lambda v + \mu w)],$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) Die Abbildung $\Phi : T_pM \to T_p^{phys}M$ mit

$$\Phi([\gamma]_p) := [((U, \varphi), (\varphi \circ \gamma)'(0))]$$

ist korrekt definiert und ein Vektorraum-Isomorphismus.

c) Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte um p mit der kanonischen Basis $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_1}(p)\right)$ in T_pM. Dann gilt:

$$\Phi\Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}(p)\Big) = [((U, \varphi), (\xi_1, \ldots, \xi_n))].$$

d) Für das Differential $dF_p : T_p^{phys}M \to T_{F(p)}^{phys}N$ einer glatten Abbildung $F : M \to N$ gilt (bei Identifizierung mittels Φ):

$$dF_p([((U, \varphi), v)]) = [((V, \psi), d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}_{\varphi(p)})(v))].$$

—- bitte wenden —–

Aufgabe 19 *Eine algebraische Definition des Tangentialraumes*

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zwei in einer Umgebung von p definierte glatte Funktionen $f_1 : U_1(p) \subset M \to \mathbb{R}$ und $f_2 : U_2(p) \subset M \to \mathbb{R}$ nennen wir äquivalent, wenn es eine Umgebung $V(p) \subset U_1(p) \cap U_2(p)$ gibt, auf der f_1 und f_2 übereinstimmen. Die entstehende Äquivalenzklasse von f_1 bezeichnen wir mit $[f_1]_p$. Sie heißt *Keim der glatten Funktion f_1 in $p \in M$*. Mit $\mathcal{E}_p(M)$ bezeichnen wir die Menge der glatten Funkionenkeime in $p \in M$. $\mathcal{E}_p(M)$ ist eine reelle Algebra mit den Operationen

$$\begin{aligned} \lambda[f]_p + \mu[g]_p &:= [(\lambda f + \mu g)_{|D}]_p, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ [f]_p \cdot [g]_p &:= [(f \cdot g)_{|D}], \end{aligned}$$

wobei D den Durchschnitt der Definitionsbereiche von f und g bezeichnet. Eine Abbildung $v : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$ heißt *Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$*, wenn v linear ist und die Produktregel

$$v([f]_p \cdot [g]_p) = f(p) \cdot v([g]_p) + v([f]_p) \cdot g(p), \quad [f]_p, [g]_p \in \mathcal{E}_p(M),$$

erfüllt. Wir definieren den *Algebraiker-Tangentialraum* durch

$$T_p^{alg} M := \{ v : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R} \mid \ v \text{ ist eine Derivation auf } \mathcal{E}_p(M) \ \}.$$

(*Ein Tangentialvektor wird hier durch seine Wirkung auf Funktionen definiert*).

a) Sei $[\gamma]_p \in T_pM$ ein Tangentialvektor in $p \in M$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $v_{[\gamma]_p} : \mathcal{E}_p(M) \to \mathbb{R}$,
$$v_{[\gamma]_p}([f]_p) := (f \circ \gamma)'(0),$$
korrekt definiert (d.h. unabhängig von der Wahl von $\gamma \in [\gamma]_p$ und $f \in [f]_p$) und eine Derivation auf $\mathcal{E}_p(M)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\begin{aligned} \Psi : \quad T_pM &\longrightarrow T_p^{alg} M \\ [\gamma]_p &\longmapsto v_{[\gamma]_p} \end{aligned}$$
ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Hinweis: Beim Beweis der Surjektivität von Ψ ist das folgende Lemma nützlich:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Kugel um den Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^n$ und $h : \Omega \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $h(0) = 0$. Dann existieren glatte Funktionen $h_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, so dass
$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot h_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega.$$

c) Sei $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte um $p \in M$ und $(\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p))$ die kanonische Basis von T_pM zu dieser Karte. Zeigen Sie, dass die Derivation $\Psi(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)) \in T_p^{alg} M$ gegeben ist durch
$$\Psi\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\Big)([f]_p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

d) Zeigen Sie, dass das Differential $dF_p : T_p^{alg} M \to T_{F(p)}^{alg} N$ einer glatten Abbildung $F : M \to N$ (bei der Identifizierung mittels Ψ) gegeben ist durch
$$dF_p(v)([f]_{F(p)}) = v([f \circ F]_p)$$
wobei $v \in T_p^{alg} M$, und $[f]_{F(p)} \in \mathcal{E}_{F(p)}(N)$.

—- bitte wenden —–

Aufgabe 20

a) Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} T_pM & \longrightarrow & T^{UMF}\mathbb{R}^d := \{v \in \mathbb{R}^d \mid \exists \text{ Kurve } \gamma : I \to M \text{ mit } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\} \\ [\gamma]_p & \longmapsto & \gamma'(0) \end{array}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

b) Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit, $p \in N$ und X eine weitere glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

- $T_pN \subset T_pM$ ist ein linearer Unterraum.
- Ist $F : M \to X$ eine glatte Abbildung, dann ist $f := F|_N : N \to X$ ebenfalls glatt (siehe Aufgabe 17) und es gilt

$$df_p = (dF_p)|_{T_pN}.$$

Aufgabe 21

Wir betrachten die Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^n$ auf den n-dimensionalen reell-projektiven Raum. Sei $\widetilde{U}_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$ und $\varphi_i : U_i := \pi(\widetilde{U}_i) \to \mathbb{R}^n$ die in der Vorlesung betrachtete Karte von $\mathbb{RP}^n$:

$$\varphi_i([x]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right).$$

a) Bestimmen Sie das Differential der Abbildung $\varphi_i \circ \pi : \widetilde{U}_i \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $x \in \widetilde{U}_i$.

b) Sei $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für den Kern von $d\pi_x$: $\operatorname{Ker} d\pi_x = \mathbb{R}x$.

c) Zeigen Sie, dass π eine Submersion ist.

Aufgabe 22

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \operatorname{End}(\mathbb{R}^{n+1}) \simeq \mathbb{R}^{(n+1)^2}$, definiert durch

$$f([x])(v) := \frac{\langle v, x\rangle}{\langle x, x\rangle} \cdot x \qquad \text{für } [x] \in \mathbb{RP}^n \text{ und } v \in \mathbb{R}^{n+1},$$

eine Einbettung ist.