Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 26.11./3.12.

Aufgabe 23

a) Wir betrachten die Projektion $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$:

$$\pi((x, y, z)) := [x : y : z].$$

Zeigen Sie, dass π ein lokaler Diffeomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass der 2-dimensionale reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^2$ diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Tipp: Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$, definiert durch

$$f([x : y : z]) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2) \quad \text{für } (x, y, z) \in S^2.$$

c) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(t, s) := (s \cos t, s \sin t, ht),$$

wobei $h \in \mathbb{R}$ eine fixierte Konstante ist.
Skizzieren Sie die Bildmenge $F := f(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^3$ und zeigen Sie, dass F eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
(F heißt *Wendelfläche*).

Aufgabe 24

Wir betrachten die folgenden Mengen im $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\},\\
M_2 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \cosh^2(z)\},\\
M_3 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\},\\
M_4 &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = b^2 - z^2\},\\
&\qquad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < b < a.
\end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie die Mengen M_1, M_2, M_3, M_4.

b) Welche der Mengen M_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, sind 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ (d.h. Flächen im $\mathbb{R}^3$)?

c) Bestimmen Sie im Flächenfall die Tangentialräume T_pM_i für $p \in M_i$.

— bitte wenden —

Aufgabe 25

a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die orthogonale Gruppe $O(n)$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $GL(n, \mathbb{R})$ ist.
Bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{E_n}O(n)$ an $O(n)$ in der Einheitsmatrix $E_n \in O(n)$.
Tipp: Betrachten Sie eine Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to O(n)$ mit $\gamma(0) = E_n$ und überlegen Sie, welche Bedingungen die Matrix $\gamma'(0) \in T_{E_n}O(n)$ erfüllen muss. Benutzen Sie dann ein Dimensionsargument für den Tangentialraum.

b) Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

eine $(n^2 - 1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist und bestimmen Sie den Tangentialraum $T_{E_n}SL(n, \mathbb{R})$.
Tipp: Benutzen Sie für die Berechnung des Tangentialraumes das Matrix-Exponential und die Formel

$$\det(e^X) = e^{\mathrm{Spur}(X)} \quad \text{für } X \in M(n, \mathbb{R}).$$