Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

# Übungsblatt 7

## Differentialgeometrie I

**WS 2018/2019**

*Besprechung in der Übung am 3.12./10.12.*

---

**Aufgabe 26**
Sei $M^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit, $X$ und $Y$ zwei glatte Vektorfelder auf $M$, $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ eine zulässige Karte auf $M$ und

$$\begin{aligned} X|_U &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U), \\ Y|_U &= \sum_{j=1}^{n} \eta_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U) \end{aligned}$$

die Darstellung von $X|_U$ und $Y|_U$ in der kanonischen Basis zur Karte $(U, \varphi)$. Wir definieren den Kommutator $[X, Y]$ von $X$ und $Y$ über $U$ durch

$$[X, Y]|_U := \sum_{j=1}^{n} \left(X(\eta_j) - Y(\xi_j)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Zeigen Sie, dass dadurch ein *globales* glattes Vektorfeld $[X, Y]$ auf $M$ definiert ist (d.h. der Vektor $[X, Y](p) \in T_pM$ hängt nicht von der um $p$ gewählten zulässigen Karte ab.).

**Aufgabe 27**
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des Kommutators von Vektorfeldern auf glatten Mannigfaltigkeiten $M$:

a) Die *Jacobi-Identität*: Für alle Vektorfelder $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

b) Die *Produktregel*: Für $f, g \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[fX, gY] = fg\,[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

c) Die *Richtungsableitung*: Für $h \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ gilt:

$$[X, Y](h) = X(Y(h)) - Y(X(h)).$$

d) *Kommutator $F$-verknüpfter Vektorfelder*: Seien $F : M \to N$ eine glatte Abbildung, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ Vektorfelder auf $M$ bzw. $N$.
Zeigen Sie: Sind $X_i$ und $Y_i$ $F$-verknüpft $(i = 1, 2)$, so sind auch die Kommutatoren $[X_1, X_2]$ und $[Y_1, Y_2]$ $F$-verknüpft.

— bitte wenden —

**Aufgabe 28**

a) Es seien $X_1, X_2, X_3 : S^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} X_1(x,y,z,w) &:= (-y, x, -w, z), \\ X_2(x,y,z,w) &:= (z, -w, -x, y), \\ X_3(x,y,z,w) &:= (-w, -z, y.x). \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $X_1, X_2, X_3$ glatte Vektorfelder auf $S^3$ sind und dass für ihre Kommutatoren gilt:

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \quad [X_2, X_3] = 2X_1, \quad [X_3, X_1] = 2X_2.$$

b) Bestimmen Sie die Flüsse $\phi^1$ und $\phi^2$ der Vektorfelder $X_1$ und $X_2$.
Geben Sie die Punkte $\phi_s^2 \circ \phi_t^1(p) \in S^3$ und $\phi_t^1 \circ \phi_s^2(p) \in S^3$ für $p = (1,0,0,0)$ und $s = t = \frac{\pi}{2}$ an.

c) Wir betrachten die Karte $(S^3 \setminus \{N\}, \varphi_N)$, die durch die stereographische Projektion $\varphi_N$ aus dem Nordpol $N$ gegeben ist (siehe Vorlesung). Berechnen Sie die Koeffizienten des Vektorfeldes $X_1$ für die kanonischen Basisfelder dieser Karte.

**Aufgabe 29**

Seien $X_1, \dots, X_k$ Vektorfelder auf einer $n$-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit $M$, $k \leq n$, $p \in M$ und gelte

a) $X_1(p), \dots, X_k(p)$ sind linear unabhängig in $T_pM$, und

b) $[X_i, X_j] = 0$ für alle $i, j = 1, \dots, k$.

Beweisen Sie, dass eine zulässige Karte $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ um $p$ existiert, so dass $X_i|_U = \frac{\partial}{\partial x_i}$ für $i = 1, \dots, k$.

*Hinweis*:
Arbeiten Sie folgende Idee zu einem Beweis aus: Wähle eine Karte $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$ um $p$, so dass $\psi(p) = 0$ und $T_pM = \operatorname{span}\left\{X_1(p), \dots, X_k(p), \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial y_{k+1}}(p)\right\}$ (warum existiert eine solche Karte?) und betrachte für eine hinreichend kleine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung

$$h(x_1, \dots, x_n) := \phi^1_{x_1} \circ \dots \circ \phi^k_{x_k}\left(\psi^{-1}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)\right),$$

wobei $\phi^i$ den Fluss des Vektorfeldes $X_i$ bezeichnet. $h$ ist dann ein lokaler Diffeomorphismus um $0 \in \mathbb{R}^n$ (warum?) und sein Inverses definiert eine Karte mit den gesuchten Eigenschaften.