Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

# Übungsblatt 8

## Differentialgeometrie I

**WS 2018/2019**

*Besprechung in der Übung am 10.12./17.12.*

---

**Aufgabe 30**

Zeigen Sie, dass die Matrizengruppen $SO(n)$, $SL(n,\mathbb{R})$, $GL(n,\mathbb{C})$, $SL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$ und $SU(n)$ Lie-Gruppen sind und bestimmen Sie ihre Lie-Algebren und ihre (reelle) Dimension.

**Aufgabe 31**

Sei $G$ eine Lie-Gruppe und $X \in \mathfrak{X}(G)$ ein linksinvariantes Vektorfeld auf $G$.

a) Sei $\gamma_e : I \subset \mathbb{R} \to G$ eine Integralkurve von $X$ durch das neutrale Element $e \in G$ und sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass $\gamma_g : I \to G$,

$$\gamma_g(t) := g \cdot \gamma_e(t), \quad t \in I,$$

eine Integralkurve von $X$ durch $g$ ist.

b) Sei $I_e$ der Definitionsbereich der maximalen Integralkurve von $X$ durch $e$.
Zeigen Sie: Sind $s, t \in I_e$, so gilt $t + s \in I_e$ und $\gamma_e(s+t) = \gamma_e(s) \cdot \gamma_e(t)$.

c) Zeigen Sie, dass $X$ vollständig ist.

**Aufgabe 32**

Sei $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^d$. Für zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir das Vektorfeld $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$p \in M \quad \longmapsto \quad (\nabla_X Y)(p) := \mathrm{proj}_{T_pM}\, X(Y)(p).$$

a) Begründen Sie, dass $\nabla_X Y$ tatsächlich ein Vektorfeld auf $M$ ist.

b) Untersuchen Sie, welche der folgenden fünf Abbildungen Tensorfelder sind:

$$\begin{aligned} \nabla Y : \ \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ X &\longmapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X : \ \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ Y &\longmapsto \nabla_X Y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X,Y,Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X,Y,Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R : \ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (X,Y,Z) &\longmapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \end{aligned}$$

**Aufgabe 33**
Sei $X$ ein Vektorfeld auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$ und bezeichne $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ seinen Fluß. Unter der *Lie-Ableitung* eines $(k,0)$-Tensorfeldes $B$ auf $M$ in Richtung $X$ versteht man das durch folgende Definition gegebene $(k,0)$-Tensorfeld $L_X B$:

$$p \in M \quad \longmapsto \quad (L_X B)_p := \frac{d}{dt}(\phi_t^* B)_p \Big|_{t=0} \in T^{(k,0)}(T_p M). \qquad (*)$$

Begründen Sie, dass $(*)$ tatsächlich ein $(k,0)$-Tensorfeld auf $M$ definiert und beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Lie-Ableitung von Tensorfeldern:

a) $L_X(f \cdot B) = X(f) \cdot B + f \cdot L_X B$.

b) $L_X(B_1 \otimes B_2) = L_X B_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes L_X B_2$.

c) $(L_X B)(X_1, \ldots, X_k) = X\left(B(X_1, \ldots, X_k)\right) - \sum_{i=1}^{k} B(X_1, \ldots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \ldots, X_k)$.

Hierbei bezeichnet $B$ ein $(k,0)$-Tensorfeld, $B_1$ und $B_2$ $(k_1,0)$ bzw. $(k_2,0)$-Tensorfelder, $X, X_1, \ldots, X_k$ glatte Vektorfelder und $f$ eine glatte reell-wertige Funktion auf $M$.