Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 9

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 17.12.

Aufgabe 34

Sei $n = k + l$ und bezeichne $\mathbb{R}^{k,l}$ den $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle_{k,l} := -x_1y_1 - \ldots - x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_ny_n,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Sei $r > 0$.
Wir betrachten die Hyperfläche

$$S^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k,l+1} \mid \langle x, x\rangle_{k,l+1} = r^2\} \subset \mathbb{R}^{k,l+1}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,l+1}$ induzierten Metrik g, sowie die Hyperfläche

$$H^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k+1,l} \mid \langle x, x\rangle_{k+1,l} = -r^2\} \subset \mathbb{R}^{k+1,l}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k+1,l}$ induzierten Metrik h.
Zeigen Sie:

a) $(S^n_k(r), g)$ ist eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index k.

b) $(H^n_k(r), h)$ ist eine n-dimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index k.

Aufgabe 35

Wir betrachten die Lie-Gruppen $G = SU(2)$ und $G = SL(2,\mathbb{R})$ und definieren einen Schnitt im Bündel der $(2,0)$-Tensoren $T^{(2,0)}(G)$ durch

$$A \in G \;\longmapsto\; B_A \in T^{(2,0)}(T_AG)$$

wobei

$$B_A(X, Y) := 4 \cdot Spur\Big((A^{-1} \circ X) \circ (A^{-1} \circ Y)\Big), \qquad X, Y \in T_AG.$$

Zeigen Sie:

- $-B$ ist eine *Riemannsche* Metrik auf G für $G = SU(2)$.
- B ist eine *Lorentzmetrik* auf G für $G = SL(2,\mathbb{R})$.

— bitte wenden —

Aufgabe 36

Für eine komplexe Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ bezeichne $F_A : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ die Möbiustransformation

$$F_A(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } z \in \mathbb{C}, \\ \frac{a}{c} & \text{falls } z = \infty. \end{cases}$$

(H^+, g_{H^+}) sei die *Poincare-Halbebene*

$$H^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}, \qquad g_{H^+} := \frac{1}{y^2} \cdot (dx^2 + dy^2).$$

Zeigen Sie, dass die durch eine Matrix $A \in SL(2,\mathbb{R})$ definierte Möbiustransformation F_A eine Isometrie der Poincaré-Halbebene (H^+, g_{H^+}) auf sich selbst induziert.
Tipp: Benutzen Sie, dass $F := F_A$ holomorph ist, d.h.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = F'(z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(z) = i \cdot F'(z).$$

Aufgabe 37

Zeigen Sie, dass die stereographische Projektion $\varphi_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ aus dem Nordpol (siehe Aufgabe 6 und Aufgabe 14) eine konforme Abbildung ist, wenn man $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Riemanschen Metrik $g_{S^n} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{\mathfrak{X}(S^n)\times\mathfrak{X}(S^n)}$ und $\mathbb{R}^n$ mit der Euklididschen Metrik $g_{\mathbb{R}^n} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ versieht.