Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 10

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 7.1.

Aufgabe 38

Sei B ein $(k,0)$-Tensorfeld und X, Y glatte Vektorfelder auf M. Beweisen Sie, dass für die Lie-Ableitung gilt:

$$L_{[X,Y]}B = (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)\, B.$$

Tipp: Benutzen Sie die Formel c) aus Aufgabe 33).

Aufgabe 39

Wir betrachten den $\mathbb{R}^4$ mit den Euklidischen Koordinaten $\varphi(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ und das $(2,0)$-Tensorfeld

$$g := dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 + f(x_2, x_3, x_4) \cdot (dx_3 \otimes dx_3 + dx_4 \otimes dx_4)$$

auf $\mathbb{R}^4$, wobei f eine positive glatte Funktion auf $\mathbb{R}^3$ ist.

a) Zeigen Sie, dass g eine Lorentz-Metrik auf $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $X := \frac{\partial}{\partial x_1}$ ein Killing-Vektorfeld auf $(\mathbb{R}^4, g)$ ist.
Gilt das auch für das Vektorfeld $Y := \frac{\partial}{\partial x_2}$?

Tipp: Benutzen Sie die Formel c) aus Aufgabe 33).

Aufgabe 40

Wir betrachten die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der durch das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$ induzierten Riemannschen Metrik g.
Für $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichne $X_{v,w} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die durch

$$X_{v,w}(p) := \langle v, p \rangle \cdot w - \langle w, p \rangle \cdot v, \qquad p \in S^n,$$

definierte Abbildung, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

a) Zeigen Sie, dass $X_{v,w}$ ein glattes Vektorfeld auf S^n ist.

b) Zeigen Sie, dass $X_{v,w}$ ein Killing-Vektorfeld auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (S^n, g) ist.

Tipp: Benutzen Sie die Formel c) aus Aufgabe 33).

— bitte wenden —

Aufgabe 41
Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ eine kovariante Ableitung auf M, für die gilt:

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \qquad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Sei $\gamma : I \to M$ eine glatte Kurve auf M und V und W Vektorfelder entlang γ. Beweisen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\, g_{\gamma(t)}(V(t), W(t)) = g_{\gamma(t)}\Big(\frac{\nabla V}{dt}(t), W(t)\Big) + g_{\gamma(t)}\Big(V(t), \frac{\nabla W}{dt}(t)\Big) \qquad \forall\, t \in I.$$

Beschäftigen Sie sich nochmal mit den Aufgaben der vorigen Übungsserien, die Sie bisher noch nicht gelöst haben.