Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 11

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 14.1.

Aufgabe 42

Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf M, X und Y Vektorfelder auf M und γ die Integralkurve von X durch $p \in M$. Beweisen Sie, dass sich die kovariante Ableitung ∇ auf folgende Weise durch die Parallelverschiebung $\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma}$ entlang γ ausdrücken läßt:

$$(\nabla_X Y)(p) = \frac{d}{dt} \mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma|[0,t]}{}^{-1} \Big(Y(\gamma(t)) \Big) \Big|_{t=0}.$$

Tipp: Betrachten Sie eine Basis $v_1(t), \dots, v_n(t)$ in $T_{\gamma(t)}M$, die durch Parallelverschiebung einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von T_pM entlang γ entsteht und drücken Sie $Y(\gamma(t))$ in dieser Basis aus.

Aufgabe 43

Wir betrachten die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit der induzierten Riemannschen Metrik g und dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇ zu g. Seien $p = (0, 0, 1)$ der "Nordpol" und $q = (0, 0, -1)$ der "Südpol" von S^2.
Sei $v \in T_pS^2$ ein Einheitsvektor und $\gamma_v : [0, \pi] \to S^2$ die Kurve

$$\gamma_v(t) := \sin(t) \cdot v + \cos(t) \cdot p.$$

Zeigen Sie, dass γ_v eine Kurve auf S^2 ist, die p und q verbindet und bestimmen Sie die Parallelverschiebung

$$\mathcal{P}^{\nabla}_{\gamma_v} : T_pS^2 \longrightarrow T_qS^2.$$

Tipp: Benutzen Sie, dass ein Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(S^2)$ genau dann parallelverschoben entlang γ bzgl des Levi-Civita-Zusammenhanges ist, wenn der Vektor $Z'(t)$ für jeden Parameter t ein Normalenvektor an S^2 im Punkt $\gamma(t)$ ist. (Satz aus der Vorlesung).

Aufgabe 44

Sei $F : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ eine Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ bezeichne $F_\star X \in \mathfrak{X}(N)$ das induzierte Vektorfeld auf N:

$$(F_\star X)(F(p)) = dF_p(X(p)), \qquad p \in M.$$

Zeigen Sie, dass für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇^g von (M, g) und ∇^h von (N, h) gilt:

$$F_\star\Big(\nabla^g_X Y\Big) = \nabla^h_{F_\star X} F_\star Y \qquad \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Tipp: Benutzen Sie die Koszul-Formel für den Levi-Civita-Zusmmenhang.

— bitte wenden —

Aufgabe 45

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f; M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion auf M. Der *Gradient von* f ist das durch folgende Bedingung definierte Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ auf M:

$$df(X) = g(\operatorname{grad} f, X) \qquad \forall\, X \in \mathfrak{X}(M).$$

Wir betrachten die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der induzierten Riemannschen Metrik g. Sei $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $f_v : S^n \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_v(p) := \langle p, v\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}\,, \qquad p \in S^n.$$

Zeigen Sie:

a) Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇^g auf (S^n, g) ist gegeben durch

$$(\nabla^g_X Y)(p) = X(Y)(p) + \langle X(p), Y(p)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdot p\,, \qquad p \in S^n, X, Y \in \mathfrak{X}(S^n).$$

b) Der Gradient von f_v auf (S^n, g) ist gegeben durch

$$\operatorname{grad} f_v(p) = v - \langle v, p\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \cdot p, \qquad p \in S^n.$$

c) Für alle Vektorfelder X auf S^n gilt:

$$\nabla^g_X \operatorname{grad} f_v = -f_v \cdot X.$$

d) $\operatorname{grad} f_v$ ist ein konformes Vektorfeld auf (S^n, g), das für $v \neq 0$ kein Killingfeld ist.

Tipp: Benutzen Sie die Formel aus der Vorlesung, die die Lie-Ableitung durch den Levi-Civita-Zusammenhang ausdrückt.