Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 21.1.

Aufgabe 46

Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Frenetkurve mit den Krümmungen $k_j^\gamma : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n-1$. Zeigen Sie:

a) $k_j^\gamma > 0$ für $j = 1, \dots, n-2$.

b) Sei $\rho : J \to I$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation und $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ \rho$ die Umparametrisierung von γ mittels ρ. Dann gilt:
$$k_j^{\widetilde{\gamma}}(s) = k_j^\gamma(\rho(s)), \qquad \forall\, s \in J,\ \ j = 1, \dots, n-1.$$

c) Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine eigentliche Euklidische Bewegung, d.h. $Tx = Ax + x_0$, wobei $A \in SO(n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Kurve $\delta := T \circ \gamma$
$$k_j^\delta = k_j^\gamma, \qquad j = 1, \dots, n-1.$$

Aufgabe 47

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre ebene Kurve mit der Krümmung $k : I \to \mathbb{R}$ und c eine reelle Konstante. Dann gilt

a) $k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(I)$ liegt auf einer Geraden.

b) $k = c \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(I)$ liegt auf einem Kreis vom Radius $\frac{1}{|c|}$.

Aufgabe 48

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve. Zeigen Sie:

a) Für die Krümmung $k : I \to [0, +\infty)$ von γ gilt:
$$k = 0 \iff \gamma(I) \text{ liegt auf einer Geraden.}$$

b) Ist γ eine Frenetkurve, dann gilt für die Windung $\tau : I \to \mathbb{R}$ von γ
$$\tau = 0 \iff \gamma(I) \text{ liegt in einer Ebene.}$$

c) Ist γ eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit $\tau(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Dann gilt:

$\gamma(I)$ liegt auf einer Kugeloberfläche, d.h. es existiert ein $M \in \mathbb{R}^3$ und ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $\|\gamma(t) - M\| = r$ für alle $t \in I$, genau dann, wenn
$$\frac{\tau}{k} + \left(\frac{1}{\tau} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)'\right)' = 0.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 49

Eine Frenetkurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ heißt *Schraubenlinie*, wenn sie (ggf. nach Umparametrisierung und Anwendung einer Euklidischen Bewegung) die Form

$$\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ht), \quad t \in I$$

hat, wobei $r > 0$ und $h \in \mathbb{R}$.
(D.h. γ schraubt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um einen Zylinder vom Radius r und dabei mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung der Zylinderachse.)

Eine Frenetkurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ heißt *Böschungslinie*, wenn es einen Vektor $v_0 \neq 0$ im $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass der Winkel $\measuredangle(v_0, \gamma'(t))$ konstant ist.
(D.h. die Kurve γ läuft eine Böschung in konstanter Richtung entlang.)

Zeigen Sie:

a) $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ist eine Schraubenlinie genau dann, wenn die Krümmung k und die Windung τ von γ konstant sind.

b) $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ist eine Böschungslinie genau dann, wenn das Verhältnis $\frac{\tau}{k}$ konstant ist.