Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 13

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 28.1.

Aufgabe 50

Zeigen Sie, dass jede *kompakte* Fläche $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ einen elliptischen Punkt, d.h. einen Punkt mit positiver Gauß-Krümmung, besitzt.

Tipp: Untersuchen Sie die Gauß-Krümmung in einem Punkt $p \in M$, in dem die Funktion $d : q \in M \mapsto \|q\| \in \mathbb{R}$ ein Maximum annimmt.

Aufgabe 51

Zeigen Sie, dass es keine kompakten Minimalflächen im $\mathbb{R}^3$ gibt.

Aufgabe 52

Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine zusammenhängende orientierte Fläche, die nur aus umbilischen Punkten besteht. Zeigen Sie, dass M^2 Teil einer Sphäre oder Teil einer Ebene ist.

Aufgabe 53

Es sei $\psi : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine glatte Funktion und

$$M_\psi := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \psi(z)^2 \, , z \in (a,b)\}$$

die durch ψ definierte Rotationsfläche. Zeigen Sie,

a) Beschreibt die Funktion ψ eine *Kettenlinie*, d.h. hat ψ die Form

$$\psi(z) = c \cdot \cosh\left(\frac{z-k}{c}\right)$$

mit reellen Konstanten k und $c > 0$, dann ist M_ψ eine Minimalfläche. Skizzieren Sie diese Flächen M_ψ.(Siehe auch Aufgabe 24). Sie heißen *Katenoid*.

b) Zeigen Sie, dass die Katenoide die einzigen Minimalflächen unter den Flächen des Typs M_ψ sind.

Tipp: Benutzen Sie als Koordinaten eines Punktes (x,y,z) auf M_ψ seinen Drehwinkel α um die z-Achse (Polarwinkel von (x,y) bzgl der x-Achse) und seine Höhe z und verwenden Sie die Formel aus der Vorlesung, die die mittlere Krümmung in Koordinaten beschreibt.

—- bitte wenden —-

Aufgabe 54
Zeigen Sie, dass die Wendelfläche

$$W := \{(v\cos(\alpha), v\sin(\alpha), \alpha) \mid \ \alpha \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^3$$

(Siehe auch Aufgabe 23) eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 55
Wir betrachten die Beltrami-Fläche vom "Radius" $r > 0$:

$$B^2(r) := \left\{\left(r\sin(t)\cos(\alpha), r\sin(t)\sin(\alpha), r(\,\ln\tan(\frac{t}{2})+\cos(t))\right) \,\middle|\, t \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\},\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

a) Skizzieren Sie die Beltrami-Fläche. (Sie können dazu ein Computerprogramm benutzen)

   Tipp: Die Beltrami-Fläche entsteht durch Rotation der Kurve

   $$\Gamma := \{(r\sin(t), 0, r(\,\ln\tan(\frac{t}{2}) + \cos(t)) \mid t \in (0,\pi) \setminus \{\pi/2\}\}$$

   um die z-Achse). Γ heißt *Schleppkurve*.

b) Zeigen Sie, dass die Beltrami-Fläche konstante negative Gauß-Krümmung $K = -\frac{1}{r^2}$ hat.

Zur Erinnerung: Die Sphäre $S^2(r)$ vom Radius r hat konstante positive Gauß-Krümmung $K = \frac{1}{r^2}$.

Aufgabe 56
Wir betrachten den *Affensattel*

$$A := \{(x, y, x^3 - 3y^2x) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ein Modell dieser Fläche finden Sie in der Vitrine im Haupteingang von RUD 25.
Zeigen Sie, dass $(0,0,0)$ ein Flachpunkt von A ist und dass alle anderen Punkte von A hyperbolische Punkte sind.