Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 14

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 4.2.

Aufgabe 57 *Die Schnittkrümmung der Hyperflächen aus Aufgabe 34*
Es sei $n = k + l$. Zeigen Sie, dass die Hyperfläche

$$S^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k,l+1} \mid \langle x, x\rangle_{k,l+1} = r^2\} \subset \mathbb{R}^{k,l+1}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,l+1}$ induzierten Metrik g konstante Schnittkrümmung $K = \frac{1}{r^2}$ hat und dass die Hyperfläche

$$H^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k+1,l} \mid \langle x, x\rangle_{k+1,l} = -r^2\} \subset \mathbb{R}^{k+1,l}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k+1,l}$ induzierten Metrik h konstante Schnittkrümmung $K = -\frac{1}{r^2}$ hat.
Tipp: Gehen Sie analog vor, wie bei der Berechnung der Schnittkrümmung der Sphäre im Euklidischen Raum.

Aufgabe 58
Wir betrachten die offene Einheitskugel $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ im $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$h := \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} \cdot (dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2).$$

Zeigen Sie, dass die Riemannsche Mannigfaltigkeit (B^n, h) konstante Schnittkrümmung $K = -1$ hat.

Aufgabe 59
Wir betrachten die Sphäre S^2 mit der induzierten Riemannschen Metrik g (konstante Schnittkrümmung 1) sowie den oberen Halbraum $H^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ mit der Poincare-Metrik h (konstante Schnittkrümmung -1). Zeigen Sie:

a) Jeder 3-dimensionale zusammenhängende Riemannsche Einstein-Raum hat konstante Schnittkrümmung.

b) Die Mannigfaltigkeit $S^2 \times S^2$ mit der Produktmetrik $g \times g$ ist ein Einstein-Raum, hat aber keine konstante Schnittkrümmung.

c) Die Mannigfaltigkeit $S^2 \times H^2$ mit der Produktmetrik $g \times h$ hat konstante Skalarkrümmung, ist aber kein Einstein-Raum.

Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, wie sich der Krümmungstensor R einer Produkt-Mannigfaltigkeit durch die Krümmungstensoren der beiden Faktoren ausdrückt.

Aufgabe 60

Sei (M^n, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und gelte für die Schnittkrümmung

$$K_E(x) = K(x) \qquad \text{für alle 2-dim. nichtausgearteten Unterräume } E \subset T_xM,$$

wobei $K \in C^\infty(M)$. Dann ist die Funktion K konstant.

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass (M, g) ein Einstein-Raum ist.

Hinweis: Für die Aufgaben 59a) und 60 können Sie folgenden Fakt über Einstein-Räume benutzen:
Ist (M, g) ein zusammenhängender Einstein-Raum der Dimension $n \geq 3$ und $Ric = f \cdot g$, dann ist die Funktion f konstant.
Wir werden diesen Satz in der Vorlesung am 4.2. beweisen.