Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 15

Differentialgeometrie I

WS 2018/2019

Besprechung in der Übung am 11.2.

Aufgabe 61 *Der Satz von Noether*
Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Killing-Vektorfeld und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eine Geodäte von (M, g), Zeigen Sie, dass die Funktion

$$t \in I \;\longmapsto\; g_{\gamma(t)}(X(\gamma(t)), \gamma'(t)) \in \mathbb{R}$$

konstant ist.
Tipp: Verwenden Sie die Charakterisierung von Killingfeldern mit Hilfe des Levi-Civita-Zusammenhanges.

Aufgabe 62 *Die Geodäten der Hyperflächen aus Aufgabe 34*
Es sei $n = k + l$. Wir betrachten die Hyperfläche

$$S^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k,l+1} \mid \langle x, x\rangle_{k,l+1} = r^2\} \subset \mathbb{R}^{k,l+1}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k,l+1}$ induzierten Metrik g und die Hyperfläche

$$H^n_k(r) := \{x \in \mathbb{R}^{k+1,l} \mid \langle x, x\rangle_{k+1,l} = -r^2\} \subset \mathbb{R}^{k+1,l}$$

mit der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle_{k+1,l}$ induzierten Metrik h.

a) Bestimmen Sie die maximalen Geodäten der semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(S^n_k(r), g)$ und $(H^n_k(r), h)$.
Tipp: Gehen Sie vor wie in der Vorlesung bei der Sphäre S^n im Euklidischen Raum. Die Bilder der Geodäten durch den Punkt p mit Anfangsvektor v sind hier ebenfalls Schnitte der Hyperfläche mit der Ebene $\mathrm{span}(v, p)$ durch den Ursprung. Überlegen Sie, wie man diese Schnittkurven mit konstanter Durchlaufgeschwindigkeit parametrisieren kann.

b) Skizzieren Sie den Verlauf der raumartigen, der zeitartigen und der isotropen Geodäten durch einen Punkt $p \in H^2_1(1)$.

c) Zeigen Sie, dass für alle Geodäten $\gamma : \mathbb{R} \to H^2_1(1)$ gilt:

$$\langle \gamma(t), \gamma(0)\rangle_{(2,1)} \leq 1 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Folgern Sie daraus, dass es Punkte p und q in $H^2_1(1)$ gibt, die man nicht durch Geodäten verbinden kann.

— bitte wenden —

Aufgabe 63

Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^2$ die Metrik g, gegeben durch

$$g_{(x,y)} := (\cos^4(y) - 1)dx^2 - dx \otimes dy - dy \otimes dx.$$

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, g)$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit ist.

b) Zeigen Sie, dass $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := \left(\frac{1}{t} - t, \arctan(t)\right)$$

eine maximale Geodäte von $(\mathbb{R}^2, g)$ ist.

Aufgabe 64

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ eine glatte reguläre Kurve mit

$$\frac{\nabla^g \gamma'}{dt}(t) = \sigma(t) \cdot \gamma'(t) \qquad \forall\, t \in I,$$

wobei $\sigma : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion ist.
Zeigen Sie, dass γ eine Prägeodäte von (M, g) ist.

Tipp: Um eine geeignete Umparametrisierung von γ zu finden, betrachten Sie die Stammfunktion G von σ, die Stammfunktion h von e^G und dann die Umkehrfunktion von h.