Kapitel 8

Das Riemann–Integral für Funktionen mehrerer reeller Variablen

Dozentin: Prof. Dr. Helga Baum

Nach Vorlesungen im Wintersemester 2007/08

Letzte Korrekturen und Änderungen: 12.04.2008 (Helga Baum)

Inhaltsverzeichnis

8.1 Das Problem der Volumendefinition für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

In Kapitel 7 hatten wir das Riemann-Integral von Funktionen einer Variablen benutzt, um den Flächeninhalt gewisser Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ zu definieren und zu berechnen. Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob man für *jede* Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ ein Volumen $\mu(A)$ definieren kann, so daß eine Reihe vernünftiger Eigenschaften erfüllt sind? Zum Beispiel soll das Volumen einer 'klassischen Fäche' im $\mathbb{R}^2$ ihr geometrischer Flächeninhalt sein und das Volumen eines 'klassischen Körpers' sein geometrisches Volumen. Wir stellen an eine Volumenfunktion μ außerdem die folgenden 'vernünftigen' Forderungen. μ sei eine Funktion

$$\mu: \ A \subset \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow \quad \mu(A) = \text{ Volumen von } A \quad \in \ [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie).

(2) μ ist translationsinvariant, das heißt für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(A + x_0) = \mu(A)$.

(3) Ist $W = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein Würfel im $\mathbb{R}^n$, so gilt $\mu(W) = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

(4) Sind $A_1, A_2, \ldots$ disjunkte Teilmengen, so gilt $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (σ–Additivität).

Satz 8.1 *Es existiert* <u>*keine*</u> *Funktion* $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ *mit den Eigenschaften (1)–(4), das heißt ein* n*–dimensionales Volumen für alle Teilmengen des* $\mathbb{R}^n$ *kann nicht definiert werden.*

Beweis: Angenommen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty]$ wäre eine Abbildung mit den Eigenschaften (1)–(4). Wir betrachten auf dem Würfel $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ folgende Äquivalenzrelation

$$x \sim y \ \Leftrightarrow \ x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

Sei $A \subset [0, 1]^n$ eine Teilmenge des Würfels, die aus jeder dieser Äquivalenzklassen genau ein Element enthält. Wir betrachten die Menge

$$B := \bigcup_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} A + \{r\}.$$

Da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, ist B die Vereinigung abzählbar vieler Mengen.
(1) Ist $r_1 \neq r_2$, so folgt $A + \{r_1\} \cap A + \{r_2\} = \emptyset$, das heißt B ist eine disjunkte Vereinigung. Angenommen es ist $b = a + r_1 = a' + r_2$ für $a, a' \in A$, dann folgt

$$a - a' = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^n \ \Rightarrow \ a \sim a' \ \Rightarrow \ a = a'.$$

Somit ist $r_1 = r_2$, was im Widerspruch zur Annahme steht.
(2) Man sieht leicht ein, dass $[0, 1]^n \subset B \subset [-1, 2]^n$. Wegen der Monotonie von μ gilt dann $1 \leq \mu(B) \leq 3^n$. Wegen der σ–Additivität und Translationsinvarianz gilt dann auch

$$1 \ \leq \ \underbrace{\sum_{r \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n} \mu(A + \{r\})}_{= \sum\limits_{r \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n} \mu(A)} \ \leq \ 3^n.$$

$\mu(A)$ wird dabei unendlich oft summiert. Dies geht nicht für $0 \le \mu(A) \le \infty$, wir haben folglich einen Widerspruch erhalten. $\square$

Ausweg: Man definiert ein "n–dimensionales Volumen" nicht für alle Teilmengen, sondern nur für eine bestimmte Auswahl von Teilmengen.

(1) Jordansches Volumen: $\mu(A)$ wird für bestimmte beschränkte Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert. Dies ist die historisch erste Variante zur Präzisierung des Volumenbegriffes. Zwar ist sie heute überholt, oft aber dennoch sehr praktikabel. Entspechend dem zur Zeit gültigen Studienplan werden wir in Analyis IIIa zunächst diesen Volumenbegriff verwenden.

(2) Lebesgue–Maß: Definition des Volumens für größere Klassen von Teilmengen, z.B. auch für unbeschränkte. (Dies behandeln wir in Analysis IIIb).

8.2 Das Jordansche Volumen

Sei $W = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel. Das Volumen das Würfels definieren wir als

$$vol(W) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

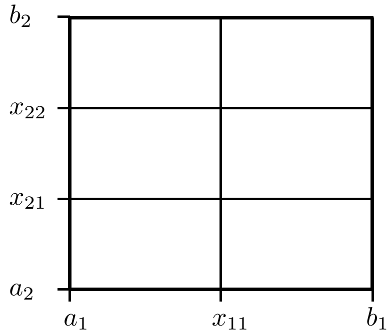
Definition. *Eine Zerlegung des Würfels W ist ein n–Tupel $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ von Zerlegungen $\mathcal{P}_k$ der Intervalls $[a_k, b_k]$.*

Sei $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ eine Zerlegung von W mit $\mathcal{P}_k = \{a_k = x_{k0} < x_{k1} < \ldots < x_{kN_k} = b_k\}$. Durch

$$W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} := [x_{1\alpha_1 - 1}, x_{1\alpha_1}] \times \ldots \times [x_{n\alpha_n - 1}, x_{n\alpha_n}]$$

für $1 \le \alpha_i \le N_i$ werden kleinere Würfel definiert, die W zerlegen. Somit ergibt sich für den Würfel

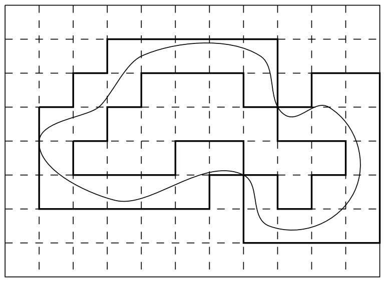
$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{\alpha_1=1}^{N_1} \cdots \bigcup_{\alpha_n=1}^{N_n} W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \\ vol(W) &:= \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} vol(W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}). \end{aligned}$$



Definition. *Die Zerlegung $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_1, \ldots, \mathcal{P}'_n)$ heißt Verfeinerung der Zerlegung $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ von W, falls $\mathcal{P}'_k \ge \mathcal{P}_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Ist $\mathcal{P}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{P}$, so schreibt man $\mathcal{P}' \ge \mathcal{P}$.
Durch eine Verfeinerung wird W weiter in kleinere Würfel durch neue Teilungspunkte zerlegt.

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmenge. Wir wählen einen Würfel $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset W$. Sei $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von W. Dann gilt



$$\overline{S}(A,\mathcal{P}) := \sum_{W_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \cap cl(A) \neq \emptyset} vol(W_{\alpha_1\ldots\alpha_n}),$$
$$\underline{S}(A,\mathcal{P}) := \sum_{W_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \subset Int(A)} vol(W_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n})$$

Dann folgt aus der Definition

- $\underline{S}(A,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(A,\mathcal{P})$.
- Gilt $\mathcal{P}' \geq \mathcal{P}$, so folgt $\underline{S}(A,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(A,\mathcal{P}') \leq \overline{S}(A,\mathcal{P}') \leq \overline{S}(A,\mathcal{P})$.
- Sind $\mathcal{P}, \hat{\mathcal{P}}$ zwei Zerlegungen von W, dann gilt $\underline{S}(A,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(A,\hat{\mathcal{P}})$.

Definition. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmenge und $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel mit $A \subset W$. Dann heißt $\underline{vol}(A) := \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(A,\mathcal{P})$ inneres Volumen von A und $\overline{vol}(A) := \inf_{\mathcal{P}} \overline{S}(A,\mathcal{P})$ äußeres Volumen von A.*

Diese Definition ist offensichtlich unabhängig von der Wahl des Würfels W. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, so gilt

$$0 \leq \underline{vol}(A) \leq \overline{vol}(A) < +\infty.$$

Definition. *Eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan–meßbar, falls $\underline{vol}(A) = \overline{vol}(A)$ gilt. In diesem Fall heißt*

$$vol(A) := \underline{vol}(A) = \overline{vol}(A)$$

das Jordan–Volumen von A.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der beschränkten, Jordan–meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Offensichtlich gilt

- Sind $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ mit $A \subset B$, so gilt $vol(A) \leq vol(B)$.
- Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\overline{vol}(A) = 0$, so ist A Jordan–meßbar und es gilt $vol(A) = 0$.

Definition. *Eine beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt Jordansche Nullmenge, falls $\overline{vol}(A) = 0$.*

Jordansche Nullmengen sind also Jordan–meßbar und haben das Jordan-Volumen 0. Jede Teilmenge einer Jordanschen Nullmenge ist ebenfalls eine Jordansche Nullmenge.

Beispiel: In Kapitel 7 haben wir den Begriff der Lebesgue'schen Nullmenge kennengelernt. Diese beiden Begriffe unterscheiden sich, wie das folgende Beispiel zeigt. Wir betrachten

dazu die Menge $A := \mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R}$. A liegt im 1-dimensionalen Würfel $[0,1]$.
Sei $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ eine Zerlegung von $[0,1]$. Dann gilt

$$cl(A) = [0,1] \cap I_k \neq \emptyset, \quad \text{und} \quad I_k \not\subset \underbrace{Int(A)}_{=\emptyset} \qquad \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Nach Definition folgt dann $\overline{vol}(A) = \sum_{k=1}^{n} vol(I_k) = 1$ und $\underline{vol}(A) = 0$. Folglich ist A keine Jordansche Nullmenge und auch nicht Jordan–meßbar. Da A abzählbar ist, ist A aber eine Lebesgue'sche Nullmenge.

Die folgenden Eigenschaften Jordan–meßbarer Mengen nennen wir (aus Zeitgründen) ohne Beweis. Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Satz 8.2 (Kriterium für Jordan–Meßbarkeit) *Für jede beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\overline{vol}(A) - \underline{vol}(A) = \overline{vol}(\partial A).$$

Insbesondere ist die beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann Jordan–meßbar, wenn der Rand ∂A eine Jordansche Nullmenge ist, das heißt wenn $\overline{vol}(\partial A) = 0$.

Für Jordan-meßbare Mengen kann man mit diesem Kriterium die folgenden Eigenschaften beweisen.

Satz 8.3 *(1) Ist $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel, so ist $W \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.*

(2) Sind $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, so gilt $A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

(3) Gilt $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $A + x_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 8.4 *Das Jordan–Volumen $vol : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty)$ hat folgende Eigenschaften*

(1) $W = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \;\Rightarrow\; vol(W) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

(2) $A \subset B,\ A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \;\Rightarrow\; vol(A) \subset vol(B)$.

(3) vol ist translationsinvariant, das heißt aus $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ folgt $vol(A + x_0) = vol(A)$.

(4) Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ paarweise disjunkte Mengen und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, so ist $vol(A) = \sum_{n=1}^{\infty} vol(A_n)$. (eingeschränkte σ–Additivität).

Folglich definiert das Jordan–Volumen eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow [0, \infty) \\ A &\mapsto vol(A) \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften (1)–(4) aus Abschnitt 8.1.

Zur Berechnung des Volumens Jordan-meßbarer Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ benutzt man das Riemann–Integral für Funktionen mehrerer Veränderlicher, das wir im nächsten Abschnitt einführen wollen.

8.3 Integration beschränkter Funktionen mehrerer Veränderlicher

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel und $f : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$ beschränkt. Sei $\mathcal{P}$ eine Zerlegung des Würfels W mit den Teilwürfeln $W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$. Die Obersumme von f bezüglich $\mathcal{P}$ ist

$$\overline{S}(f, W, \mathcal{P}) := \sum_{W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \sup(f_{|W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}) \cdot vol(W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}).$$

Die Untersumme von f bezüglich $\mathcal{P}$ ist

$$\underline{S}(f, W, \mathcal{P}) := \sum_{W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}} \inf(f_{|W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}) \cdot vol(W_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}).$$

Dann gilt

(1) $\underline{S}(f, W, \mathcal{P}) \le \overline{S}(f, W, \mathcal{P})$.

(2) $\mathcal{P}' \ge \mathcal{P} \Rightarrow \underline{S}(f, W, \mathcal{P}) \le \underline{S}(f, W, \mathcal{P}') \le \overline{S}(f, W, \mathcal{P}') \le \overline{S}(f, W, \mathcal{P})$.

(3) Sind $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ zwei Zerlegungen von W, so ist $\underline{S}(f, W, \mathcal{P}) \le \overline{S}(f, W, \mathcal{P}')$.

Definition. $\underline{\int\limits_{W}} f := \sup\limits_{\mathcal{P}} \underline{S}(f, W, \mathcal{P})$ *heißt unteres Riemann–Integral von f über W,*
$\overline{\int\limits_{W}} f := \inf\limits_{\mathcal{P}} \overline{S}(f, W, \mathcal{P})$ *heißt oberes Riemann–Integral von f über W.*

Aus der Eigenschaft (3) folgt die Existenz des oberen und des unteren Riemann–Integrals und die Ungleichung

$$\underline{S}(f, W, \mathcal{P}) \;\le\; \underline{\int\limits_{W}} f \;\le\; \overline{\int\limits_{W}} f \;\le\; \overline{S}(f, W, \mathcal{P}).$$

Definition. *Eine beschränkte Funktion $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann–integrierbar über W, falls*

$$\underline{\int\limits_{W}} f = \overline{\int\limits_{W}} f.$$

Diese Zahl heißt Riemann–Integral von f über W und wird mit

$$\int\limits_{W} f = \int\limits_{W} f(x)\, dx$$

bezeichnet. Dabei ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Mit $\mathcal{R}(W; \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Riemann–integrierbaren Funktionen über dem Würfel W. Aus der Definition folgt dann unmittelbar

Satz 8.5 (Riemannsches Integrierbarkeitskriterium) *Sei W ein Würfel im $\mathbb{R}^n$. Eine beschränkte Funktion $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann–integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{P}$ von W existiert, so daß*

$$\overline{S}(f, W, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, W, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Wir beweisen in den folgenden Sätzen wichtige Eigenschaften für das Riemann-Integral.

Satz 8.6 *Sei W ein Würfel im $\mathbb{R}^n$, $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann–integrierbar und $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $h \circ f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann–integrierbar.*

Beweis: Da f beschränkt ist, existiert ein $m \in \mathbb{R}$, so daß gilt $f(W) \subset [-m, m]$. Da $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $[-m, m]$ kompakt ist, ist h gleichmäßig stetig auf $[-m, m]$. Das heißt, für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $t, s \in [-m, m]$ gilt

$$|t - s| < \delta \;\Rightarrow\; |h(t) - h(s)| < \varepsilon \quad (*).$$

Sei $K := \sup\{|h(t)| \mid t \in [-m, m]\}$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f \in \mathcal{R}(W, \mathbb{R})$, existiert eine Zerlegung $\mathcal{P}$ von W mit

$$\underline{S}(f, W, \mathcal{P}) > \int\limits_W f - \frac{\delta^2}{2}, \quad \overline{S}(f, W, \mathcal{P}) < \int\limits_W f + \frac{\delta^2}{2},$$

wobei $\delta > 0$ aus $(*)$ mit $\delta < \varepsilon$ gewählt wurde. Folglich gilt nach Definition von $\mathcal{P}$

$$\overline{S}(f, W, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, W, \mathcal{P}) = \sum_{W^* \in \mathcal{P}} (\sup(f_{|W^*}) - \inf(f_{|W^*})) \cdot vol(W^*) < \delta^2,$$

wobei W^* die Teilwürfel von W bezeichnen. Wir unterteilen nun $\mathcal{P}$ in zwei Familien von Würfeln

$$\mathcal{P}_1 = \{W^* \in \mathcal{P} \mid \sup(f_{|W^*}) - \inf(f_{|W^*}) < \delta\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{W^* \in \mathcal{P} \mid \sup(f_{|W^*}) - \inf(f_{|W^*}) \geq \delta\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta \cdot \sum_{W^* \in \mathcal{P}_2} vol(W^*) &\leq \sum_{W^* \in \mathcal{P}_2} (\sup(f_{|W^*}) - \inf(f_{|W^*})) \cdot vol(W^*) \\ &\leq \sum_{W^* \in \mathcal{P}} (\sup(f_{|W^*}) - \inf(f_{|W^*})) \cdot vol(W^*) < \delta^2. \end{aligned}$$

Also ist $\sum\limits_{W^* \in \mathcal{P}_2} vol(W^*) < \delta$. Ist $W^* \in \mathcal{P}_1$, so folgt aus $(*)$

$$\sup(h \circ f_{|W^*}) - \inf(h \circ f_{|W^*}) < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \overline{S}(h \circ f, W, \mathcal{P}) - \underline{S}(h \circ f, W, \mathcal{P}) &= \sum_{W^* \in \mathcal{P}_1} (\sup(h \circ f_{|W^*}) - \inf(h \circ f_{|W^*})) \cdot vol(W^*) \\ &\quad + \sum_{W^* \in \mathcal{P}_2} (\sup(h \circ f_{|W^*}) - \inf(h \circ f_{|W^*})) \cdot vol(W^*) \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{W^* \in \mathcal{P}_1} vol(W^*) + 2 \cdot K \cdot \delta \leq \varepsilon \cdot \underbrace{(vol(W) + 2K)}_{\text{konst.}}. \end{aligned}$$

Also existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{P}$ von W, so daß

$$\overline{S}(h \circ f, W, \mathcal{P}) - \underline{S}(h \circ f, W, \mathcal{P}) < \varepsilon \cdot (vol(W) + 2K).$$

Somit ist $h \circ f$ Riemann–integrierbar. $\square$

Satz 8.7 *Seien* $f, g : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkte, Riemann–integrierbare Funktionen auf einem Würfel* W. *Dann gilt*

(1) Für reelle Zahlen λ_1 *und* λ_2 *ist die Funktion* $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ *ebenfalls Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\lambda_1 \int\limits_W f(x)\,dx + \lambda_2 \int\limits_W g(x)\,dx = \int\limits_W (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,dx.$$

(2) Das Produkt $f \cdot g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist Riemann–integrierbar.*

(3) $|f| : W \longrightarrow [0, \infty)$ *ist Riemann–integrierbar und es gilt*

$$|\int\limits_W f| \;\leq\; \int\limits_W |f|.$$

(4) Ist $f \leq g$, *so gilt* $\int\limits_W f \leq \int\limits_W g$.

Beweis: (1) Seien $f, g \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$. Es genügt $f + g$ und $c \cdot f \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f+g, W, \mathcal{P}) \;&=\; \sum_{W^* \in \mathcal{P}} \inf(f + g_{|W^*}) \cdot vol(W^*) \\
&\geq\; \sum_{W^* \in \mathcal{P}} (\inf f_{|W^*} + \inf g_{|W^*}) \cdot vol(W^*) = \underline{S}(f, W, \mathcal{P}) + \underline{S}(g, W, \mathcal{P}).
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\overline{S}(f+g, W, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, W, \mathcal{P}) + \overline{S}(g, W, \mathcal{P})$ und es folgt somit

$$\underline{\int\limits_W} f + \underline{\int\limits_W} g \leq \underline{\int\limits_W} f + g \leq \overline{\int\limits_W} f + g \leq \overline{\int\limits_W} f + \overline{\int\limits_W} g.$$

Da f und g Riemann–integrierbar sind, folgt

$$\underline{\int\limits_W} f + g = \overline{\int\limits_W} f + g, \quad \text{also } f + g \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R}).$$

Desweiteren gilt $\underline{S}(cf, W, \mathcal{P}) = c \cdot \underline{S}(f, W, \mathcal{P})$ und $\overline{S}(cf, W, \mathcal{P}) = c \cdot \overline{S}(f, W, \mathcal{P})$ für $c \geq 0$. Also ist

$$\underline{\int\limits_W} cf = c \underline{\int\limits_W} f \;\text{ und }\; \overline{\int\limits_W} cf = c \overline{\int\limits_W} f$$

und folglich $cf \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$. Für $c < 0$ ergibt sich durch analoge Rechnung ebenfalls $cf \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$.

(2) Es gilt $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. Da $f, g \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$ ist und $h(x) = x^2$ stetig ist, folgt aus (1) und Satz 8.6, daß $f \cdot g$ Riemann–integrierbar ist.

(3) $x \mapsto |x|$ ist stetig. Da $f \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$ ist, folgt mit Satz 8.6, daß $|f| \in \mathcal{R}(W;\mathbb{R})$ gilt. Der Rest der Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

Der folgende Satz zeigt, wie man das Volumen einer Jordan-meßbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch das Riemann-Integral ausdrücken kann.

Satz 8.8 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan–meßbare Menge und W ein Würfel im $\mathbb{R}^n$, der A enthält. Mit $\chi_A : W \longrightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir die charakteristische Funktion von A, das heißt die Funktion*

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist χ_A ist über W Riemann–integrierbar und es gilt

$$\int\limits_W \chi_A = vol(A).$$

Beweis: Sei $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von W. Dann gilt

$$\overline{S}(\chi_A, W, \mathcal{P}) = \sum_{W^* \in \mathcal{P}} \sup(\chi_A|_{W^*}) vol(W^*) = \sum_{W^* \cap A \neq \emptyset} vol(W^*) \leq \sum_{W^* \cap \overline{A} \neq \emptyset} vol(W^*) = \overline{S}(A, \mathcal{P}),$$

$$\underline{S}(\chi_A, W, \mathcal{P}) = \sum_{W^* \in \mathcal{P}} \inf(\chi_A|_{W^*}) vol(W^*) = \sum_{W^* \subset A} vol(W^*) \geq \sum_{W^* \subset Int(A)} vol(W^*) = \underline{S}(A, \mathcal{P}).$$

Somit gilt $\underline{S}(A, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\chi_A, W, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(\chi_A, W, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(A, \mathcal{P})$ und folglich

$$\begin{aligned} \underline{vol}(A) = \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(A, \mathcal{P}) \leq \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(\chi_A, W, \mathcal{P}) &= \underline{\int\limits_W} \chi_A \\ &\leq \overline{\int\limits_W} \chi_A = \inf_{\mathcal{P}} \overline{S}(\chi_A, W, \mathcal{P}) \leq \inf_{\mathcal{P}} \overline{S}(A, \mathcal{P}) = \overline{vol}(A). \end{aligned}$$

Da A Jordan–meßbar ist, gilt $\underline{vol}(A) = \overline{vol}(A) = vol(A)$ und somit

$$\underline{\int\limits_W} \chi_A = \overline{\int\limits_W} \chi_A = \int\limits_W \chi_A = vol(A).$$

□

Definition. *Sei $A \subset W$ Jordan–meßbar und $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar. Nach den Sätzen 8.7 und 8.8 ist $\chi_A \cdot f$ Riemann–integrierbar. Unter dem Integral von f über A verstehen wir die Zahl*

$$\int\limits_A f(x)\, dx := \int\limits_W (f \cdot \chi_A)(x)\, dx.$$

Insbesondere gilt für das Volumen einer Jordan-meßbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^n$

$$vol(A) = \int\limits_A 1\, dx.$$

Die Rechenregeln von Satz 8.7 gelten auch für das Integral über A. Für des mehrdimensionale Riemann-Integral gelten analoge Eigenschaften, wie wir sie in Kapitel 7 bereits für das Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen bewiesen haben.

Das Lebesguesche Integrierbarkeitskriterium

Definition. *$A \subset \mathbb{R}^n$ hat das Lebesgue–Maß Null ($\mu(A) = 0$), wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $W_1, W_2, \ldots \in \mathbb{R}^n$ existiert, so daß*

(1) $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Int(W_n)$,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} vol(W_n) < \varepsilon$.

Die folgenden Aussagen überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

- Ist $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eine Folge von L–Nullmengen, so gilt $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.
- Jede abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ hat Lebesgue–Maß Null.
- Ist $H \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, so ist $\mu(H) = 0$.
- Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und vom Lebesgue–Maß Null, so ist A Jordansche Nullmenge.

Satz 8.9 (Lebesguesches Integrierbarkeitskriterium)
Eine beschränkte Funktion $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann–integrierbar über W, falls die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Lebesgue–Maß Null hat.

Beweis: Analog zum eindimensionalen Fall. □

Folgerung *Ist $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und hat f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, so ist f Riemann–integrierbar.*

Satz 8.10 *Seien $f_n : W \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann–integrierbare Funktionen, $n \in \mathbb{N}$, und konvergiere die Funktionenfolge (f_n) gleichmäßig gegen f. Dann ist f Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_W f_n(x)\,dx = \int\limits_W f(x)\,dx.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in W$

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Also gilt für jede Zerlegung $\mathcal{P}$ von W und alle $n \geq n_0$

$$\overline{S}(f, W, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f_n, W, \mathcal{P}) + \varepsilon \cdot vol(W), \quad \underline{S}(f, W, \mathcal{P}) \geq \underline{S}(f_n, W, \mathcal{P}) - \varepsilon \cdot vol(W).$$

Da f_n Riemann–integrierbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\overline{\int\limits_W} f \leq \int\limits_W f_n + \varepsilon \cdot vol(W), \quad \int\limits_{\overline{W}} f \geq \int\limits_W f_n - \varepsilon \cdot vol(W) \quad \forall n \geq n_0 \quad (*)$$

und wir erhalten

$$0 \leq \overline{\int\limits_W} f - \int\limits_{\overline{W}} f \leq 2\varepsilon \cdot vol(W) \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ also } \overline{\int\limits_W} f = \int\limits_{\overline{W}} f.$$

Folglich ist f Riemann–integierbar. Aus $(*)$ folgt weiterhin

$$\int\limits_W f_n - \varepsilon \cdot vol(W) \leq \int\limits_W f \leq \int\limits_W f_n + \varepsilon \cdot vol(W) \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

$$\Rightarrow \qquad |\int\limits_W f - \int\limits_W f_n| \leq 2\varepsilon \cdot vol(W) \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon).$$

Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_W f_n = \int\limits_W f$. $\square$

Folgerung *Sind* $f_1, f_2, \ldots : W \longrightarrow \mathbb{R}$ *Riemann–integrierbar und ist* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *gleichmäßig konvergent, so ist* f *Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_W f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_W f_n(x)\,dx.$$

Satz 8.11 (Mittelwertsatz) *Sei* $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,* $g : W \longrightarrow \mathbb{R}$ *Riemann–integrierbar und* $g \geq 0$. *Dann existiert ein* $x_0 \in W$ *mit*

$$\int\limits_W f(x)g(x)\,dx = f(x_0) \int\limits_W g(x)\,dx.$$

Insbesondere existiert ein $y_0 \in W$ *mit*

$$\int\limits_W f(x)\,dx = f(y_0) \cdot vol(W).$$

Beweis: Analog zum eindimensionalen Fall. $\square$

In den folgenden beiden Abschnitten werden wir Methoden kennenlernen, mit denen man die Berechnung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals auf die Berechnung des Integrals im 1-dimensionalen Fall zurückführen kann. Die Methoden für letzteres haben wir in Kapiel 7 behandelt.

8.4 Der Satz von Fubini

Satz 8.12 (Satz von Fubini (Spezialfall))
Seien $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ *und* $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ *Würfel im* $\mathbb{R}^n$ *bzw. im* $\mathbb{R}^m$. *Dann ist* $W_1 \times W_2$ *ein Würfel im* $\mathbb{R}^{n+m}$. *Sei weiterhin* $f : W_1 \times W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine beschränkte, Riemann–integrierbare Funktion,* $x \in W_1$ *fixiert und* $g_x : W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert durch* $g_x(y) := f(x, y)$. *Wir setzen*

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(x) &:= \int\limits_{\underline{W_2}} g_x(y)\,dy = \int\limits_{\underline{W_2}} f(x,y)\,dy, \\
\mathcal{O}(x) &:= \overline{\int\limits_{W_2}} g_x(y)\,dy = \overline{\int\limits_{W_2}} f(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

Dann sind die Funktionen $\mathcal{U}, \mathcal{O} : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{W_1 \times W_2} f &= \int\limits_{W_1} \mathcal{U}(x)\,dx = \int\limits_{W_1} \Big(\int\limits_{\underline{W_2}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx, \\
\int\limits_{W_1 \times W_2} f &= \int\limits_{W_1} \mathcal{O}(x)\,dx = \int\limits_{W_1} \Big(\overline{\int\limits_{W_2}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.
\end{aligned}$$

Bevor wir den Satz von Fubini beweisen, machen wir zunächst noch einige Bemerkungen zu diesem Satz.

Bemerkung 1: Ist $f : W_1 \times W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann–integrierbar, so muß $g_x : W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ nicht unbedingt Riemann–integrierbar sein. Das heißt, man kann $\underline{\int}_{W_2} g_x$ und $\overline{\int}_{W_2} g_x$ im allgemeinen nicht durch $\int_{W_2} g_x$ ersetzen. Wir betrachen dazu das folgende Beispiel.
Sei $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 1 & x \text{ rational, } y \text{ irrational} \\ 1 - \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q},\ y \text{ rational,} \end{cases}$$

wobei p und q teilerfremd sind. Die Menge $A = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1])$ ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Da A das Lebesgue–Maß Null hat, ist f Riemann-integierbar. Ist nun x irrational, so ist $g_x \equiv 1$ und somit Riemann–integrierbar. Ist andererseits x rational, so ist

$$g_x(y) = \begin{cases} 1 & y \text{ irrational} \\ \underbrace{1 - \dfrac{1}{q}}_{\text{konst.}} & x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1,\ y \text{ rational.} \end{cases}$$

Folglich ist g_x (auch Dirichlet–Funktion genannt) in keinem Punkt stetig und somit nicht Riemann–integrierbar. Es gilt aber

$$\mathcal{U}(x) = \underline{\int_0^1} g_x(y)\,dy = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 1 - \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q},\ (p,q) = 1. \end{cases}$$

Somit ist $\mathcal{U}$ Riemann–integrierbar, da die Menge der Unstetigkeitsstellen $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ entspricht. Es gilt nun

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f \;=\; \int_0^1 \mathcal{U}(x)\,dx \;=\; \inf_{\mathcal{P}}\{\overline{S}(U,\mathcal{P})\} \;=\; \inf_{\mathcal{P}} \sum_k \underbrace{\sup(f_{|I_k})}_{=1} L(I_k) \;=\; \inf_{\mathcal{P}} L([0,1]) \;=\; 1.$$

Bemerkung 2: Ist $f : W_1 \times W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $g_x(y) := f(x,y)$ stetig und folglich auch Riemann–integrierbar. Somit gilt

$$\mathcal{U}(x) \;=\; \underline{\int}_{W_2} g_x(y)\,dy \;=\; \int_{W_2} f(x,y)\,dy \;=\; \overline{\int}_{W_2} g_x(y)\,dy \;=\; \mathcal{O}(x),$$

also

$$\int_{W_1\times W_2} f(x,y) \;=\; \int_{W_1} \Big(\int_{W_2} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$

Ist $f : W = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so folgt durch mehrmaliges Anwenden dieser Bemerkung die folgende iterierte Formel für die Integralberechnung:

$$\int_W f(x)\,dx \;=\; \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n \right) dx_{n-1} \ldots \right) dx_1.$$

Dies ist die Formel für das iterierte Integral. In diesem Fall kann man das Integral von f also sehr einfach auf das Integral für Funktionen einer Variablen zurückführen und berechnen.

Beweis des Satzes von Fubini: Sei $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ eine Zerlegung von W_1 mit den Teilwürfeln $W^*, \tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{\mathcal{P}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{P}}_m)$ eine Zerlegung von W_2 mit den Teilwürfeln W^{**}. Dann ist $\mathcal{Q} := (\mathcal{P}, \tilde{\mathcal{P}})$ eine Zerlegung von $W_1 \times W_2$ mit den Teilwürfeln $W^* \times W^{**}$ und es gilt

$$\underline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}) = \sum_{W^* \in \mathcal{P},\ W^{**} \in \tilde{\mathcal{P}}} \inf(f_{|W^* \times W^{**}}) vol(W^*) vol(W^{**}).$$

Ist $x \in W^*$, so gilt $\inf(f_{|W^* \times W^{**}}) \leq \inf(g_x|_{W^{**}})$. Für festes W^* und $x \in W^*$ gilt nun

$$\sum_{W^{**} \in \tilde{\mathcal{P}}} \inf(f_{|W^* \times W^{**}}) vol(W^{**}) \leq \sum_{W^{**} \in \tilde{\mathcal{P}}} \inf(g_x|_{W^{**}}) vol(W^{**}) = \underline{S}(g_x, W_2, \tilde{\mathcal{P}}) \leq \underline{\int_{W_2}} g_x = \mathcal{U}(x).$$

Daraus folgt

$$\sum_{W^{**} \in \tilde{\mathcal{P}}} \inf(f_{|W^* \times W^{**}}) vol(W^{**}) \leq \inf\{\mathcal{U}(x) \mid x \in W^*\}, \quad \text{also}$$

$$\underline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}) \leq \sum_{W^* \in \mathcal{P}} \inf\{\mathcal{U}_{|W^*}\} vol(W^*) = \underline{S}(\mathcal{U}, W_1, \mathcal{P}) \quad (*).$$

Analog zeigt man, daß $\overline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}) \geq \overline{S}(\mathcal{O}, W_1, \mathcal{P})$ $(**)$. Somit erhalten wir

$$\underline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}) \overset{(*)}{\leq} \underline{S}(\mathcal{U}, W_1, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\mathcal{O}, W_1, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(\mathcal{O}, W_1, \mathcal{P}) \overset{(**)}{\leq} \overline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}).$$

Da f auf $W_1 \times W_2$ integrierbar ist, folgt

$$\int_{W_1 \times W_2} f = \sup_{\mathcal{Q}} \underline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}) = \inf_{\mathcal{Q}} \overline{S}(f, W_1 \times W_2, \mathcal{Q}).$$

Da $\sup \underline{S}(\mathcal{U}, W_1, \mathcal{P}) = \inf \overline{S}(\mathcal{O}, W_1, \mathcal{P}) = \inf \overline{S}(\mathcal{U}, W_1, \mathcal{P})$ ist, gilt

$$\sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(\mathcal{U}, W_1, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \overline{S}(\mathcal{U}, W_1, \mathcal{P}) = \int_{W_1 \times W_2} f \quad \text{und} \quad \sup_{\mathcal{P}} \underline{S}(\mathcal{O}, W_1, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \overline{S}(\mathcal{O}, W_1, \mathcal{P}) = \int_{W_1 \times W_2} f.$$

Folglich sind $\mathcal{U}, \mathcal{O} : W_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar und es gilt

$$\int_{W_1 \times W_2} f = \int_{W_1} \mathcal{U}(x)\, dx = \int_{W_1} \mathcal{O}(x)\, dx = \int_{W_1} (\underline{\int_{W_2}} f(x,y)\, dy)\, dx = \int_{W_1} (\overline{\int_{W_2}} f(x,y)\, dy)\, dx.$$

□

Offensichtlich gilt der gleiche Beweis, wenn man die Rollen von W_1 und W_2 vertauscht. Wir erhalten deshalb

Folgerung 1 *Ist $f : W_1 \times W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar, so gilt*

$$\int_{W_1 \times W_2} f \;=\; \int_{W_1} \left(\underline{\int_{W_2}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{W_2} \left(\overline{\int_{W_1}} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

$$\int_{W_1 \times W_2} f \;=\; \int_{W_1} \left(\overline{\int_{W_2}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{W_2} \left(\underline{\int_{W_1}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Ist insbesondere $f : W_1 \times W_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

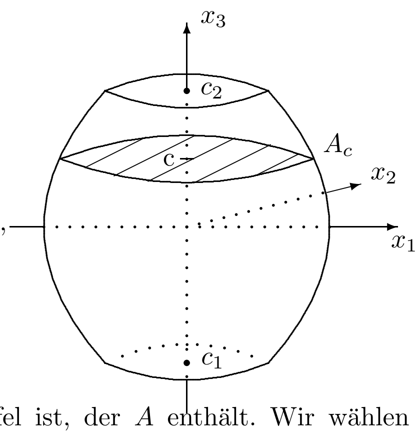
$$\int\limits_{W_1\times W_2} f = \int\limits_{W_1} \left(\int\limits_{W_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_{W_2} \left(\int\limits_{W_1} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

das heißt $\int\limits_{W_1\times W_2} f$ kann durch die iterierten Integrale berechnet werden, wobei die Reihenfolge der Integration beliebig ist.

Folgerung 2 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan–meßbare Teilmenge, $c \in \mathbb{R}$ und die Menge*

$$A_c := \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \mid (x_1,\dots,x_{n-1},c) \in A\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

Jordan–meßbar für alle $c \in \mathbb{R}$ (oder $\emptyset$).



Sei $f : A \subset W_1 \times [c_1, c_2] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_{c_1}^{c_2} \left(\int\limits_{A_c} f(x_1,\dots,x_{n-1},c)\, dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dc,$$

wobei $[c_1, c_2] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, so daß $A_c = \emptyset$ für alle $c \notin [c_1, c_2]$.

Beweis: Sei $\int\limits_A f(x)\, dx := \int\limits_W \chi_A f$, wobei W ein Würfel ist, der A enthält. Wir wählen $W = W_1 \times [c_1, c_2]$, $W_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ als den Würfel, der alle A_c enthält. Mit Satz 8.12 folgt dann

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_{W_1\times[c_1,c_2]} (\chi_A f)(x)\, dx = \int\limits_{c_1}^{c_2} (\int\limits_{W_1} (\chi_A f)(y,c)\, dy)\, dc,$$

wobei $y = (x_1,\dots,x_{n-1})$. Es ist $y \in A_c$ genau dann, wenn $(y,c) \in A$. Somit gilt $\chi_A(y,c) = \chi_{A_c}(y)$ und wir erhalten

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_{c_1}^{c_2} (\int\limits_{W_1} \chi_{A_c}(y) f(y,c)\, dy)\, dc = \int\limits_{c_1}^{c_2} (\int\limits_{A_c} f(y,c)\, dy)\, dc$$

□

Folgerung 3 (Das Prinzip von Cavalieri)
Insbesondere gilt unter den Voraussetzungen der vorhergehenden Folgerung

$$vol(A) = \int\limits_{c_1}^{c_2} vol(A_c)\, dc.$$

Beispiel 1: Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f : [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) := x^2 + y^4 \end{aligned}$$

und berechnen das Integral von f über $[0,1]\times[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f &= \int\limits_0^1 (\int\limits_0^1 (x^2+y^4)\,dx)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 ((\frac{1}{3}x^3+y^4x)|_0^1)\,dy \\
&= \int\limits_0^1 (\frac{1}{3}+y^4)\,dy \\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{5} \;=\; \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Beispiel 2: Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned}
f : A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,y) &\longmapsto f(x,y) = x+y.
\end{aligned}$$

Der Rand von A, die Menge $\partial A = \{(x,y) \mid f(x,y) = x^2+y^2-1 = 0\} = S^1$, ist eine kompakte Hyperfläche im $\mathbb{R}^2$. Somit ist ∂A kompakt, vom Lebesgue–Maß Null und damit Jordansche Nullmenge. Also ist A Jordan–meßbar und wir können rechnen

$$\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^1 (\int\limits_{A_c} f(x,c)\,dx)\,dc.$$

Da

$$A_c = \{x\in\mathbb{R} \mid x^2+c^2\le 1\} = [-\sqrt{1-c^2},\sqrt{1-c^2}]$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy &= \int\limits_{-1}^1 (\int\limits_{-\sqrt{1-c^2}}^{\sqrt{1-c^2}} (x+c)\,dx)\,dc \\
&= \int\limits_{-1}^1 (\frac{1}{2}x^2+cx|_{-\sqrt{1-c^2}}^{\sqrt{1-c^2}})\,dc \\
&= \int\limits_{-1}^1 2c\sqrt{1-c^2}\,dc \\
&= \underbrace{2\int\limits_{-1}^0 c\sqrt{1-c^2}\,dc}_{2\int_0^1 \hat{c}\sqrt{1-\hat{c}^2}\,d\hat{c}} + 2\int\limits_0^1 c\sqrt{1-c^2}\,dc \;=\; 0.
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Seien $A\subset\mathbb{R}^n$ Jordan–meßbar, $f : A\longrightarrow[0,\infty)$ Riemann–integrierbar und

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid x\in A,\ 0\le y\le f(x)\}.$$

Dann gilt

$$vol(B) = \int_A f(x)\,dx.$$

Nach Definition ist

$$vol(B) = \int\limits_{W_1\times[0,\sup f]} \chi_B(x,y)\,dx\,dy = \int_{W_1} \Big(\int_0^{\sup f} \chi_B(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

Es gilt

$$\chi_B(x,y) = \begin{cases} 1 & y\in[0,f(x)],\ x\in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \chi_A(x) & y\in[0,f(x)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

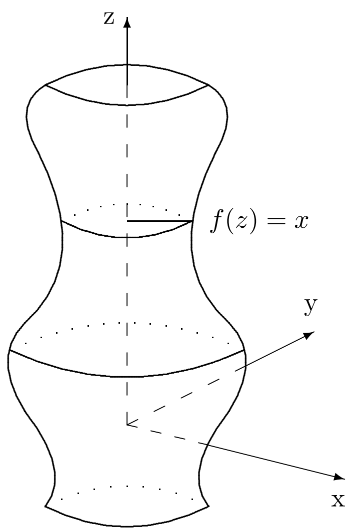
Darau folgt

$$vol(B) = \int_{W_1} \Big(\int_0^{f(x)} \underbrace{\chi_A(x)}_{\text{konst.}}\,dy\Big)\,dx = \int_{W_1} \chi_A(x)\cdot f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx.$$

Beispiel 4: Das Volumen von Rotationskörpern im $\mathbb{R}^3$.

Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^1$ nichtnegativ und Riemann–integrierbar. Wir betrachten in der (x,z)–Ebene den Graphen der Funktion $x=f(z)$ und rotieren diese Kurve um die z–Achse. Die Menge V_f, die von der dabei entstehenden Fläche eingeschlossen wird, heißt der von f erzeugte Rotationskörper. Es ist $(x,y,z)\in V_f$ genau dann, wenn $z\in[a,b]$ und $x^2+y^2\le f^2(z)$. So erhalten wir das Volumen des Rotationskörpers V_f als

$$vol(V_f) = \int_{V_f} 1 = \int_a^b \Big(\int\limits_{x^2+y^2\le f^2(z)} 1\,dx\,dy\Big)\,dz = \pi\int_a^b f^2(z)\,dz.$$



Beispiel 5: Sei $f: W=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]\longrightarrow\mathbb{R}$ eine stetige Funktion der Form

$$f(x_1,\ldots,x_n) = h_n(x_1)\cdot\ldots\cdot h_n(x_n).$$

Dann gilt

$$\int_W f = \Big(\int_{a_1}^{b_1} h_1(x)\,dx\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\int_{a_n}^{b_n} h_n(x)\,dx\Big)$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_W f &= \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_n}^{b_n}(\underbrace{h_1(x_1)\cdot\ldots\cdot h_{n-1}(x_{n-1})}_{\text{konst.}}\cdot h_n(x_n))\,dx_n\Big)\ldots dx_1 \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\ldots\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}(h_1(x_1)\cdot\ldots\cdot h_{n-1}(x_{n-1})\cdot\int_{a_n}^{b_n} h_n(x_n)\,dx_n)\,dx_{n-1}\ldots dx_1.\end{aligned}$$

Durch mehrmaliges Wiederholen erhalten wir die Behauptung. □

8.5 Koordinatentransformation für Riemann-Integrale

Satz 8.13 *Sei $\phi : U_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1–Diffeomorphismus (d.h. eine Koordinatentransformation) zwischen den offenen Mengen U_1 und U_2. Sei weiterhin $A \subset U_1$ Jordan–meßbar und $f : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\phi(A)$ Jordan-messbar und es gilt*

$$\int\limits_{\phi(A)} f(y)\, dy = \int\limits_{A} f(\phi(x)) \cdot |det D\phi(x)|\, dx.$$

Beweis: erfolgt in Analysis IIIb im allgemeineren Kontext für Lebesgue–Integrale.

Diese Formel verallgemeinert die Substitutionsregel für Integrale für Funktionen einer Variablen: Sei $\phi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ ein C^1–Diffeomorphismus. Wir führen die Substitution $y = \phi(x),\ dy = \phi'(x)\, dx$ durch und wissen $D\phi(x) = \phi'(x)$. Damit folgt

$$\int\limits_c^d f(y)\, dy = \int\limits_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(x))\phi'(x)\, dx.$$

Es ist entweder $\phi'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ oder $\phi'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, denn ϕ ist stetig und $\phi'(x) \neq 0$, da ϕ Diffeomorphismus ist. Ist also $\phi'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, so ist ϕ monoton wachsend und es gilt $\phi^{-1}(c) = a,\ \phi^{-1}(d) = b$. Ist $\phi'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$. so ist ϕ monoton fallend und es gilt $\phi^{-1}(c) = b,\ \phi^{-1}(d) = a$. Folglich erhalten wir

$$\int\limits_c^d f(y)\, dy = \int\limits_a^b f(\phi(x)) \cdot |\phi'(x)|\, dx = \int\limits_a^b f(\phi(x)) \cdot |det D\phi(x)|\, dx.$$

In den folgenden Beispielen demonstrieren wir die Anwendung der Transformationsformel.

Beispiel 1: Wir berechnen das Volumen der Kugel im $\mathbb{R}^n$ vom Radius R. Die Kugel wird beschrieben durch

$$D^n(R) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq R^2\}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$.

$$vol(D^2(R)) := \int\limits_{D^2(R)} 1.$$

Wir beschreiben $D^2(R)$ durch Polarkoordinaten bis auf eine Menge vom Maß Null. Sei dazu

$$\begin{aligned} g : U_1 = (0, R) \times (0, 2\pi) \ &\longrightarrow\ U_2 \ = \ D^2(R) \backslash (A := S_R^1 \cup \mathbb{R}^+) \\ (r, \phi) \ &\mapsto\ g(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi). \end{aligned}$$

Dann ist $g : U_1 \longrightarrow U_2$ ein Diffeomorphismus und beschreibt die Polarkoordinatentransformation. A ist eine Menge vom Lebesgue–Maß Null und es gilt $D^2(R) = U_2 \cup A$. Folglich gilt

$$\int\limits_{D^2(R)} f = \int\limits_{D^2(R)\backslash A} f$$

und somit

$$vol(D^2(R)) = \int\limits_{U_2} 1 = \int\limits_{g(U_1)} 1 = \int\limits_{U_1} |detDg(x)|\, dx.$$

Wir berechnen nun die Jacobi-Matrix von g:

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$detDg(r,\phi) = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

und folglich ist

$$vol(D^2(R)) = \int\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} r\, d\phi\, dr = \int\limits_0^R (\int\limits_0^{2\pi} r\, d\phi)\, dr = \int\limits_0^R 2\pi r\, dr = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

Zur Berechnung des Volumens der n-dimensionalen Kugel $D^n(R)$ benutzen wir analog Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1}, \\
x_2 &= r\sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1}, \\
x_3 &= r\sin\phi_2 \cdot \cos\phi_3 \cdot \ldots \cdot \cos\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1}, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= r\sin\phi_{n-2} \cdot \cos\phi_{n-1} \\
x_n &= r\sin\phi_{n-1},
\end{aligned}$$

wobei $0 < r < \infty,\ 0 < \phi_1 < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \phi_k < \frac{\pi}{2}$ für alle $k \in \{2, \ldots, n-1\}$. Sei nun

$$g : U_1 = (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^{n-2} \longrightarrow U_2 = \mathbb{R}^n \backslash A$$

der Diffeomorphismus, der obige Polarkoordinatentransformation beschreibt. Im folgenden zeigen wir durch Induktion über die Dimension n, daß

$$|detDg(r,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1})| = r^{n-1} \cdot \cos\phi_2 \cdot \cos^2\phi_3 \cdot \ldots \cdot \cos^{n-2}\phi_{n-1}. \quad (*)$$

Ind.–Anfang: Im Fall $n = 2$ erhalten wir

$$|detDg(r,\phi_1)| = r$$

und für $n = 3$ gilt

$$Dg(r,\phi_1,\phi_2) = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 & -r \cdot \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 & -r \cdot \cos\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \\ \sin\phi_1 \cdot \cos\phi_2 & r \cdot \cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2 & -r \cdot \sin\phi_1 \cdot \sin\phi_2 \\ \sin\phi_2 & 0 & r \cdot \cos\phi_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
det\, Dg(r,\phi_1,\phi_2) &= r^2(\cos^2\phi_1\cos^3\phi_2 + \sin^2\phi_1\sin^2\phi_2\cos\phi_2 + \cos^2\phi_1\sin^2\phi_2\cos\phi_2 \\
&\quad + \sin^2\phi_1\cos^3\phi_2) \\
&= r^2(\cos^3\phi_2 + \sin^2\phi_2\cos\phi_2) = r^2(\cos\phi_2(\cos^2\phi_2 + \sin^2\phi_2)) \\
&= r^2\cos\phi_2.
\end{aligned}$$

Da der Induktionsanfang für $n = 2$ und $n = 3$ richtig ist, genügt es $(*)$ für $n + 2$ zu zeigen unter der Annahme, daß $(*)$ für alle $k \leq n$ wahr ist. (Übungsaufgabe)

Wir konstruieren nun eine Rekursionsformel für das Volumen $vol(D^n(R))$. Es gilt

$$\begin{aligned}
vol(D^n(R)) &= \int\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^{n-2}} |detDg(r,\phi_1,\ldots,\phi_{n-1})|\,dr\ldots d\phi_{n-1} \\
&= \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^{n-1}\cos\phi_2 \cdot \ldots \cdot \cos^{n-2}\phi_{n-1})\,d\phi_{n-1}\ldots d\phi_1 dr \\
&= \int\limits_0^R r^{n-1}\,dr \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\phi_1 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi_2\,d\phi_2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\phi_3\,d\phi_3 \cdot \ldots \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\phi_{n-1}\,d\phi_{n-1} \\
&= \frac{2\pi}{n} \cdot R^n \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \cdot \ldots \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\,dt \\
&= \frac{2\pi}{n} \cdot R^n \cdot 2^{n-2} \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \cdot \ldots \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\,dt.
\end{aligned}$$

Wir wissen aber, dass

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k t\,dt = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)} \cdot \frac{\pi}{2} & k = 2m \\ \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m+1)} & k = 2m+1. \end{cases}$$

Somit ist

$$vol(D^{n+2}(R)) = vol(D^n(R)) \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t\,dt \cdot R^2 \cdot 4 \cdot \frac{n}{n+2}.$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t\,dt &= \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)} & n = 2k \\ \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} & n = 2k+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2} & n = 2k \\ \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{\pi}{2} & n = 2k+1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$vol(D^{n+2}(R)) = 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{n+2} \cdot vol(D^n(R)). \quad (**)$$

Nun können wir also Kugelvolumina rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned}
&vol(D^1(R)) = 2R, \quad vol(D^2(R)) = \pi R^2, \quad vol(D^3(R)) \overset{(**)}{=} \frac{4\pi R^3}{3}, \\
&vol(D^4(R)) \overset{(**)}{=} \frac{\pi^2 R^4}{2}, \quad vol(D^5(R)) \overset{(**)}{=} \frac{8}{15}\pi^2 R^5, \ldots
\end{aligned}$$

Satz 8.14 *Für das Volumen der n-dimensionalen Kugel gilt:*

$$vol(D^n(R)) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{(\frac{n}{2})!} & n \text{ gerade} \\ \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} R^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion über n. Der Induktionsanfang ist bis $n = 5$ gesichert (siehe oben). Es genügt nun zu zeigen, dass die Formel für die $(k+1)$–dimensionale Kugel stimmt, wenn sie für die $k-1$–dimensionale Kugel gilt.

1. Fall: Sei $k = 2l$ gerade. Dann gilt

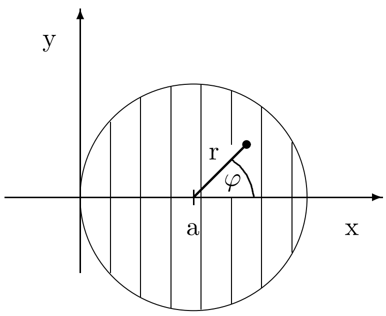
$$\begin{aligned} vol(D^{k+1}(R)) &\overset{(**)}{=} vol(D^{k-1}(R)) \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{k+1} \overset{\text{Ind.-vor.}}{=} \frac{2^{\frac{k}{2}} \pi^{\frac{k-2}{2}} R^{k-1}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)} \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{2^{\frac{k+2}{2}} \cdot \pi^{\frac{k}{2}} R^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k+1)}. \end{aligned}$$

2. Fall: Sei $k = 2l+1$ ungerade. Dann gilt

$$\begin{aligned} vol(D^{k+1}(R)) &\overset{(**)}{=} vol(D^{k-1}(R)) \cdot 2\pi R^2 \cdot \frac{1}{k+1} \overset{\text{Ind.-vor.}}{=} \frac{\pi^{\frac{2l}{2}} R^{k-1}}{l!} \cdot 2\pi \cdot R^2 \cdot \frac{1}{2(l+1)} \\ &= \frac{\pi^{l+1} R^{k+1}}{(l+1)!} \end{aligned}$$

□

Beispiel 2:



Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 = a^2\}$. Wir berechnen $\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$. Wir parametrisieren A durch Polarkoordinaten (bis auf eine Nullmenge L): sei $x = a + r\cos\phi$, $0 \le r \le a$, $y = r\sin\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ und

$$\begin{aligned} g : (0,a) \times (0,2\pi) &\longrightarrow A \setminus L \\ (r,\phi) &\mapsto (a + r\cos\phi, r\sin\phi). \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_{A \setminus L} (x^2+y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^a \int_0^{2\pi} (((a + r\cos\phi)^2 + r^2\sin^2\phi) \cdot |detDg(r,\phi)|)\,d\phi\,dr. \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix von g ist

$$Dg(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$$

Folglich gilt

$$\int_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^a (\int_0^{2\pi} (a^2 + 2ar\cos\phi + r^2) \cdot r\,d\phi)\,dr$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^a (a^2 r + r^3)\, dr \\
&= 2\pi \Big(a^2 \frac{r^2}{2}\Big|_0^a + \frac{r^4}{4}\Big|_0^a\Big) \\
&= 2\pi \Big(\frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{4}\Big) \\
&= \frac{3}{2}\pi a^4.
\end{aligned}
$$

Beispiel 3: Wir berechnen das Integral

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2 \le 1} x^2\, dx\, dy\, dz.$$

Wir parametrisieren dazu die Menge $A = K^3(1)$ mittels Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$.
Sei also $x = r\cos\phi_1 \cos\phi_2, \quad y = r\sin\phi_1 \cos\phi_2, \quad z = r\sin\phi_2$ und

$$
\begin{aligned}
g : (0,1) \times (0, 2\pi) \times \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) &\longrightarrow A \setminus L \\
(r, \phi_1, \phi_2) &\longmapsto (x, y, z).
\end{aligned}
$$

Damit ist $|detDg(r, \phi_1, \phi_2)| = r^2 \cos\phi_2$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\int\limits_A x^2\, dxdydz &= \int\limits_{A \setminus L} x^2\, dxdydz \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r^2 \cos^2\phi_1 \cos^2\phi_2) r^2 \cos\phi_2\, dr\, d\phi_1\, d\phi_2 \\
&= \int_0^1 r^4\, dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\phi_1\, d\phi_1 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\phi_2\, d\phi_2 \\
&= \frac{2}{5} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt = \frac{4}{15} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{4}{15} \cdot \pi.
\end{aligned}
$$