

# Differentialgeometrie

Nach Vorlesungen von Helga Baum\*

5. Juni 2015

\*Aufgeschrieben von Luise Fehlinger und Carsten Falk  
Überarbeitet und ergänzt von Lukas Gehring, Maik Pickl und Daniel Platt

Letzte Korrekturen: 5. Juni 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologische Räume</b>	<b>7</b>
1.1	Definition und Beispiele	7
1.2	Topologische Räume mit abzählbarer Basis	13
1.3	Stetige Abbildungen und Homöomorphismen	18
1.4	Hausdorff-Räume ( $T_2$ - Räume)	22
1.5	Kompakte und folgenkompakte topologische Räume	26
1.6	Zusammenhängende und bogenzusammenhängende Mengen in topologischen Räumen	34
<b>2</b>	<b>Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>39</b>
2.1	Definition und Beispiele	39
2.2	Differenzierbare Abbildungen	45
2.3	Der Tangentialraum und das Differential einer glatten Abbildung	48
2.4	Vektorfelder und Flüsse	55
2.5	Immersionen, Einbettungen und Submersionen	68
2.6	Tensorbündel und Tensorfelder	73
2.6.1	Tensorprodukt von Vektorräumen	73
2.6.2	Tensorbündel und Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten	81
2.7	Die "Zerlegung der 1" auf einer glatten Mannigfaltigkeit	89
2.8	Orientierbare Mannigfaltigkeiten	93
2.8.1	Orientierung eines Vektorraumes $V$ mit Dimension $n$	93
2.8.2	Orientierung auf Mannigfaltigkeiten	94
2.9	Integration auf Mannigfaltigkeiten	99
2.10	Der Satz von Stokes	103
2.10.1	Mannigfaltigkeiten mit Rand	104
2.10.2	Das Differential einer $k$ -Form	105
2.10.3	Der Satz von Stokes für Differentialformen	108
<b>3</b>	<b>Grundbegriffe der semi-Riemannschen Geometrie</b>	<b>113</b>
3.1	Riemannsche und pseudo-Riemannsche Metriken	113
3.2	Längen, Winkel und Volumen in semi-Riem. MF	118
3.2.1	Längen von Kurven in $M$	118
3.2.2	Volumen in semi-Riem. Mannigfaltigkeiten	121
3.2.3	Der Schnittwinkel von Kurven in semi-Riem. Mannigfaltigkeiten	124
3.3	Isometrien und konforme Abbildungen	126
3.4	Kovariante Ableitungen und Levi-Civita-Zusammenhang	136

3.5	Krümmungen von Kurven im $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$ . . . . .	148
3.5.1	Spezialfälle . . . . .	153
3.6	Krümmungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	161
3.6.1	Geometrische Eigenschaften von $H, K$ . . . . .	168
3.7	Krümmungen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit . . . . .	172
3.7.1	Definitionen . . . . .	173
3.7.2	Räume mit konstanter Schnittkrümmung . . . . .	177
3.7.3	Einstein-Mannigfaltigkeiten . . . . .	183
3.7.4	Mathematische Modelle der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) . . . . .	188
3.8	Geodätische Linien auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten . . . . .	199
3.9	Exponentialabbildung und Normalkoordinaten . . . . .	208
3.10	Geodäten und Abstände in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Der Satz von Hopf und Rinow . . . . .	219
3.11	Jacobifelder, konjugierte Punkte und Schnittort . . . . .	230
<b>4</b>	<b>Krümmung und Topologie - Einige Beispiele</b> . . . . .	<b>249</b>
4.1	Der Satz von Gauß - Bonnet . . . . .	249
4.2	Lokale Isometrien und semi-Riem. Überlagerungen . . . . .	260
4.3	Die Sätze von Hadamard, Bonnet-Myers und Räume konstanter Krümmung . . . . .	276
<b>5</b>	<b>Spektralgeometrie</b> . . . . .	<b>293</b>
5.1	Der Hodge-Laplace-Operator auf $k$ -Formen . . . . .	300
5.2	Der Bochner-Laplace-Operator . . . . .	309
5.3	Die Weitzenböck-Formel (Bochner-Formel) für den Hodge-Laplace-Operator . . . . .	314
5.4	Fakten über elliptische Differentialoperatoren . . . . .	321
5.5	Satz von Hodge und Anwendungen . . . . .	325
5.6	Greensche Operatoren . . . . .	329
5.7	Theoreme von Lichnerowicz und Obata . . . . .	338
<b>6</b>	<b>Geometrie semi-Riemannscher Immersionen</b> . . . . .	<b>351</b>

## Worum geht es in der Vorlesung “Differentialgeometrie I”?

Im Grundstudium wurden die Differential- und Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  und auf Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  behandelt. Für die Differentialgeometrie benötigen wir eine allgemeinere Klasse von Räumen, die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Mannigfaltigkeiten sind abstrakte Mengen  $M$ , die man lokal um jeden Punkt durch  $n$  reelle Koordinaten beschreiben kann. Lokal verhalten sie sich also wie Euklidische Räume. Solche Mengen treten natürlicher Weise z.B. als Nullstellenmengen von Abbildungen oder als Mengen der Äquivalenzklassen bei Äquivalenzrelationen auf. Beispiele für Mannigfaltigkeiten sind Flächen xxx im  $\mathbb{R}^3$ , wie reguläre Quadriken, das Möbiusband oder Rotationsflächen. Aber auch die klassischen Gruppen oder die Menge aller  $k$ -dimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^n$  sind Mannigfaltigkeiten. Nach dem Einbettungssatz von Whitney ist jede differenzierbare Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit eines reellen Vektorraumes  $\mathbb{R}^N$ , so dass es genügen würde, Geometrie und Analysis auf Untermannigfaltigkeiten zu betreiben. Meist ist es aber einfacher und genügt, ein Objekt als abstrakte Mannigfaltigkeit zu betrachten ohne seine (oft recht aufwendig hinzuschreibende) Einbettung in den  $\mathbb{R}^N$  zu kennen. Dies ist z.B. der Fall, wenn die Objekte durch Verklebungen entstehen oder als Orbiträume von Gruppenwirkungen, die unter anderem in der Physik eine große Rolle spielen.

Die Vorlesung ist eine Einführung in die Grundlagen der Riemannschen Geometrie auf Mannigfaltigkeiten. Wichtige Fragen, die wir klären wollen, sind:

- Wie definiert und berechnet man man den Abstand von Punkten, die Länge von Kurven oder das Volumen von Teilmengen von Mannigfaltigkeiten?
- Wie beschreibt man Krümmungen der Objekte?
- Welche globalen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten kann man aus den lokalen (wie z.B. den lokal definierten Krümmungen) ablesen? Kann man durch lokale Messungen die Gestalt der Erde oder des Kosmos erkennen?
- Wie kann man entscheiden, wann die gleichen geometrischen Verhältnisse auf zwei gegebenen Mannigfaltigkeiten vorliegen?
- Kann man Mannigfaltigkeiten bzgl. gewisser topologischer oder geometrischer Eigenschaften klassifizieren? D.h. kann man entscheiden, wieviel "verschiedene" Mannigfaltigkeiten es gibt und diese durch spezielle Invarianten charakterisieren?

Die in der Vorlesung behandelten Konzepte der Riemannschen Geometrie sind grundlegend für die mathematische Modellierung physikalischer Prozesse. Sie spielen unter anderem eine entscheidende Rolle in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Für das Selbststudium eignet sich folgende Literatur:

- B.O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academy Press 1983.
- M.do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser 1992.
- Gromoll, Klingenberg, Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer 1968.
- M.Spivak, *Differential Geometry I-V*.
- S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer 1990.
- P.Peterson, *Riemannian Geometry*, Springer 1999.
- S.Kobayashi, K.Nomizu, *Foundations of Differential Geometry I,II*, Wiley and Sons, 1996.
- F.Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer 1983.
- C.F.Gauss, B.Riemann, H.Minkowski, *Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt*, Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd 1.

# 1 Topologische Räume

In diesem Abschnitt werden wir zunächst einige Grundbegriffe aus der Theorie der topologischen Räume zusammenstellen. Insbesondere sollen die speziellen Eigenschaften von Hausdorffschen topologischen Räumen mit abzählbarer Basis besprochen werden. Als spezielle Literatur zu diesem Kapitel eignen sich die folgenden Bücher

- Engelking, General Topology,
- K. Jänich, Topologie, Springer Verlag 1990.
- E. Ossa, Topologie, Vieweg Verlag 1992.
- C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press 1980.
- P. Günther, Grundkurs Analysis Bd. II, Teubner-Verlag Leipzig 1973.
- L.A. Steen, J.A. Seebach, Counterexamples in Topology, Dover Publ. Inc. N.Y. 1995.
- Skript zur Analysis I\* (Dozentin Prof. Baum), Kapitel 2.

## 1.1 Definition und Beispiele

Es sei  $X$  eine nicht leere Menge. Mit  $\mathcal{P}(X)$  bezeichnen wir im folgenden die Potenzmenge von  $X$ , d.h. die Menge aller Teilmengen von  $X$ .

**Definition.** Sei  $X$  eine nicht leere Menge. Ein Mengensystem  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$  heißt Topologie auf  $X$ , falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. (T1)  $\emptyset, X \in \tau$ .
2. (T2) Die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus  $\tau$  liegt wieder in  $\tau$ .
3. (T3) Sind  $U, V \in \tau$ , so liegt auch der Durchschnitt  $U \cap V$  in  $\tau$ .

D.h. das Mengensystem  $\tau$  ist abgeschlossen gegenüber beliebigen Vereinigungen und endlichen Durchschnitten.  $(X, \tau)$  heißt topologischer Raum. Die Mengen  $U \in \tau$  nennt man die offenen Mengen des topologischen Raumes  $(X, \tau)$ .

**Beispiel 1.1.** *Beispiele für Topologien auf einer Menge  $X$*

1. *Diskrete Topologie*

In dieser Topologie ist jede Menge offen:  $\tau := \mathcal{P}(X)$ .

2. *Antidiskrete Topologie*

In dieser Topologie gibt es nur zwei offene Mengen:  $\tau := \{\emptyset, X\}$ .

### 3. Die von einer Metrik erzeugte Topologie

Zur Erinnerung: Eine Abbildung  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Metrik auf  $X$ , falls für alle  $x, y, z \in X$  gilt

- $\rho(x, y) \geq 0$  und  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Sei  $\rho$  eine Metrik auf  $X$ . Wir betrachten das folgende Mengensystem:

$$\tau_\rho := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 : K(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\} \subset U\}$$

$\tau_\rho$  ist eine Topologie auf  $X$ :

Da (T1) und (T2) per Definition unmittelbar klar sind, bleibt zu zeigen, dass mit zwei Mengen  $U$  und  $V$  auch ihr Durchschnitt in  $\tau_\rho$  liegt. Sei dazu  $x \in U \cap V$ . Dann gibt es zwei Zahlen  $\varepsilon_1 > 0$  und  $\varepsilon_2 > 0$ , so dass  $K(x, \varepsilon_1) \subset U$  und  $K(x, \varepsilon_2) \subset V$ . Dann folgt aber  $K(x, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \subset U \cap V$ .  $\tau_\rho$  heißt die von  $\rho$  erzeugte Topologie auf  $X$ .

**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt metrisierbar, falls es eine Metrik  $\rho$  gibt, so dass  $\tau = \tau_\rho$  gilt.

Natürlich ist nicht jeder topologische Raum metrisierbar. Ein Beispiel hierfür ist die antidiskrete Topologie  $\tau := \{\emptyset, X\}$ , wobei  $X$  mindestens zwei Elemente enthält. Angenommen, eine  $\tau$  erzeugende Metrik  $\rho$  würde existieren. Für zwei verschiedene Punkte  $x, y \in X$  ist dann  $0 < \rho(x, y) =: \varepsilon$ . Dann ist  $y \notin K(x, \frac{\varepsilon}{2})$ . Es gibt also eine weitere von  $X$  und  $\emptyset$  verschiedene offene Menge  $K(x, \frac{\varepsilon}{2})$ . Somit ist  $(X, \{\emptyset, X\})$  nicht metrisierbar.

Die diskrete Topologie  $\tau := \mathcal{P}(X)$  wird durch die diskrete Metrik  $\rho_d$  induziert:

$$\rho_d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho_d(x, y) := \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

Da für diese Metrik  $\{x\} = K(x, \frac{1}{2})$  gilt, ist jede einpunktige Menge offen. Aus (T2) folgt dann  $\tau_{\rho_d} = \mathcal{P}(X)$ .

Die metrischen Räume bilden eine echte Teilmenge der Menge der topologischen Räume. Später wird bewiesen, dass jede differenzierbare Mannigfaltigkeit metrisierbar ist.

### Beispiel 1.2. Weitere Beispiele für Topologien.

#### 1. Die auf Teilmengen induzierte Topologie

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A$  eine Teilmenge von  $X$ . Wir betrachten das Mengensystem

$$\tau_A := \{U \cap A \mid U \in \tau\}$$

$\tau_A$  heißt die auf  $A$  induzierte Topologie.  $\tau_A$  ist tatsächlich eine Topologie, denn:

- $\emptyset = \emptyset \cap A$  und  $A = X \cap A$ , d.h.  $X$  und  $\emptyset$  sind in  $\tau_A$ .
- Sei  $\{V_i\}_{i \in I}$  eine Familie von Mengen mit  $V_i \in \tau_A$ , so existiert für jedes  $i$  ein  $U_i \in \tau$ , sodass  $V_i = U_i \cap A$ . Daraus folgt dann

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \underbrace{\left( \bigcup_{i \in I} U_i \right)}_{=: U \in \tau} \cap A \in \tau_A.$$

- Für  $V_1, V_2 \in \tau_A$  gilt  $V_i = U_i \cap A$  wobei  $U_i \in \tau$  und  $i \in \{1, 2\}$ . Daraus folgt

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \underbrace{(U_1 \cap U_2)}_{=: U \in \tau} \cap A \in \tau_A$$

## 2. Die Produkttopologie

Seien  $(X, \tau_X)$  und  $(Y, \tau_Y)$  topologische Räume. Wir betrachten das folgende Mengensystem auf  $X \times Y$ :

$$\tau_{X \times Y} := \left\{ A \subset X \times Y \mid A = \bigcup_{i \in I} V_i \times U_i; V_i \in \tau_X, U_i \in \tau_Y \right\}$$

$\tau_{X \times Y}$  heißt die von  $\tau_X$  und  $\tau_Y$  induzierte Produkttopologie. Die Topologie-Eigenschaften folgen aus den Vertauschungsregeln für  $\times$ ,  $\cup$  und  $\cap$ .

## 3. Die Faktortopologie

Seien  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum,  $Y$  eine Menge und  $f : X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung. Wir betrachten das folgende Mengensystem auf  $Y$

$$\tau_f := \{ A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \tau \}$$

$\tau_f$  ist eine Topologie auf  $Y$  - die durch  $f$  induzierte Faktortopologie.

Verifizieren der Topologieeigenschaften:

- $\emptyset \in \tau_f$ , denn  $f^{-1}(\emptyset) := \emptyset \in \tau$ .
- $Y \in \tau_f$ , denn  $f^{-1}(Y) = X \in \tau$ .
- Sei  $U_i \in \tau_f$  für  $i \in I$ , so folgt aus

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\in \tau} \in \tau$$

auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_f$ .

- Für  $U_1, U_2 \in \tau_f$  folgt aus

$$f^{-1}(U_1 \cap U_2) = \underbrace{f^{-1}(U_1)}_{\in \tau} \cap \underbrace{f^{-1}(U_2)}_{\in \tau} \in \tau$$

auch  $U_1 \cap U_2 \in \tau_f$ .

Faktortopologien werden insbesondere auf Mengen von Äquivalenzklassen betrachtet. Wir erinnern an die Definition einer Äquivalenzrelation: Sei  $X$  eine Menge und  $R \subset X \times X$  eine Menge von Paaren. Wir schreiben kurz  $x \sim y$  falls  $(x, y) \in R$ .  $R$  bzw.  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation, falls gilt:

- Reflexivität  $\forall x \in X : x \sim x$ .
- Symmetrie  $\forall x, y \in X : x \sim y \implies y \sim x$ .
- Transitivität  $\forall x, y, z \in X : x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$ .

Für  $x \in X$  ist  $[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}$  die durch  $x$  definierte Äquivalenzklasse.  $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$  ist die Menge der Äquivalenzklassen bzgl.  $\sim$ . Die Projektion auf die Äquivalenzklassen ist:

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

Wir versehen eine solche Menge von Äquivalenzklassen  $X/\sim$  immer mit der durch  $\pi$  induzierten Faktortopologie.

Nun wollen wir noch einige konkrete Beispiele angeben.

### Beispiel 1.3. Wichtige Beispiele für topologische Räume

#### 1. Der Euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$  sei immer mit der von der Euklidischen Metrik induzierten Topologie versehen

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

#### 2. Die Sphäre $S^n$

Die Sphäre im  $\mathbb{R}^{n+1}$  vom Radius  $r$

$$S_r^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$$

sei immer mit der induzierten Topologie des  $\mathbb{R}^{n+1}$  versehen.  $S^n := S_1^n$  sei die Sphäre vom Radius 1.

#### 3. Der $n$ -dimensionale Torus $T^n$

Der  $n$ -dimensionale Torus  $T^n := \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ mal}} \subset \mathbb{R}^{2n}$  sei immer mit der Produkt-

topologie versehen. Den 2-dimensionalen Torus  $T^2$  können wir bijektiv auf einen Rotationstor  $\hat{T}^2$  im  $\mathbb{R}^3$  abbilden:

$$\hat{T}^2 := \{(2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v \mid u, v \in \mathbb{R}\}$$

Die Abbildung  $\varphi : T^2 \longrightarrow \hat{T}^2$  ist gegeben durch

$$\varphi((e^{iu}, e^{iv})) = ((2 + \cos v) \cos u, (2 + \cos v) \sin u, \sin v).$$

#### 4. Der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$

Wir betrachten die  $S^n$  mit der Äquivalenzrelation  $\forall x, y \in S^n : x \sim y :\iff x = \pm y$ .

$$\mathbb{R}P^n := S^n / \sim$$

ist der  $n$ -dimensionale reell-projektive Raum versehen mit der Faktortopologie.

$$\begin{aligned} \pi : \quad S^n &\longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ x = (x_0, x_1, \dots, x_n) &\mapsto [x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \end{aligned}$$

#### 5. Der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^n$

Wir betrachten die

$$S^{2n+1} = \{ \underline{z} := (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1 \}$$

mit der Äquivalenzrelation  $\forall \underline{z}, \underline{w} \in S^{2n+1} : \underline{z} \sim \underline{w} :\iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1 \wedge \underline{z} = \lambda \underline{w}$ .

$$\mathbb{C}P^n := S^{2n+1} / \sim$$

ist der  $n$ -dimensionale komplex-projektive Raum versehen mit der Faktortopologie.

$$\begin{aligned} \pi : \quad S^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ \underline{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) &\mapsto [\underline{z}] = [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \end{aligned}$$

#### 6. Der quaternionisch-projektive Raum $\mathbb{H}P^n$

$\mathbb{H}$  ist der Schiefkörper der Quaternionen.

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\simeq \mathbb{C}^2 && \simeq \mathbb{R}^4 \\ q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k &\mapsto (x_0 + x_1i, x_2 + x_3i) && \mapsto (x_0, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Wobei  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  und  $i \cdot j = k$ .  $\bar{q} := x_0 - x_1i - x_2j - x_3k$  und damit  $|q|^2 := q \cdot \bar{q}$ . Wir betrachten

$$S^{4n+3} = \{ \underline{q} := (q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{H}^{n+1} \mid |q_0|^2 + \dots + |q_n|^2 = 1 \}$$

mit der Äquivalenzrelation

$$\forall \underline{q}, \underline{z} \in S^{4n+3} : \underline{q} \sim \underline{z} :\iff \exists \mu \in \mathbb{H} : |\mu| = 1 \wedge \underline{q} = \mu \underline{z}.$$

$$\mathbb{H}P^n := S^{4n+3} / \sim$$

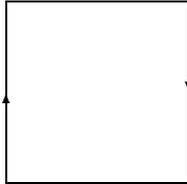
ist der  $n$ -dimensionale quaternionisch-projektive Raum versehen mit der Faktortopologie.

### 7. Das Möbiusband (Möb)

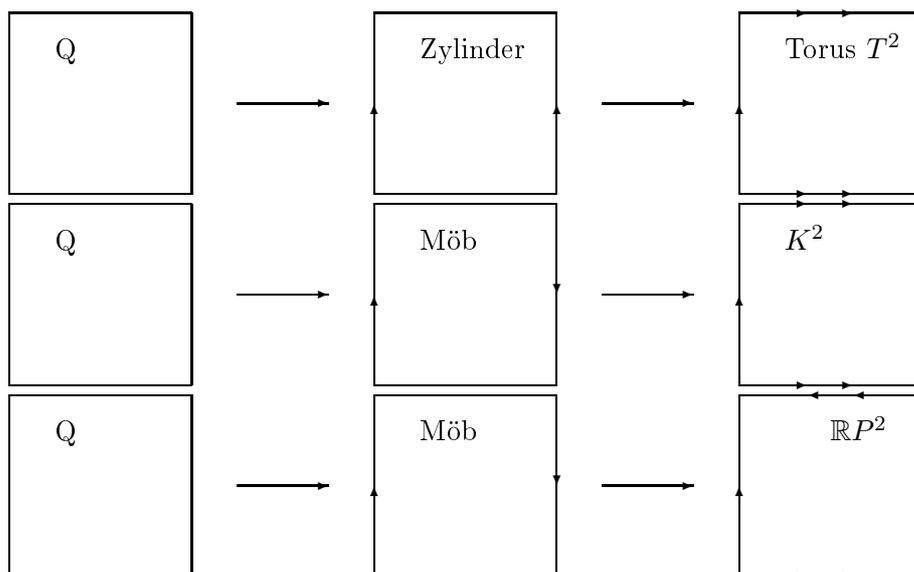
Wir betrachten  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  mit der Relation

$$(x, y) \sim (z, w) : \iff \begin{cases} (x, y) = (z, w) \text{ oder} \\ \{x, z\} = \{0, 1\} \text{ und } y + w = 1 \end{cases}$$

dann ist  $\text{Möb} = Q / \sim$



### 8. Der Torus $T^2$ , die Kleinsche Flasche $K^2$ und der $\mathbb{R}P^2$



Jede zweidimensionale, kompakte und zusammenhängende  $M^2$  (ohne Rand) setzt sich aus  $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$  und  $K^2$  zusammen.  $\rightsquigarrow$  algebraische Topologie)

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  eine Teilmenge.

- Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt Umgebung von  $x \in X$  (Bezeichnung  $U(x)$ ), falls  $x \in U$  und  $U \in \tau$ .

- Sei  $A \subset X$ . Ein Punkt  $x \in A$  heißt innerer Punkt von  $A$ , falls es eine Umgebung  $U(x) \subset A$  gibt.
- Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt abgeschlossen, falls  $X \setminus A$  offen ist.
- $\text{int}(A) := \{x \in A \mid x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$  heißt Inneres von  $A$ .
- $\text{cl}(A) := X \setminus \text{int}(X \setminus A)$  heißt Abschluss von  $A$ .
- $\partial A := X \setminus (\text{int} A \cup \text{int}(X \setminus A))$  heißt Rand von  $A$ .

**Satz 1.4.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$ . Dann gilt

1.  $\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U$ , d.h.  $\text{int}(A)$  ist die größte offene Menge, die in  $A$  liegt.
2.  $\text{cl}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ abgeschlossen}}} F$ , d.h.  $\text{cl}(A)$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält. Jede Umgebung von  $x$  schneidet  $A$ .
3.  $\partial A = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A)$ . Darüber hinaus ist  $x \in \partial A$  g.d.w. jede Umgebung von  $x$  schneidet sich mit  $A$  und mit  $X \setminus A$ .

Der Beweis läuft genauso wie für metrische Räume.

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.  $f$  heißt offen (bzw. abgeschlossen), falls gilt: Ist  $U \subset X$  offen (bzw. abgeschlossen), so ist auch  $f(U) \subset Y$  offen (bzw. abgeschlossen).

## 1.2 Topologische Räume mit abzählbarer Basis

**Definition.** Eine Menge heiße hier abzählbar, wenn es eine Injektion von der Menge in die natürlichen Zahlen gibt, d.h. wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist.

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum.  $\beta \subset \tau$  heißt Basis von  $(X, \tau)$ , falls jede nicht leere, offene Menge die Vereinigung von Mengen aus  $\beta$  ist.

**Beispiel 1.5.** Basen von topologischen Räumen

1. Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum. Dann ist

$$\beta := \{K(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\} \mid x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$$

eine Basis von  $(X, \tau_\rho)$ .

2. Eine Basis der Produkttopologie  $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$  ist gegeben durch

$$\beta := \{U \times V \mid U \subset X \text{ offen, } V \subset Y \text{ offen}\}.$$

**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt topologischer Raum mit abzählbarer Basis (erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom), falls es eine Basis  $\beta$  von  $\tau$  mit abzählbar vielen Elementen gibt.

Wie hängen die metrischen Räume mit den topologischen Räumen mit abzählbarer Basis zusammen?

**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt separabel, falls es eine abzählbare, dichte Teilmenge  $A \subset X$  gibt (d.h.  $cl(A) = X$ ).

**Bemerkung.** Hat  $(X, \tau)$  eine abzählbare Basis, so ist  $(X, \tau)$  separabel. (ÜA)

**Satz 1.6.** Die Menge der metrischen Räume, die auch topologische Räume mit abzählbarer Basis sind, ist gleich der Menge der separablen metrischen Räume.

$$\begin{aligned} \{\text{metrische Räume}\} \cap \{\text{top. Räume mit abzählbarer Basis}\} \\ = \{\text{separable metrische Räume}\} \end{aligned}$$

Den Beweis dieses Satzes überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

**Beispiel 1.7. Abzählbare- und nicht abzählbare Basen**

1.  $\mathbb{R}^n$  :  $\beta = \{K(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\}$  ist eine abzählbare Basis.

2. **Sorgenfrey-Linie**

In  $\mathbb{R}$  betrachte man die Mengen  $\beta = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < \infty\}$ . Dies ist eine Basis von

$$\tau_{Sorg} := \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ ist Vereinigung halboffener Intervalle}\}$$

$(\mathbb{R}, \tau_{Sorg})$  ist nicht metrisierbar und hat keine abzählbare Basis.

3.  $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$  ist metrisierbar (diskrete Metrik) und hat keine abzählbare Basis (denn jede einelementige Menge ist offen).

4.  $(\mathbb{R}, \tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\})$  ist nicht metrisierbar und hat eine abzählbare Basis.

**Satz 1.8.** Es gilt

1. Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis,  $A \subset X$ , dann hat auch  $(A, \tau_A)$  eine abzählbare Basis.

2. Seien  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  topologische Räume mit abzählbaren Basen, dann hat auch  $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$  eine abzählbare Basis.

3. Habe  $(X, \tau)$  eine abzählbare Basis und sei  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv und offen bzgl.  $\tau_f$ , dann hat  $(Y, \tau_f)$  eine abzählbare Basis.

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Sei  $\beta_X = \{U_1, U_2, \dots\}$  eine abzählbare Basis von  $X$ .

$$\beta_A := \{U_1 \cap A, U_2 \cap A, \dots\} \subset \tau_A$$

*Behauptung:*  $\beta_A$  ist eine Basis von  $\tau_A$ .

Sei  $V \subset A$  offen,  $V \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\exists U \in \tau : V = U \cap A.$$

Da  $\beta$  eine Basis von  $(X, \tau)$  ist, gilt:  $U = \bigcup_{i \in I \subset \mathbb{N}} U_i$ . und damit

$$V = \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(U_i \cap A)}_{\in \beta_A}.$$

2. Sei  $\beta_X$  eine abzählbare Basis von  $(X, \tau_X)$  und  $\beta_Y$  eine abzählbare Basis von  $(Y, \tau_Y)$ . Dann ist  $\beta_{X \times Y} := \{U \times V \mid U \in \beta_X, V \in \beta_Y\}$  eine abzählbare Basis von  $X \times Y$ .
3. Sei  $\beta_X$  eine abzählbare Basis von  $(X, \tau)$ . Da  $f$  offen ist, gilt  $\tau_f \supset \beta_f := \{f(U) \mid U \in \beta_X\}$ .  $\beta_f$  ist abzählbar und eine Basis von  $\tau_f$ , denn aus  $V \in \tau_f$  mit  $V \neq \emptyset$  folgt  $f^{-1}(V) \in \tau$ , d.h. es ex. eine Familie  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \beta_X$  mit  $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Damit ist

$$f(f^{-1}(V)) \stackrel{f \text{ surj.}}{=} V = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f(U_i)}_{\in \beta_f}$$

und  $\beta_f$  eine Basis von  $\tau_f$ . □

### Beispiel 1.9. Topologische Räume mit abzählbarer Basis

- $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidischen Topologie,  $S^n$  mit der induzierten Topologie und  $T^n$  mit der Produkttopologie haben nach Satz 1.8 abzählbare Basen.
- $\mathbb{R}P^n$  und  $\mathbb{C}P^n$  haben nach Satz 1.8 abzählbare Basen, da die Projektionen offen sind (ÜA).
- Das Möbiusband und die Kleinsche Flasche haben abzählbare Basen.

**Bemerkung.** Im Allgemeinen überträgt sich bei der Faktortopologie die abzählbare Basis nicht: gegeben sei  $\mathbb{R}$  mit der Standardtopologie.

$$x \sim y : \iff (x = y \vee x, y \in \mathbb{Z})$$

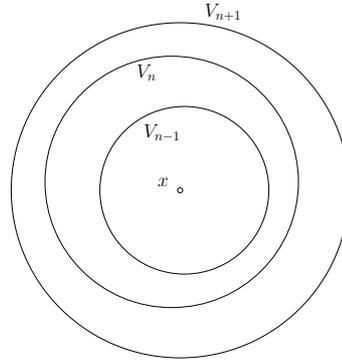
dann hat  $\mathbb{R}/\sim$  keine abzählbare Basis.

### Eigenschaften von Räumen mit abzählbarer Basis

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x \in X$  (kurz  $x_n \rightarrow x$  oder  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ), falls für jede Umgebung  $W(x)$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $x_n \in W(x)$  für alle  $n \geq n_0$ .

**Lemma 1.10.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis und sei  $x \in X$ . Dann existiert eine Folge von Umgebungen  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von  $x$  mit den folgenden Eigenschaften:

1.  $V_{n+1} \subset V_n$  für alle  $n$ .
2. Ist  $W$  eine beliebige Umgebung von  $x$ , dann existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $V_{n_0} \subset W$ .
3. Sei  $\{x_n\}$  so, dass  $x_n \in V_n$  für alle  $n$ , dann konvergiert  $x_n$  gegen  $x$ .



*Beweis.* Sei  $\beta$  eine abzählbare Basis von  $(X, \tau)$  und  $\beta(x) := \{U \in \beta \mid x \in U\}$ . Dann ist  $\beta(x) = \{U_1, U_2, \dots\}$  abzählbar und

$$V_n(x) := \bigcap_{i=1}^n U_i$$

ist eine Umgebung für  $x$ . Nun zu den einzelnen Punkten:

1. Dies ist nach Definition erfüllt.
2. Sei  $W(x)$  eine beliebige Umgebung von  $x$ . Dann gilt:  $W(x) = \bigcup_{i \in I} \tilde{U}_i$  mit  $\tilde{U}_i \in \beta$ . Da  $x \in W(x)$  gilt, existiert ein Index  $i_0$  mit  $\beta(x) \ni \tilde{U}_{i_0} = U_{n_0}$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Damit ist

$$V_{n_0}(x) = \bigcap_{i=0}^{n_0} U_i \subset U_{n_0} = \tilde{U}_{i_0} \subset W(x).$$

3. Sei  $x_n \in V_n(x)$  beliebig gewählt,  $n \in \mathbb{N}$ , z.z.  $x_n \rightarrow x$ . Sei  $W(x)$  eine beliebige Umgebung von  $x$ . Dann existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $V_{n_0}(x) \subset W(x)$ , sodass  $x_n \in V_n(x) \subset V_{n_0}(x) \subset W(x)$  für alle  $n \geq n_0$ . Daraus folgt aber die Konvergenz von  $\{x_n\}$  gegen  $x$ .

□

**Bemerkung.** Lemma 1.10 gilt für Räume mit abzählbarer Umgebungsbasis (1. Abzählbarkeitsaxiom).

**Definition.** Eine Umgebungsbasis für  $(X, \tau)$  von  $x \in X$  ist ein Mengensystem  $\beta_x \subset \tau$  mit  $x \in U$  für alle  $U \in \beta_x$ . Darüber hinaus existiert für jede Umgebung  $W(x) \in \tau$  ein  $U \in \beta_x$  mit  $U \subset W(x)$ .

**Satz 1.11.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Dann gilt:

1. Seien  $A \subset X$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x \in X$ . Dann gilt  $x \in cl(A)$ .
2. Habe  $(X, \tau)$  eine abzählbare Basis und sei  $A \subset X$ . Dann gilt: ist  $x \in cl(A)$ , so existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x$ .

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x \in X$ . Nach Satz 1.4 gilt:

$$cl(A) = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ abg.}}} F$$

Damit muss  $x$  in jeder abgeschlossenen Menge  $F$  liegen, welche  $A$  enthält. Angenommen es existiert eine abgeschlossene Menge  $F_0$  mit  $A \subset F_0$  und  $x \notin F_0$ . Dann ist  $X \setminus F_0$  eine offene Umgebung von  $x$  und  $x_n \in X \setminus F_0$  bzw.  $x_n \notin F_0$  und  $x_n \notin A$  für alle  $n \geq n_0$ . Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Sei  $x \in cl(A)$ . Sei  $(V_n(x))$  eine Folge von schrumpfenden Mengen (aus Lemma 1.10). Nach Satz 1.4 gilt  $V_n(x) \cap A \neq \emptyset$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man wähle nun für jedes  $n$  ein beliebiges  $x_n \in V_n(x)$ . Nach Lemma 1.10 gilt dann  $x_n \rightarrow x$ .

□

**Folgerung.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis und  $A \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Dann ist  $A$  genau dann abgeschlossen wenn jeder Grenzwert einer konvergenten Folge aus  $A$  bereits in  $A$  liegt.

*Beweis.*  $(\Rightarrow)$ : (gilt in jedem topologischen Raum). Sei  $A$  abgeschlossen, d.h.  $A = cl A$ . Mit Satz 1.11 (1) folgt die Behauptung.

$(\Leftarrow)$  Sei  $x \in cl A$ . Nach Satz 1.11 (2) existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Dann ist nach Voraussetzung  $x \in A$  und demnach also  $cl A = A$ . □

**Beispiel 1.12. Ein Gegenbeispiel für Satz 1.11 (2)**

Sei  $X = \mathbb{R}$  und  $\tau_{abz} := \{\mathbb{R} \setminus A \mid A \text{ ist abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ . Dann ist  $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$  ein topologischer Raum (ÜA). Dieser hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $A \subset \mathbb{R}$  ist abgeschlossen bzgl.  $\tau_{abz} \Leftrightarrow A$  abzählbar oder  $A = \mathbb{R}$
2. Sei  $B \subset \mathbb{R}$ , dann gilt

$$cl(B) = \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ falls } B \text{ überabzählbar} \\ B & , \text{ sonst} \end{cases}$$

3. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$ , dann gilt

$$x_n \rightarrow x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_n = x \quad \forall n \geq n_0,$$

denn  $U(x) := \mathbb{R} \setminus \{x_n \mid x_n \neq x\}$  ist eine offene Umgebung von  $x$ , und mit  $x_n \rightarrow x$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  sodass  $x_m \in U(x)$  für alle  $m \geq n_0$ . Insbesondere ist damit  $x_m = x$ .

Man betrachte nun die Menge  $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ . Diese ist weder offen noch abgeschlossen und nach 2. gilt  $cl(A) = \mathbb{R}$ . Aufgrund der Eigenschaft 3 konvergiert keine Folge aus  $A$  gegen einen Punkt in  $cl(A) \setminus A \subset cl(A)$ . Nach Satz 1.11 (2) kann  $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$  damit keine abzählbare Basis besitzen.

### 1.3 Stetige Abbildungen und Homöomorphismen

**Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

- Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt folgenstetig, falls gilt: wenn  $x_n \rightarrow x$  in  $X$  konvergiert, so konvergiert  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  in  $Y$ .
- Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt stetig, falls die Urbilder offener Mengen offen sind, d.h. ist  $U \subset Y$  offen, so ist  $f^{-1}(U) \subset X$  offen.

**Beispiel 1.13.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum,  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv. Dann ist  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_f)$  stetig.  $\tau_f$  ist die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft.

**Bemerkung.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $f : X \rightarrow Y$  ist stetig.
2. Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.
3.  $f(cl(A)) \subset cl(f(A)) \quad \forall A \subset X$ .
4. Sei  $\beta_Y$  eine Basis der Topologie von  $Y$ . Dann ist das Urbild von  $B \in \beta_Y$  in  $X$  offen, für alle  $B \in \beta_Y$ .
5. Für alle  $x \in X$  und jede Menge  $B \in \beta_Y$  mit  $f(x) \in B$  existiert eine Umgebung  $V(x)$  von  $x$  mit  $f(V(x)) \subset B$ .

**Satz 1.14.** Seien  $X, Y$  topologische Räume.

1. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig, so ist  $f$  folgenstetig.
2. Ist  $X$  ein Raum mit abzählbarer Basis (es reicht abzählbare Umgebungsbasis), dann ist jede folgenstetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig.

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Sei  $f$  stetig. Z.z. Ist  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$ , so gilt  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Sei  $U(f(x))$  eine beliebige Umgebung von  $f(x)$ . Da  $f$  stetig ist, ist

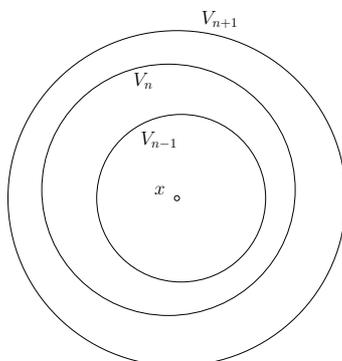
$$f^{-1}(U(f(x))) \subset X$$

eine offene Umgebung von  $x \in X$ . Dann gilt  $x_n \in f^{-1}(U)$  für alle  $n \geq n_0$ . Damit ist  $f(x_n) \in f(f^{-1}(U)) \subset U$  für alle  $n \geq n_0$  und  $\{f(x_n)\}_n \in \mathbb{N}$  konvergiert gegen  $f(x)$ .

2.  $X$  habe eine abzählbare Basis und  $f : X \rightarrow Y$  sei folgenstetig.

Annahme:  $f$  ist nicht stetig. D.h. es existiert ein  $x \in X$  und eine Umgebung  $U(f(x))$ , so dass für alle Umgebungen  $V(x)$  gilt:  $f(V(x)) \not\subset U$ . Sei  $(V_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

die schrumpfende Familie von Umgebungen aus Lemma 1.10. Dann existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in V_n(x)$  mit  $f(x_n) \notin U$ .



Mit Lemma 1.10 gilt also  $x_n \rightarrow x$  und  $f(x_n) \not\rightarrow f(x)$ . Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass  $f$  folgenstetig ist. □

**Beispiel 1.15. Folgenstetig impliziert i.A. keine Stetigkeit!**

Seien  $X = (\mathbb{R}, \tau_{abz})$ , wobei  $\tau_{abz} := \{\mathbb{R} \setminus A \mid A \text{ abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ . Sei darüber hinaus  $Y := (\mathbb{R}, \tau_{\cdot})$  die reellen Zahlen mit der euklidischen Topologie,  $Id : X \rightarrow Y$  die identische Abbildung. Jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist folgenstetig, denn aus

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow x_n = x \quad \forall n \geq n_0.$$

folgt

$$f(x_n) = f(x) \quad \forall n \geq n_0, \text{ bzw. } f(x_n) \rightarrow f(x).$$

Die Abbildung  $Id : X \rightarrow Y$  ist aber nicht stetig, denn  $U := (0, 1) \subset Y$  ist offen in der euklidischen Topologie, aber  $Id^{-1}(U) = U \subset X$  ist nicht offen bzgl.  $\tau_{abz}$ .

**Satz 1.16. Es gilt**

1. Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $h : Y \rightarrow Z$  stetig. Dann ist auch

$$h \circ f : X \rightarrow Z$$

stetig.

2. Ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subset X$ , so ist auch  $f|_A : (A, \tau_A) \rightarrow Y$  stetig.
3. Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $X \times Y$  mit der Produkttopologie versehen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_X : X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Y : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

sind stetig. Eine Abbildung  $f : Z \rightarrow X \times Y$  ist stetig genau dann, wenn  $p_X \circ f$  und  $p_Y \circ f$  stetig sind.

4. Seien  $X$  und  $Z$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  surjektiv. Eine Abbildung  $g : (Y, \tau_f) \rightarrow Z$  ist genau dann stetig, wenn  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig ist

*Beweis.* zu 4. "  $\Rightarrow$  ". Sei  $g$  stetig. Da  $f : X \rightarrow (Y, \tau_f)$  stetig ist, folgt, dass

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

stetig ist.

"  $\Leftarrow$  ". Sei  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig und  $U \subset Z$  offen. Dann ist  $(g \circ f)^{-1}(U) \subset X$  offen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(U)) &= (g \circ f)^{-1}(U) \subset X \quad \text{ist offen.} \\ \Rightarrow g^{-1}(U) &\subset Y \quad \text{ist offen in der Faktortopologie.} \\ \Rightarrow g &\text{ ist stetig.} \end{aligned}$$

□

Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt Homöomorphismus, falls  $f$  bijektiv ist und  $f$  und  $f^{-1}$  stetig sind. Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen homöomorph, falls es einen Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  gibt. Zwei Teilmengen  $A \subset X$  und  $B \subset Y$  heißen homöomorph, falls  $(A, \tau_A)$  und  $(B, \hat{\tau}_B)$  homöomorph sind.

#### Bemerkungen:

- Man unterscheidet homöomorphe topologische Räume nicht, da sie die gleichen topologischen Eigenschaften haben.
- Sei  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv und stetig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist ein Homöomorphismus} \\ \iff & f \text{ ist offen (bzw. abgeschlossen)} \\ \iff & \text{weitere Kriterien später} \end{aligned}$$

#### Beispiel 1.17. Beispiele für Homöomorphismen

##### 1. Die Stereographische Projektion

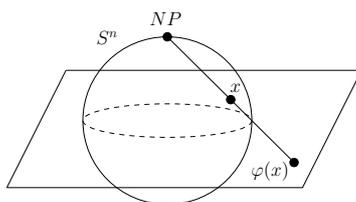
$S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$ . Sei

$$\varphi_{NP} : S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\},$$

wobei  $\varphi_{NP}(x)$  der Schnittpunkt der Geraden durch den Nordpol  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  und  $x$  mit der Hyperebene

$$\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist.



$\varphi_{NP}$  ist ein Homöomorphismus, denn

$$\begin{aligned}\varphi_{NP}(x) &= \varphi_{NP}((x_1, \dots, x_{n+1})) = \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \\ \varphi_{NP}^{-1}(y) &= \varphi_{NP}^{-1}((y_1, \dots, y_n)) = \frac{1}{1+\|y\|^2} (2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1) \\ & (\|y\|^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2)\end{aligned}$$

Also sind  $\varphi_{NP}$  und  $\varphi_{NP}^{-1}$  stetig.

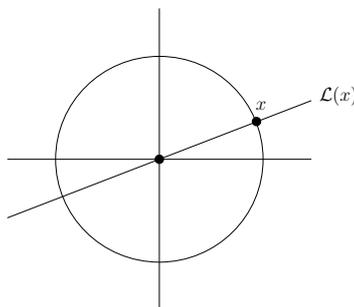
## 2. Der $\mathbb{R}P^n$ als Quotient der $S^n$

$\mathbb{R}P^n$  ist homöomorph zur Menge aller Geraden durch 0 im  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit der folgenden Topologie:

$$X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y.$$

$X/\sim$  ist die Menge aller Geraden im  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch 0 versehen mit der Faktortopologie.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^n &= S^n/\sim \longrightarrow X/\sim \\ [x] &\mapsto \mathcal{L}(x) = \mathbb{R} \cdot x\end{aligned}$$



Dies ist ein Homöomorphismus.

## 3. Der $\mathbb{C}P^n$ als Quotient der $S^{2n+1}$

$\mathbb{C}P^n$  ist homöomorph zur Menge aller komplexen Geraden durch 0 in  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

$$Y = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad \underline{z} \sim \underline{w} \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} : \underline{z} = \lambda \underline{w}.$$

$Y/\sim$  ist die Menge aller komplexen Geraden in  $\mathbb{C}^{n+1}$  durch 0 versehen mit der Faktortopologie.

$$\begin{aligned}\mathbb{C}P^n &= S^{2n+1}/\sim \longrightarrow Y/\sim \\ [z] &\mapsto \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(z) = \mathbb{C} \cdot \underline{z}\end{aligned}$$

Dies ist ein Homöomorphismus.

**Informationen.**

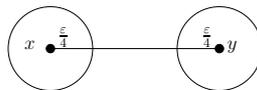
1. *Satz über die Invarianz der Dimension*  
Sei  $\mathbb{R}^n$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^m$  (beide versehen mit der euklidischen Topologie). Dann gilt  $n = m$ .
2. *Satz über die Invarianz des Gebietes*  
Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  homöomorphe Teilmengen. Dann gilt:  $U$  ist offen (zusammenhängend)  $\iff V$  ist offen (zusammenhängend).

**1.4 Hausdorff-Räume ( $T_2$  - Räume)**

**Definition.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt Hausdorff-Raum ( $T_2$ -Raum), falls es zu jedem Paar verschiedener Punkte  $x, y \in X$  offene Umgebungen  $U(x)$  und  $V(y)$  gibt, die sich nicht schneiden.

**Beispiel 1.18. Beispiele für Hausdorff-Räume**

1. **Metrische Räume** sind  $T_2$ -Räume.  
Sei  $(X, \rho)$  ein metrischer Raum,  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Dann gilt  $\rho(x, y) =: \varepsilon > 0$ .



Dann ist  $K(x, \frac{\varepsilon}{4}) \cap K(y, \frac{\varepsilon}{4}) = \emptyset$ .

2. Nicht jeder  $T_2$ -Raum ist metrisierbar:  $(\mathbb{R}, \tau_{\text{Sorg}})$  **Sorgenfrey-Linie**<sup>1</sup>

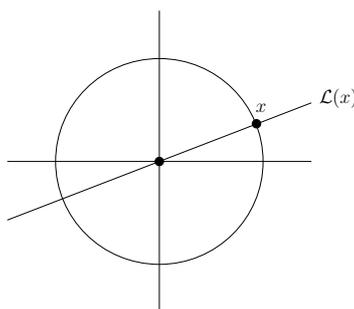
$$\beta = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < \infty\}$$

ist eine Basis von  $\tau_{\text{Sorg}}$ .  $(\mathbb{R}, \tau_{\text{Sorg}})$  ist  $T_2$ , hat aber keine abzählbare Basis und ist nicht metrisierbar. (Beweis: ÜA)

3.  $(X, \tau = \{X, \emptyset\})$  ist nicht  $T_2$ , hat aber eine abzählbare Basis.
4.  $(\mathbb{R}, \tau_{\text{abz}})$  ist nicht  $T_2$  und hat keine abzählbare Basis. Es gilt sogar, dass sich alle offenen Mengen schneiden, denn seien  $X_1, X_2 \in \tau_{\text{abz}} \setminus \{\emptyset\}$ , so gibt es abzählbare Teilmengen  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$  mit  $X_1 = \mathbb{R} \setminus A_1$ ,  $X_2 = \mathbb{R} \setminus A_2$  und es gilt:  $X_1 \cap X_2 = (\mathbb{R} \setminus A_1) \cap (\mathbb{R} \setminus A_2) = \mathbb{R} \setminus (\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\text{abzählbar}}) \neq \emptyset$ .

---

<sup>1</sup>siehe auch Bsp. 1.7 auf Seite 14



### Elementare Folgerungen.

1. In einem  $T_2$ -Raum sind alle einelementigen Mengen abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $x \in X$ . Z.z.  $X \setminus \{x\}$  ist offen. Sei  $y \in X \setminus \{x\}$ , d.h.  $x \neq y$ . Dann existieren Umgebungen  $U(x), V(y)$  mit  $U(x) \cap V(y) = \emptyset$ . Demnach ist  $V(y) \subset X \setminus \{x\}$  und somit  $X \setminus \{x\}$  offen und  $\{x\}$  abgeschlossen. (Bemerkung: Wir haben nur die  $T_1$ -Eigenschaft benutzt: mit  $x \neq y$  existiert eine Umgebung  $V(y)$  mit  $x \notin V(y)$ .)  $\square$

2. Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum. Dann ist der Grenzwert jeder konvergenten Folge eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Angenommen es gibt eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$x_n \rightarrow x \text{ und } x_n \rightarrow y, \quad x \neq y.$$

Da  $X$   $T_2$  ist, gibt es Umgebungen  $U(x), V(y)$  mit  $U(x) \cap V(y) = \emptyset$ . Da  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  und  $y$  konvergiert, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$x_n \in U(x), \quad x_n \in V(y) \quad \forall n \geq n_0.$$

Das ist ein Widerspruch zu  $U(x) \cap V(y) = \emptyset$ .  $\square$

**Bemerkung.** Im Allgemeinen ist der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig, z.B. konvergiert in  $(X, \tau = \{X, \emptyset\})$  jede Folge gegen jeden Punkt.

**Satz 1.19.** *Es gilt:*

1. Seien  $f, h : X \rightarrow Y$  stetige Abbildungen und  $Y$  ein  $T_2$ -Raum. Dann ist  $\{x \in X \mid f(x) = h(x)\} \subset X$  abgeschlossen.
2. Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum,  $A \subset X$ . Dann ist auch  $(A, \tau|_A)$  ein  $T_2$ -Raum.
3. Seien  $X$  und  $Y$   $T_2$ -Räume, so ist auch  $X \times Y$  versehen mit der Produkttopologie ein  $T_2$ -Raum.
4. Sei  $X$  ein beliebiger topologischer Raum,  $f : X \rightarrow (Y, \tau_f)$  surjektiv und offen und sei

$$D = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\} \subset X \times X$$

abgeschlossen. Dann ist  $(Y, \tau_f)$  ein  $T_2$ -Raum.

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Es ist zu zeigen:  $A := \{x \in X \mid f(x) \neq h(x)\} \subset X$  ist offen.

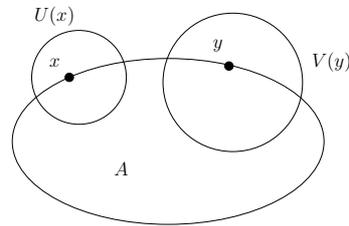
Sei  $x \in A$ . Da  $Y$  ein  $T_2$ -Raum ist, existieren offene Umgebungen  $U(f(x))$  und  $V(h(x))$  mit

$$U(f(x)) \cap V(h(x)) = \emptyset.$$

Da  $f$  und  $h$  stetig sind, ist  $W := f^{-1}(U) \cap h^{-1}(V) \subset X$  offen und  $x \in W$ . Es gilt  $W \subset A$ , denn sei  $z \in W$ , so folgt  $f(z) \in U$  und  $h(z) \in V$ .

Da aber  $U \cap V = \emptyset$ , muss  $f(z) \neq h(z)$  sein und somit  $z \in A$ . Also ist  $A$  offen und  $X \setminus A = \{x \in X \mid f(x) = h(x)\}$  abgeschlossen.

2. Sei  $(X, \tau)$  ein  $T_2$ -Raum,  $A \subset X$ . Seien  $x, y \in A, x \neq y$ . Da  $X$   $T_2$  ist, existieren offene Mengen  $U(x) \subset X$  und  $V(y) \subset X$  mit  $U(x) \cap V(y) = \emptyset$ .



Dann gilt:

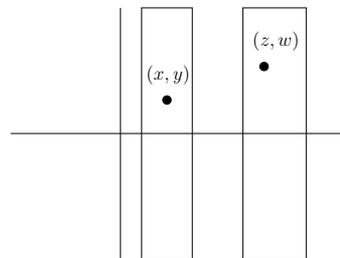
$$\underbrace{(U(x) \cap A)}_{\text{offen in } \tau_A} \cap \underbrace{(V(y) \cap A)}_{\text{offen in } \tau_A} = \emptyset$$

3. Seien  $(x, y), (z, w) \in X \times X$  verschieden. O.B.d.A.  $x \neq z$ .

Da  $X$  ein  $T_2$ -Raum ist, existieren offene Umgebungen  $U(x), V(z)$  mit  $U(x) \cap V(z) = \emptyset$ . Damit ist

$$(U(x) \times Y) \cap (V(z) \times Y) = \emptyset$$

und  $U(x) \times Y$  ist eine offene Umgebung von  $(x, y) \in X \times Y$  und  $V(z) \times Y$  ist eine offene Umgebung von  $(z, w) \in X \times Y$ .



4.  $f : X \rightarrow Y$  ist surjektiv.

Seien also  $f(x), f(z) \in Y$  zwei beliebige, verschiedene Punkte von  $Y$ . Wir suchen Umgebungen bezüglich der Faktortopologie, die  $f(x)$  und  $f(z)$  trennen. Da  $f(x) \neq f(z)$  gilt, ist  $(x, z)$  kein Element von  $D$ . Da  $D$  abgeschlossen ist, ist  $(X \times X) \setminus D$  offen. Folglich existiert eine Umgebung

$$U(x) \times V(z) \subset (X \times X) \setminus D$$

von  $(x, z)$ , wobei  $U(x)$  und  $V(z)$  in  $X$  offen sind, und es gilt

$$U(x) \cap V(z) = \emptyset.$$

Da  $f : X \rightarrow (Y, \tau_f)$  eine offene Abbildung ist, gilt  $f(U), f(V) \subset Y$  sind offen bzgl.  $\tau_f$ . Weiter gilt:  $f(x) \in f(U)$ ,  $f(z) \in f(V)$  und  $f(U) \cap f(V) = \emptyset$ , denn angenommen,  $y \in f(U) \cap f(V)$ , so existieren ein  $u \in U$  und ein  $v \in V$  mit  $f(u) = y = f(v)$ . Dann gilt aber  $(u, v) \in D$  und  $(u, v) \in U \times V$ . Dies widerspricht der Wahl von  $U \times V \subset (X \times X) \setminus D$ .

□

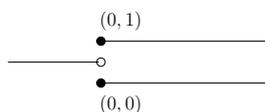
### Beispiel 1.20. Hausdorff-Räume und nicht-Hausdorff-Räume

- $\mathbb{R}^n, S^n, T^n, \mathbb{R}P^n$  und  $\mathbb{C}P^n$  sind nach Satz 1.19  $T_2$ -Räume. Durch direktes Ausrechnen läßt sich beweisen, dass auch Möb und  $K^2$   $T_2$ -Räume sind.
- Der folgende Faktorraum ist nicht  $T_2$ :

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) = \mathbb{R} \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit der Topologie, die von  $\beta_X = \{U \times \{0\}, V \times \{1\} \mid U, V \text{ in } \mathbb{R} \text{ offen}\}$  erzeugt wird. Auf  $X$  führen wir eine Äquivalenzrelation ein, die die beiden Geraden für  $x < 0$  "verklebt".

$$(x, t) \sim (y, s) \iff \begin{cases} x = y, s = t & \text{für } x \geq 0, \\ x = y, s, t \in \{0, 1\} & \text{für } x < 0. \end{cases}$$



In  $X/\sim$  ist der Grenzwert einer Folge  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \rightarrow 0$  nicht eindeutig.  $X/\sim$  ist also nicht  $T_2$ .  $X/\sim$  hat eine abzählbare Basis.

## 1.5 Kompakte und folgenkompakte topologische Räume

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ .  $A$  heißt kompakt, falls es zu jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung gibt, d.h.

$$A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha, \quad U_\alpha \text{ offen} \\ \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I : A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}.$$

$A$  heißt folgenkompakt, falls jede Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  von Punkten aus  $A$  eine in  $A$  konvergente Teilfolge enthält.

**Bemerkung.** Es gilt:  $A \subset \mathbb{R}^n$  ist kompakt, g.d.w..  $A$  ist abgeschlossen und beschränkt. (Satz von Heine-Borel)

- Satz 1.21.**
1. Sei  $X$  ein  $T_2$ -Raum,  $A \subset X$  kompakt. Dann ist  $A$  abgeschlossen.
  2. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten topologischen Raumes ist kompakt.
  3. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $A \subset X$  kompakt, so ist auch  $f(A)$  kompakt.
  4. Seien  $X, Y$  kompakte topologische Räume, dann ist auch  $X \times Y$  kompakt.
  5. Sei  $X$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Dann gilt:

$$X \text{ ist kompakt} \Leftrightarrow X \text{ ist folgenkompakt}$$

(Für " $\Rightarrow$ " ist das erste Abzählbarkeitsaxiom nötig und für " $\Leftarrow$ " das zweite.)

**Bemerkungen.**

- Es existieren kompakte topologische Räume, die nicht folgenkompakt sind.
- Es existieren folgenkompakte topologische Räume, die nicht kompakt sind.

*Beweis.* Die Beweise von 1.) - 4.) laufen genauso wie für metrische Räume. Es wird lediglich Fünftens bewiesen:

- Ist  $X$  kompakt, dann ist  $X$  auch folgenkompakt.

Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge in  $X$ . Gesucht ist eine konvergente Teilfolge. Betrachte  $F_m := \text{cl} \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots\}$ . Es gilt  $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$  und  $F_i$  ist abgeschlossen für alle  $i \in \mathbb{N}$ . *Behauptung*  $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m \neq \emptyset$ . Angenommen  $\bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = \emptyset$ .

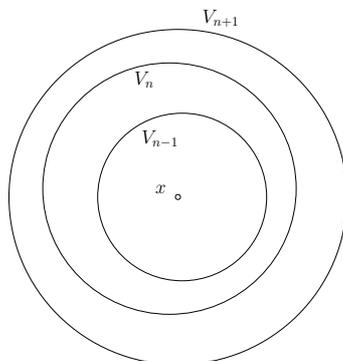
Dann folgt

$$X = X \setminus \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{(X \setminus F_m)}_{\text{offen}}$$

Da  $X$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^N (X \setminus F_{m_i}) = X \setminus \left( \bigcap_{i=1}^N F_i \right).$$

Damit ist  $\bigcap_{i=1}^N F_i = \emptyset$ , aber es gilt  $\bigcap_{i=1}^N F_i = F_{\max(m_1, \dots, m_N)} \neq \emptyset$  – Widerspruch!  
 Folglich existiert ein  $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$ . Nun wählen wir schrumpfenden Umgebungen  $(V_n(x))_{n=1}^{\infty}$  aus Lemma 1.



Da  $x \in \text{cl} \{x_m, x_{m+1}, \dots\} = F_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ , gilt nach Satz 1.4

$$V_n(x) \cap \{x_m, x_{m+1}, \dots\} \neq \emptyset \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Also können wir die folgende Teilfolge wählen:

$$\begin{aligned} x_{n_1} &\in V_1(x) \cap \{x_1, x_2, \dots\} \\ x_{n_2} &\in V_2(x) \cap \{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots\} \\ x_{n_3} &\in V_3(x) \cap \{x_{n_2+1}, x_{n_2+2}, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Teilfolge  $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nach Lemma 1 gegen  $x$ .

- Ist  $X$  folgenkompakt, dann ist  $X$  kompakt.

Man kann aus jeder Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung auswählen, da  $X$  eine abzählbare Basis hat:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, U_i \text{ offen} \Rightarrow U_i \text{ lässt sich als Vereinigung von Basismengen darstellen.}$$

Damit ist  $X = \bigcup_{k \in K \subset \mathbb{N}} W_k$  wobei die  $W_k$  Basismengen sind. Nun wählen wir zu jedem  $k \in K \subset \mathbb{N}$  ein  $U_{i(k)}$  mit  $W_k \subset U_{i(k)}$ .

$$X = \bigcup_{k \in K \subset \mathbb{N}} U_{i(k)}$$

Man kann aus jeder abzählbaren Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung auswählen:

Sei  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$   $W_i \subset X$  offen. Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann existiert zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  ein

$$x_m \in X \setminus \left( \bigcup_{j=1}^m W_j \right).$$

$(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  ist eine Folge in  $X$ . Da  $X$  folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge

$$x_{m_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in X = \bigcup_{i=1}^n W_i.$$

Also existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in W_n$ . Dann  $\exists i_0 \in \mathbb{N} \forall i > i_0 \ x \in W_n$  und

$$x_{m_i} \in \bigcup_{j=1}^{m_i} W_j \quad \forall m_i > n, m_{i_0}$$

Das ist ein Widerspruch zur Wahl von  $x_m$ !

□

### Beispiel 1.22. Beispiele für kompakte Räume

$S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ , Möb und  $K^2$  sind laut Satz 1.21 kompakt.

**Satz 1.23.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und bijektiv,  $X$  kompakt und  $Y T_2$ . Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.

*Beweis.*  $f$  ist bijektiv und stetig. Es genügt zu zeigen, dass  $f$  abgeschlossen ist. Sei  $A \subset X$  eine beliebige abgeschlossene Teilmenge. Da  $X$  kompakt ist, ist auch  $A$  kompakt und damit auch  $f(A)$ , weil  $f$  stetig ist. In einem  $T_2$ -Raum ist aber nach Satz 1.21 jede kompakte Menge auch abgeschlossen. Also ist  $f(A)$  abgeschlossen und somit  $f$  ein Homöomorphismus. □

Man kann jeden topologischen Raum durch Hinzufügen eines zusätzlichen Punktes kompaktifizieren.

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Sei weiterhin  $\infty$  ein zusätzlicher Punkt mit  $\infty \notin X$ . Dann ist

$$\begin{aligned} X_\infty &:= X \cup \{\infty\} \text{ und} \\ \tau_\infty &:= \tau \cup \{(X \setminus A) \cup \{\infty\} \mid A \subset X \text{ abgeschlossen und kompakt}\} \end{aligned}$$

**Satz 1.24.** Es gilt:

1.  $(X_\infty, \tau_\infty)$  ist ein topologischer Raum.
2.  $(X_\infty, \tau_\infty)$  ist kompakt.
3.  $\tau$  ist die von  $X_\infty$  auf  $X$  induzierte Topologie, d.h.  $\tau_\infty|_X = \tau$

4.  $X \subset X_\infty$  ist eine dichte Teilmenge genau dann, wenn  $X$  nicht kompakt ist.

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Übungsaufgabe.
2. Sei  $X_\infty = \bigcup_{i \in I} U_i$  mit  $U_i \in \tau_\infty$ . Dann existiert ein  $i_0 \in I$  mit  $\infty \in U_{i_0}$ . Nach Definition von  $\tau_\infty$  gilt  $U_{i_0} = (X \setminus A) \cup \{\infty\}$  wobei  $A \subset X$  kompakt und abgeschlossen in  $X$  ist. Da  $A$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung von  $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$   $i_j \in I$ . Somit ist

$$X_\infty \subset \underbrace{U_{i_0}}_{=(X \setminus A) \cup \{\infty\}} \cup \underbrace{U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}}_{\supset A}$$

3. Sei  $U \in \tau_\infty \upharpoonright_X$  fixiert. Dann existiert ein  $\mathcal{O} \in \tau_\infty$  mit  $U = X \cap \mathcal{O}$ . Ist  $\mathcal{O} \in \tau$ , so folgt  $U \in \tau$ . Anderenfalls existiert eine abgeschlossene und kompakte Menge  $A \in \tau$ , sodass  $\mathcal{O} = (X \setminus A) \cup \{\infty\}$ . Die Menge  $O = X \setminus A$  ist offen in  $X$  und mit  $U = \mathcal{O} \cap X = O \cap X$  folgt  $U \in \tau$ .

Sei andererseits  $U \in \tau$  fixiert. Aus  $\tau \subset \tau_\infty$  und  $U \subset X$  folgt  $U \in \tau_\infty$  und  $X \cap U = U$ , bzw.  $U \in \tau_\infty \upharpoonright_X$ .

4. Da  $X_\infty$  die einzige Menge ist, die echt über  $X$  liegt, gilt:

$$\begin{aligned} X \text{ dicht in } X_\infty &: \Leftrightarrow cl_{\tau_\infty} X = X_\infty \\ &\Leftrightarrow X \subsetneq cl_{\tau_\infty} X \Leftrightarrow X \text{ ist nicht abgeschlossen.} \end{aligned}$$

Außerdem gilt aber:

$$\begin{aligned} X \text{ abgeschlossen in } \tau_\infty &\Leftrightarrow \{\infty\} = \{\infty\} \cup (X \setminus X) \in \tau_\infty \\ &: \Leftrightarrow X \text{ kompakt (in } X) \text{ (denn } X \text{ ist stets abgeschlossen in } X). \end{aligned}$$

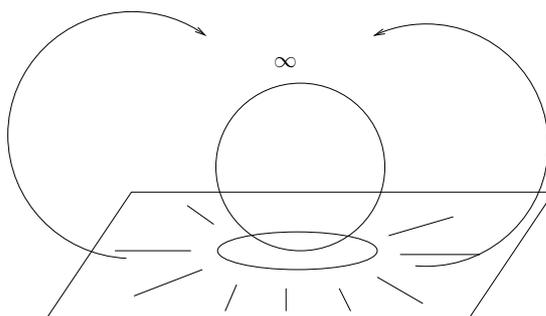
□

**Definition.**  $(X_\infty, \tau_\infty)$  heißt 1-Punkt-Kompaktifizierung von  $X$ .  $\infty$  heißt unendlich ferner Punkt.

**Beispiel 1.25.** Beispiele für 1-Punkt-Kompaktifizierungen.

1.  $S^n \cong \mathbb{R}_\infty^n$
2.  $S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{C}_\infty$
3.  $S^1 \cong \mathbb{R}P^1 \cong \mathbb{R}_\infty$

Wobei “ $\cong$ ” homöomorph meint.



**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt lokal-kompakt, falls es zu jedem  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x) \in \tau$  gibt mit  $clU(x)$  ist kompakt.

**Bemerkungen.**

- $(X_\infty, \tau_\infty)$  ist ein  $T_2$ -Raum, g.d.w.  $(X, \tau)$  ein lokal-kompakter  $T_2$  – Raum ist.
- $(X_\infty, \tau_\infty)$  besitzt eine abzählbare Basis, wenn  $(X, \tau)$  ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis ist.

**Beispiel 1.26. Beispiele für lokal-kompakte Räume**

1.  $X$  ist kompakt, dann ist  $X$  auch lokal-kompakt.
2. Der euklidische Raum  $\mathbb{R}^n$  ist lokal-kompakt, aber nicht kompakt.
3.  $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$  ist nicht lokal-kompakt <sup>2</sup>.

$$\tau_{abz} = \{\mathbb{R} \setminus A \mid A \text{ abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$$

*Behauptung:*  $\mathbb{R}$  ist weder kompakt noch lokal-kompakt bezüglich  $\tau_{abz}$ .

a) Seien  $A_r := \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}, r \in \mathbb{R}$ .

$$\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \underbrace{(\mathbb{R} \setminus A_r)}_{\text{offen}}$$

Angenommen, es existiert eine endliche Teilüberdeckung, dann ist

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus A_{r_i}) = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n A_{r_i}\right)}_{\neq \emptyset} \neq \mathbb{R} \quad \text{Widerspruch!}$$

Damit ist  $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$  ist nicht kompakt.

---

<sup>2</sup>siehe auch Bsp. 1.12 auf Seite 17

- b) Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Jede Umgebung von  $x$  hat die Form  $\mathbb{R} \setminus A$ , wobei  $A$  abzählbar ist. Dann ist

$$cl(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R},$$

da  $\mathbb{R} \setminus A$  überabzählbar ist. Also ist  $cl(\mathbb{R} \setminus A)$  nicht-kompakt und damit  $(\mathbb{R}, \tau_{abz})$  ist nicht lokal-kompakt.

Wir wollen nun noch beweisen, dass topologische Räume  $(X, \tau)$  die eine abzählbare Basis haben und lokal-kompakt sind, auch parakompakt sind.

**Definition.** Sei  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  offene Überdeckung von  $X$ . Eine Familie offener Mengen  $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$  heißt lokal endliche Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ , falls

1.  $\mathcal{V}$  ist eine offene Überdeckung von  $X$ , d.h.  $X = \bigcup_{\beta \in \Lambda} V_\beta$ .
2.  $\mathcal{V}$  ist eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ , d.h. für alle  $V_\beta \in \mathcal{V}$  existiert ein  $U_\alpha \in \mathcal{U}$  mit  $V_\beta \subset U_\alpha$ .
3.  $\mathcal{V}$  ist lokal endlich, d.h. zu jedem  $x \in X$  existiert eine Umgebung  $W(x)$ , die sich nur mit endlich vielen Mengen aus  $\mathcal{V}$  schneidet.

Ein topologischer Raum heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung eine lokal-endliche Verfeinerung besitzt.

**Satz 1.27.** Sei  $X$  ein lokal-kompakter, topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Dann ist  $X$  parakompakt. Genauer: Zu jeder offenen Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$$

existiert eine abzählbare lokal-endliche Verfeinerung

$$\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \Lambda}$$

mit  $cl V_\beta$  ist kompakt für alle  $V_\beta \in \mathcal{V}$ .

**Bemerkung.** Dies benutzt man zur Konstruktion einer Zerlegung der 1.

*Beweis.* In mehreren Schritten.

1. Es existiert eine abzählbare Basis  $\beta$  von  $X$ , so dass  $cl U$  kompakt ist für alle  $U \in \beta$ .

Sei  $\beta'$  eine abzählbare Basis. Zu jedem  $x \in X$  wählen wir eine offene Umgebung  $U(x)$  mit kompaktem Abschluss, das ist möglich, da  $X$  lokal-kompakt ist. Die Menge

$$\beta'' := \{W \in \beta' \mid W \subset U(x) \text{ für ein } x \in X\} \subset \beta'$$

ist abzählbar, da  $\beta'$  abzählbar ist. Sei dann

$$\beta := \{V \cap W \mid V \in \beta', W \in \beta''\},$$

so gilt:

- a)  $\beta$  ist abzählbar.

b)  $\underbrace{cl(V \cap W)}_{\text{abgeschlossen}}$   $\subset cl(W) \subset cl(U(x))$  und  $cl(U(x))$  ist kompakt. Damit ist  $cl(V \cap W)$  kompakt.

c)  $\beta$  ist eine Basis. Denn sei  $U \subset X$  offen und  $U = \bigcup_{V_j \in \beta'} V_j$  sowie

$$X = \bigcup_{x \in X} U(x) = \bigcup_{W_k \in \beta''} W_k,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} U = U \cap X &= \left( \bigcup_{V_j \in \beta'} V_j \right) \cap \left( \bigcup_{W_k \in \beta''} W_k \right) \\ &= \bigcup_{j,k} \underbrace{(V_j \cap W_k)}_{\in \beta} \end{aligned}$$

Somit existiert zu jedem lokal-kompakten topologischen Raum mit abzählbarer Basis eine abzählbare Basis  $\beta$  mit  $cl(U)$  ist kompakt für alle  $U \in \beta$ .

2. Es existiert eine Folge kompakter Teilmengen  $(A_n)_{n=1}^\infty$  in  $X$  mit  $A_n \subset \text{int } A_{n+1}$  und  $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ .

Sei  $\beta = \{W_1, W_2, \dots\}$  eine abzählbare Basis von  $(X, \tau)$ , so dass  $cl W_i$  kompakt ist für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten die kompakten Mengen

$$B_n := \bigcup_{i=1}^n cl W_i \quad n = 1, 2, \dots$$

Dann gilt:  $B_n \subset B_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  und  $X = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ . Wir definieren nun  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  induktiv.  $A_0 := \emptyset$ .  $B_1$  ist kompakt und  $B_1 \subset \bigcup_{i=1}^\infty W_i$  ist eine offene Überdeckung. Folglich existiert eine endliche Teilüberdeckung  $B_1 \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_k}$ . Wir definieren

$$A_1 := cl(W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_k}) = \bigcup_{j=1}^k cl W_{i_j}.$$

$A_1$  ist kompakt und  $B_1 \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_k} \subset \underbrace{\text{int}(cl(W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_k}))}_{= \text{int}(A_1)}$ .

Induktionsvoraussetzung: Es existieren kompakte Mengen  $A_1, \dots, A_k$  so dass

$$B_i \cup A_{i-1} \subset \text{int } A_i \quad i = 1, \dots, k.$$

Zur Konstruktion von  $A_{k+1}$ :  $B_{k+1} \cup A_k$  ist kompakt und wird von  $\beta = \{W_i\}_{i=1}^\infty$  überdeckt. Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung  $B_{k+1} \cup A_k \subset W_{j_1} \cup \dots \cup W_{j_l}$ . Dann sei

$$A_{k+1} := cl(W_{j_1} \cup \dots \cup W_{j_l})$$

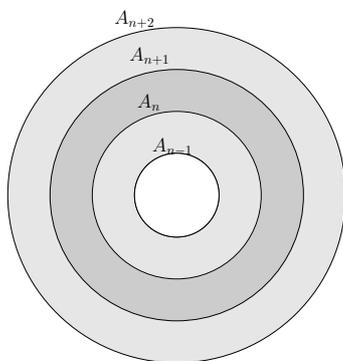
Wie beim Induktionsanfang folgt dann, dass  $A_{k+1}$  kompakt ist und  $B_{k+1} \cup A_k \subset \text{int } A_{k+1}$ . Da  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  gilt, folgt  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

3. Sei  $\mathcal{U}$  eine beliebige offene Überdeckung von  $X$ . Wir konstruieren die gesuchte lokal endliche Verfeinerung  $\mathcal{V}$ .

Sei wieder  $\beta$  die Basis aus Schritt 1 und bezeichne  $\hat{\mathcal{U}}$  die folgende Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ :

$$\hat{\mathcal{U}} := \{W \subset X \mid W \in \beta \text{ und } \exists U \in \mathcal{U} \ W \subset U\}$$

Dann ist  $\hat{\mathcal{U}}$  eine abzählbare Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  so dass  $\text{cl}(W)$  kompakt ist für alle  $W \in \hat{\mathcal{U}}$ . Wir müssen aus  $\hat{\mathcal{U}}$  noch eine lokal-endliche Verfeinerung machen. Wir betrachten die Ausschöpfung  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  von  $X$  durch die kompakten Mengen aus Schritt 2.  $A_{n+1} \setminus \text{int}(A_n)$  ist kompakt, da eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt ist.  $\text{int}(A_{n+2}) \setminus A_{n-1}$  ist offen.



Es gilt weiter:

$$A_{n+1} \setminus \text{int}(A_n) \subset \text{int}(A_{n+2}) \setminus A_{n-1}.$$

Sei

$$U_{\alpha,n} := U_{\alpha} \cap (\text{int}(A_{n+2}) \setminus A_{n-1}), \quad U_{\alpha} \in \hat{\mathcal{U}}.$$

Dann ist für fixiertes  $n \in \mathbb{N}$   $\hat{\mathcal{U}}_n := \{U_{\alpha,n} \mid U_{\alpha} \in \hat{\mathcal{U}}\}$  eine offene Überdeckung von  $A_{n+1} \setminus \text{int}(A_n)$ . Da letztere Menge kompakt ist, existieren endlich viele Mengen  $V_{n_1}, \dots, V_{n_{\beta_n}} \in \hat{\mathcal{U}}_n$ , die den "Ring"  $A_{n+1} \setminus \text{int}(A_n)$  überdecken.

Für

$$\mathcal{V} := \{V_{n_{j_n}} \mid n = 1, 2, \dots, j_n = 1, \dots, \beta_n\}$$

gilt nun:

- $\mathcal{V}$  ist eine offene Überdeckung von  $X$ , da  $(A_n)$  eine Ausschöpfung von  $X$  ist.
- $\mathcal{V}$  ist eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ , da  $\mathcal{V}$  eine Verfeinerung von  $\hat{\mathcal{U}}$  und  $\hat{\mathcal{U}}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  ist.
- $\text{cl}(V_{n_j})$  ist kompakt, da  $V_{n_j} \subset U_{\alpha} \in \hat{\mathcal{U}}$  und  $\text{cl } U_{\alpha}$  kompakt ist.

- d)  $\mathcal{V}$  ist lokal-endlich, denn ist  $x \in X$ , so existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x \in A_n \subset \text{int}(A_{n+1})$  und  $\text{int}(A_{n+1})$  ist eine offene Umgebung von  $x$ , die sich nur mit endlich vielen Mengen aus  $\mathcal{V}$  schneidet, nämlich

$$\left\{ V_{k_{j_k}} \mid k \leq n+2, j_k = 1, \dots, p_k \right\}$$

□

## 1.6 Zusammenhängende und bogenzusammenhängende Mengen in topologischen Räumen

**Definition.** Ein topologischer Raum  $(X, \tau)$  heißt zusammenhängend genau dann, wenn keine offenen, disjunkten, nicht leeren Mengen  $U, V \subset X$  mit  $X = U \cup V$  existieren. Dies ist äquivalent zu

$$\{U \subset X : U \text{ ist offen und abgeschlossen}\} = \{\emptyset, X\}.$$

$(X, \tau)$  heißt bogenzusammenhängend genau dann, wenn für alle  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\omega : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  mit  $\omega(a) = x$ ,  $\omega(b) = y$  existiert.  $\omega$  heißt Weg von  $x$  nach  $y$ .

$A \subset X$  heißt zusammenhängend (bogenzusammenhängend) genau dann, wenn  $(A, \tau_A)$  zusammenhängend (bogenzusammenhängend) ist. D.h.  $A \subset X$  ist zusammenhängend, g.d.w. keine offenen Mengen  $U, V \subset X$  existieren, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- $A \subset U \cup V$ ,
- $A \cap (U \cap V) = \emptyset$ ,
- $A \cap U \neq \emptyset$  und  $A \cap V \neq \emptyset$ .

### Beispiel 1.28. Zusammenhängende und bogenzusammenhängende Räume

1. Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  sind zusammenhängend.
2.  $A \subset \mathbb{R}$  ist zusammenhängend, g.d.w.  $A$  ist ein Intervall (offen, halboffen, abgeschlossen).
3. Konvexe Mengen im  $\mathbb{R}^n$  sind bogenzusammenhängend.
4. **Die Sorgenfrey-Linie**  $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$

Eine Basis der Topologie<sup>3</sup>  $\tau_{sorg}$  ist:  $\beta = \{[a, b) \mid -\infty < a < b < \infty\}$ .

*Behauptung:*  $A$  ist zusammenhängend bzgl.  $\tau_{sorg}$ , g.d.w.  $A = \{x\}$ . D.h.  $(\mathbb{R}, \tau_{sorg})$  ist total unzusammenhängend.

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ): Eine einelementige Menge ist nach Definition zusammenhängend, da sie nicht in zwei disjunkte Mengen zerlegbar ist.

---

<sup>3</sup>siehe auch Bsp. 1.7 auf Seite 14

( $\Rightarrow$ ): Ein Intervall  $[a, b]$  ist offen und abgeschlossen, denn:

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left( \bigcup_{a \geq n \in \mathbb{Z}} [n, a) \cup \bigcup_{b < n \in \mathbb{Z}} [b, n) \right)}_{\text{offen}}$$

Sei  $T \subset \mathbb{R}$  zusammenhängend und  $x \in T$ . Dann ist  $U = [x, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$  offen für alle  $\varepsilon > 0$  und  $V = \mathbb{R} \setminus [x, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$  ebenfalls, da  $[x, x + \varepsilon)$  auch abgeschlossen ist. Es gilt dann  $U \cap V = \emptyset$  und damit  $U \cap V \cap T = \emptyset$ . Da  $T$  zusammenhängend und  $x \in T \cap U$  ist, muss  $T \cap V = \emptyset$  gelten. Daraus folgt dann  $T \cap (\mathbb{R} \setminus [x, x + \varepsilon)) = \emptyset$  für alle  $\varepsilon > 0$ , sodass  $T \subset [x, x + \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$ , bzw.  $T = \{x\}$ .  $\square$

**Satz 1.29.** *Es gilt*

1. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $A \subset X$  zusammenhängend (bogenzusammenhängend), so ist  $f(A) \subset Y$  zusammenhängend (bogenzusammenhängend).
2. Sei  $A \subset X$  bogenzusammenhängend, so ist  $A$  zusammenhängend.

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig und  $A \subset X$  zusammenhängend. Angenommen  $f(A)$  ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene Mengen  $U, V \subset Y$  mit  $f(A) \subset U \cup V$ ,  $f(A) \cap U \cap V = \emptyset$ ,  $f(A) \cap U \neq \emptyset$  und  $f(A) \cap V \neq \emptyset$ . Damit sind  $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subset X$  offen, da  $f$  stetig ist, und es gilt  $A \cap f^{-1}(V) \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ . Weiter ist  $A \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ ,  $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ ,  $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Also ist  $A$  nicht zusammenhängend. Sei  $A$  bogenzusammenhängend. Dann existiert für alle  $x, y \in A$  eine stetige Abbildung  $\omega : [a, b] \rightarrow X$  mit  $Im(\omega) \subset A$ ,  $\omega(a) = x$ , und  $\omega(b) = y$ , sodass  $f \circ \omega$  ein stetiger Weg von  $f(x)$  nach  $f(y)$  in  $f(A)$  ist.
2. Sei  $A$  bogenzusammenhängend. Angenommen  $A$  ist nicht zusammenhängend. Dann existieren disjunkte Mengen  $U, V \subset X$  mit  $A \subset (U \cup V)$ ,  $A \cap U \neq \emptyset$ ,  $A \cap V \neq \emptyset$  und  $A \cap U \cap V = \emptyset$ . Sei  $x \in A \cap U$  und  $y \in A \cap V$ . Da  $A$  bogenzusammenhängend ist, existiert eine stetige Abbildung  $\omega : [a, b] \rightarrow A \subset X$  mit  $\omega(a) = x$ ,  $\omega(b) = y$ . Da  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  zusammenhängend ist, ist auch  $\omega([a, b]) \subset X$  zusammenhängend. Es gilt aber  $x \in \omega([a, b]) \cap U \neq \emptyset$ ,  $y \in \omega([a, b]) \cap V \neq \emptyset$ ,  $\omega([a, b]) \subset U \cup V$  und  $\omega([a, b]) \cap (U \cap V) = \emptyset$ . Das ist ein Widerspruch.  $\square$

**Beispiel 1.30. Bogenzusammenhängende Räume**

1.  $\mathbb{R}^n, S^n, T^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ , Möbiusband und Kleinsche Flasche sind bogenzusammenhängend und somit auch zusammenhängend.
2. Nicht jede zusammenhängende Menge ist bogenzusammenhängend.

Beispiel: "Floh und Kamm"

Sei  $X \subset \mathbb{C}$ ,  $X = A \cup B$  wobei

$$A = \{i\} = \text{Floh} \quad B = \{[0, 1]\} \cup \left\{ \frac{1}{n} + iy \mid y \in [0, 1], n \in \mathbb{N} \right\} = \text{Kamm}$$

Dann ist  $X \subset \mathbb{C}$  ist zusammenhängend aber nicht bogenzusammenhängend.

**Satz 1.31.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum.

1. Sei  $A \subset X$  zusammenhängend. Gilt für  $B \subset X$   $A \subset B \subset cl A$ , so ist auch  $B$  zusammenhängend. Insbesondere ist der Abschluss jeder zusammenhängenden Menge zusammenhängend.
2. Seien  $A_i \subset X, i \in I$  beliebig viele zusammenhängende Mengen, wobei je zwei dieser Mengen einen nicht leeren Durchschnitt haben. Dann ist

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

zusammenhängend.

*Beweis.* Zu den einzelnen Aussagen:

1. Angenommen  $B$  ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene Mengen  $U, V \subset X$  mit  $B \subset U \cup V, B \cap U \cap V = \emptyset, B \cap U \neq \emptyset$  und  $B \cap V \neq \emptyset$ . Da  $A \subset B$  ist, gilt auch  $A \subset U \cup V$  und  $A \cap U \cap V = \emptyset$ . *Behauptung:*  $A$  ist auch nicht zusammenhängend, also  $A \cap U \neq \emptyset$  und  $A \cap V \neq \emptyset$ . Angenommen  $A \cap U = \emptyset$ . Dann ist  $A$  eine Teilmenge der abgeschlossenen Menge  $X \setminus U$ . Dies impliziert aber auch  $B \subset cl(A) \subset X \setminus U$ , bzw.  $B \cap U = \emptyset$ .
2. Angenommen  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ist nicht zusammenhängend. Dann existieren offene Mengen  $U, V \subset X$  mit  $A \subset U \cup V, A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset$  und  $A \cap U \cap V = \emptyset$ . Sei  $i \in I$  beliebig. Dann ist  $A_{i_0} \subset U \cup V$ . Da  $A_{i_0}$  zusammenhängend ist, gilt  $A_{i_0} \cap U = \emptyset$  oder  $A_{i_0} \cap V = \emptyset$  (beides kann nicht gelten, da  $A_{i_0} \subset U \cup V$ ). Also ist  $A_{i_0} \subset U \cap A$  oder  $A_{i_0} \subset V \cap A$ . Da jeweils zwei Mengen  $A_\nu, A_\mu$  einen nicht leeren Durchschnitt haben, gilt entweder  $A_i \subset U \cap A \forall i \in I$  oder  $A_i \subset V \cap A \forall i \in I$ , denn  $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ . Damit ist

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset U \cap A \text{ oder } A \subset V \cap A.$$

Das ist Widerspruch zur Voraussetzung:  $U \cap A \neq \emptyset$  und  $A \cap V \neq \emptyset$ .

□

**Definition.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ . Die Menge

$$C(x) := \bigcup_{\substack{A \text{ zsh} \\ x \in A}} A$$

heißt die durch  $x$  bestimmte Zusammenhangskomponente von  $X$ .

**Bemerkungen.**

1.  $C(x)$  ist zusammenhängend nach Satz 1.31.

2.  $C(x)$  ist die größte zusammenhängende Menge, die  $x$  enthält.
3. Sind  $x, y \in X$ , so gilt entweder  $C(x) = C(y)$  oder  $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ :  
Angenommen  $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ , so folgt mit Satz 1.31, dass  $C(x) \cup C(y)$  zusammenhängend ist.  $C(x) \cup C(y)$  enthält aber  $x$  und  $y$ . Damit ist

$$C(x) \cup C(y) \subset C(x) \text{ und } C(x) \cup C(y) \subset C(y)$$

D.h.  $C(x) = C(y)$ .

4. Damit zerlegt sich  $X$  in seine Zusammenhangskomponenten:

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{x \in X} C(x) \\ &= \dot{\bigcup}_i C(x_i) \quad (\text{disjunkte Vereinigung}) \end{aligned}$$

**Satz 1.32.** *Jede Zusammenhangskomponente von  $(X, \tau)$  ist abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $x \in X$ ,  $C(x)$  die Zusammenhangskomponente, die  $x$  enthält. Dann ist  $cl C(x)$  nach Satz 1.31 zusammenhängend und enthält  $x$ . Es gilt also  $cl C(x) \subset C(x) \subset cl C(x)$  und damit  $C(x) = cl C(x)$ , d.h.  $C(x)$  ist abgeschlossen.  $\square$



# 2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

## 2.1 Definition und Beispiele

**Definition.** Ein topologischer Raum  $M$  heißt  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, falls gilt:

1.  $M$  ist ein  $T_2$ -Raum mit abzählbarer Basis.
2.  $M$  ist lokal euklidisch, d.h. zu jedem  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U(x) \subset M$ , die homöomorph zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Bemerkung:**

1. Die  $T_2$ -Eigenschaft kann man nicht aus den anderen Axiomen herleiten.
2. Eine topologische Mannigfaltigkeit ist lokal kompakt, da der  $\mathbb{R}^n$  lokal kompakt ist. Somit ist nach Satz 1.27 aus Kapitel 1 jede topologische Mannigfaltigkeit auch parakompakt.
3. Die Zahl  $n$  ist eindeutig bestimmt und heißt Dimension von  $M$ . Die Eindeutigkeit folgt aus dem Satz über die Invarianz der Dimension: Seien  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $\tilde{U}$  homöomorph zu  $\tilde{V}$ , so gilt  $n = m$ .
4. Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  genau dann zusammenhängend, wenn  $M$  bogenzusammenhängend ist.  
Wir überlassen dies dem Leser als Übungsaufgabe. Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit auch bogenzusammenhängend ist. Man fixiere dazu einen Punkt  $x_0 \in M$  und betrachte die Menge  $F$ :

$$F := \{y \in M \mid \exists \text{ stetiger Weg von } x_0 \text{ nach } y\} \subset M$$

Zu zeigen ist dann, dass  $F$  offen und abgeschlossen ist.

**Bezeichnungen und Definition:**

- Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Dann existiert eine Umgebung  $U(x) \subset M$  und ein Homöomorphismus

$$\varphi : U(x) \longrightarrow \tilde{U} \in \tau_{\mathbb{R}^n}$$

$(U(x), \varphi)$  heißt Karte um  $x \in M$ , und  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  heißen lokale Koordinaten um  $x \in M$ .

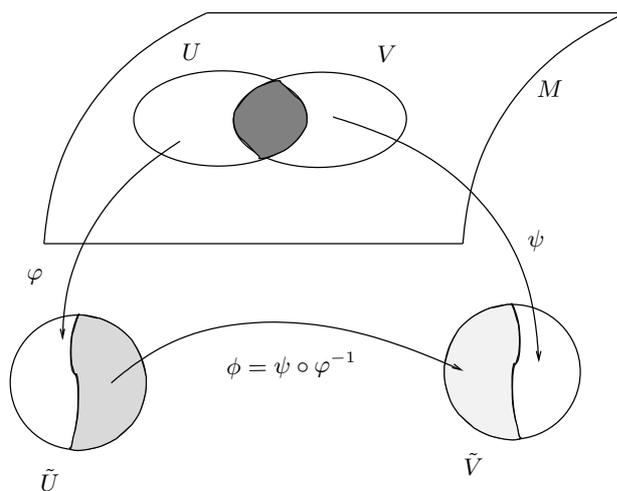
- Seien  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  und  $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$  Karten auf  $M$  mit  $V \cap U \neq \emptyset$ . Dann ist

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

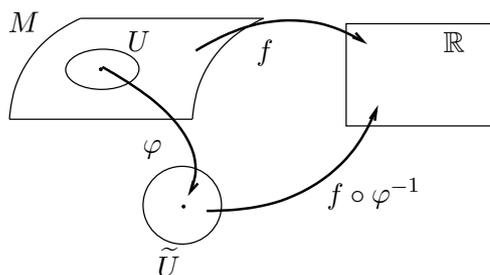
ein Homöomorphismus und heißt Kartenübergang von  $(U, \varphi)$  nach  $(V, \psi)$ .

- Koordinatentransformation:

$$\varphi(U \cap V) \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n)) := \psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$$



Die topologischen Mannigfaltigkeiten sind die Grundobjekte, auf denen wir Geometrie und Analysis betreiben wollen. Dazu benötigen wir einen Differenzierbarkeitsbegriff.



Man könnte z.B. eine Funktion  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in M$  differenzierbar nennen, falls für jede Karte  $(U, \varphi)$  um  $x_0$

$$f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

in  $\varphi(x_0)$  differenzierbar ist. Dabei tritt jedoch folgendes Problem auf: Seien  $(U, \varphi), (V, \psi)$  zwei Karten um  $x_0$ , dann gilt:

$$f \circ \psi^{-1} = f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \psi^{-1}).$$

Ist  $f \circ \varphi^{-1}$  differenzierbar, dann braucht  $f \circ \psi^{-1}$  jedoch nicht differenzierbar zu sein! Damit die Differenzierbarkeit von  $f$  sinnvoll erklärt werden kann, fordern wir, dass  $\varphi \circ \psi^{-1}$  für alle Karten differenzierbar ist.

**Definition.** Eine Familie  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  von Karten der topologischen Mannigfaltigkeit  $M^n$  heißt  $C^k$ -Atlas auf  $M^n$  ( $0 \leq k \leq \infty$ ), falls

1.  $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2. Für alle  $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$  sind die Kartenübergänge

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

$C^k$ -Abbildungen.

Zwei  $C^k$ -Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\tilde{\mathcal{A}}$  auf  $M^n$  heißen äquivalent, falls  $\mathcal{A} \cup \tilde{\mathcal{A}}$  ein  $C^k$ -Atlas auf  $M$  ist.  $[\mathcal{A}]$  ist die durch den Atlas  $\mathcal{A}$  bestimmte Äquivalenzklasse von Atlanten.

Ein Paar  $(M, [\mathcal{A}])$  aus einer  $n$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit  $M$  und einer Äquivalenzklasse von  $C^k$ -Atlanten auf  $M$  heißt  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit.  $[\mathcal{A}]$  heißt auch  $C^k$ -Struktur auf  $M$  und ist durch die Angabe von  $\mathcal{A} \in [\mathcal{A}]$  eindeutig bestimmt.

Ein Atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  auf der  $C^k$ -Mannigfaltigkeit  $(M, [\mathcal{A}])$  heißt zulässig, falls  $\tilde{\mathcal{A}} \in [\mathcal{A}]$  (d.h.  $\tilde{\mathcal{A}} \sim \mathcal{A}$ ). Eine Karte  $(U, \varphi)$  auf  $(M, [\mathcal{A}])$  heißt zulässig, falls  $\mathcal{A} \cup \{(U, \varphi)\} \sim \mathcal{A}$ .

### Bemerkungen:

1. Jede topologische Mannigfaltigkeit ist eine  $C^0$ -Mannigfaltigkeit. Die  $C^0$ -Struktur auf  $M^n$  ist eindeutig bestimmt, da alle  $C^0$ -Atlanten äquivalent sind.
2. Auf einer topologischen Mannigfaltigkeit können verschiedene  $C^k$ -Strukturen existieren, falls  $k \geq 1$ .

Sei  $M = \mathbb{R}^1$ ,  $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}, \varphi_1 = \text{id})\}$  und  $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbb{R}, \varphi_2)\}$  mit  $\varphi_2(x) = x^3$ .  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  sind  $C^k$ -Atlanten auf  $M$  aber  $\mathcal{A}_1 \not\sim \mathcal{A}_2$ , denn

$$\begin{aligned} \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \sqrt[3]{y} \end{aligned}$$

ist in 0 nicht differenzierbar.

### Information zur Existenz von $C^k$ -Strukturen:

1. Existiert auf jeder topologischen Mannigfaltigkeit eine  $C^1$ -Struktur? Nein!
  - Für alle  $n \geq 10$  existieren  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten, die keine  $C^1$ -Struktur haben. (1. Beispiel Kervain 1960)

- Für  $n \leq 4$  existiert auf jeder  $n$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit eine  $C^1$ -Struktur.
2. Ist  $M^n$  eine topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A}$  ein  $C^k$ -Atlas auf  $M$ , so ist  $\mathcal{A}$  auch ein  $C^l$ -Atlas für alle  $l \leq k$ .
  3. Es gilt auch die Umkehrung: Sei  $(M, [\mathcal{A}])$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit,  $k \geq 1$ . Dann existiert für jedes  $l, k \leq l \leq \infty$ , ein  $C^l$ -Atlas  $\hat{\mathcal{A}}$  mit  $\mathcal{A} \sim_{C^k} \hat{\mathcal{A}}$ . D.h.  $(M, [\hat{\mathcal{A}}])$  ist eine  $C^l$ -Mannigfaltigkeit. Insbesondere hat jede  $C^1$ -Mannigfaltigkeit  $M$  einen zulässigen Atlas, der eine  $C^\infty$ -Struktur auf  $M$  liefert.<sup>1</sup>(\*)

### Vereinbarungen:

- Wir betrachten im folgenden nur noch  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten:  
Nach (\*) ist dies keine Einschränkung gegenüber  $C^k$  für  $k \geq 1$ . Mit einer differenzierbaren bzw. glatten Mannigfaltigkeit ist nun immer eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit gemeint!
- Wir lassen oft die Angabe der Atlanten weg.

**Satz 2.1.** *Sei  $N$  ein topologischer Raum,  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit dem zulässigen Atlas  $\mathcal{A}$  und  $f : N \rightarrow M$  ein Homöomorphismus. Sei*

$$\mathcal{A}_f := \{(f^{-1}(U), \varphi \circ f) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}.$$

*Dann ist  $(N, [\mathcal{A}_f])$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit.  $[\mathcal{A}_f]$  ist eindeutig bestimmt.*

*Beweis.*  $f$  ist ein Homöomorphismus und damit ist  $N$   $T_2$  und besitzt eine abzählbare Basis.

$N$  ist lokal euklidisch, denn zu jedem  $x \in N$  existiert eine Karte  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  um  $f(x) \in M$ . D.h.  $(f^{-1}(U), \varphi \circ f)$  ist eine Karte um  $x$ .

Die Kartenübergänge: Seien  $(f^{-1}(U), \varphi \circ f)$ ,  $(f^{-1}(V), \psi \circ f)$  Karten um  $x$ , dann ist

$$(\psi \circ f) \circ (\varphi \circ f)^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

nach Voraussetzung  $k$ -fach stetig-differenzierbar.

Sei  $\mathcal{A} \sim \hat{\mathcal{A}}$  auf  $M$ , so ist  $\mathcal{A}_f \sim \hat{\mathcal{A}}_f$ , da die gleichen Kartenübergänge auftreten.  $\square$

### Beispiel 2.2. Beispiele für Mannigfaltigkeiten

1. Der  $\mathbb{R}^n$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit einem Atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, id)\}$ .
2. Der  $\mathbb{C}^n$  ist eine  $2n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit einem Atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}^n, \varphi)\}$ , wobei

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) := (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

mit  $z_j = x_j + iy_j$ .

<sup>1</sup>Whitney: Annals of Math. 37 (1936), 645-680  
Munkres: Elementary Differential Topology

### 3. Die Sphäre $S^n$ als Mannigfaltigkeit

Die  $S^n$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit<sup>2</sup> mit einem Atlas aus zwei Karten: der Projektion aus dem Nordpol  $\varphi_N$  und  $\varphi_S$ , der Projektion aus dem Südpol.

$$\begin{aligned} \varphi_N : S^n \setminus \{NP\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \\ \varphi_S : S^n \setminus \{SP\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Für die Kartenübergänge gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_S \circ \varphi_N^{-1} : \underbrace{\varphi_N(S^n \setminus \{NP, SP\})}_{=\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} &\longrightarrow \underbrace{\varphi_S(S^n \setminus \{NP, SP\})}_{=\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^2} \\ \varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

D.h.  $\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{NP\}, \varphi_N), (S^n \setminus \{SP\}, \varphi_S)\}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas.

### 4. Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ als Mannigfaltigkeit

Der reell-projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  ist eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit<sup>3</sup>, denn:

- $\mathbb{R}P^n$  ist ein  $T_2$ -Raum mit abzählbarer Basis.
- Der  $\mathbb{R}P^n$  ist homöomorph zur Menge aller Geraden  $\mathbb{R} \cdot x$ ,  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ , im  $\mathbb{R}^{n+1}$  versehen mit der Faktortopologie.

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \quad x \sim y : \iff \mathbb{R} \cdot x = \mathbb{R} \cdot y$$

Die Mengen  $\tilde{U}_i := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$  mit  $i = 1, \dots, n+1$  sind offen in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , und

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{R}P^n$$

ist eine offene Abbildung. D.h.  $U_i := \pi(\tilde{U}_i) \subset \mathbb{R}P^n$  ist offen für  $i = 1, \dots, n+1$  und

$$\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$$

Definition einer Kartenabbildung auf  $U_i$ : Da

$$[x_1 : \dots : x_{n+1}] = \left[ \frac{x_1}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_{n+1}}{x_i} \right]$$

<sup>2</sup>siehe auch Bsp. 2 auf Seite 10 und Bsp. 1

<sup>3</sup>siehe auch Bsp. 4 auf Seite 11 und Bsp. 2 auf Seite 21

ist

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [x_1 : \dots : x_{n+1}] &\longmapsto \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

bijektiv. Und da

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i : \tilde{U}_i &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right) \end{aligned}$$

stetig ist, ist auch  $\varphi_i$  stetig. Die Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_i \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \pi((y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n)) \end{aligned}$$

ist stetig, da  $\pi$  stetig ist. Damit ist der  $\mathbb{R}P^n$  eine  $n$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

- Nun zur  $C^\infty$ -Struktur:

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, \dots, n+1\}$$

bildet einen  $C^\infty$ -Atlas, denn für  $i < j$  ist

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \underbrace{\varphi_i(U_i \cap U_j)}_{\mathbb{R}^n \cap \{z_{j-1} \neq 0\}} \longrightarrow \underbrace{\varphi_j(U_i \cap U_j)}_{=\mathbb{R}^n \cap \{z_i \neq 0\}}$$

mit

$$\begin{aligned} &\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) \\ &= \varphi_j(\pi(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_i, \dots, \underbrace{z_{j-1}}_{j\text{-te Stelle}}, \dots, z_n)) \\ &= \left( \frac{z_1}{z_{j-1}}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_{j-1}}, \frac{1}{z_{j-1}}, \dots, \frac{z_{j-2}}{z_{j-1}}, 1, \frac{z_j}{z_{j-1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{j-1}} \right) \end{aligned}$$

eine  $C^\infty$ -Abbildung. Analog folgt dies auch für  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ .

Der  $\mathbb{R}P^n$  ist also auch eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

## 5. Offene Untermannigfaltigkeiten

Sei  $(M, [\mathcal{A}])$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $B \subset M$  eine offene Teilmenge von  $M$ . Dann ist  $B$  mit dem Atlas

$$\mathcal{A}_B := \{(B \cap U, \varphi|_{B \cap U}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Die Gruppe der invertierbaren  $(n \times n)$ -Matrizen ist z.B. eine offene Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{n^2}$ , denn

$$Gl(n, \mathbb{R}) = (\det)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset M_{\mathbb{R}}(n, n) = \mathbb{R}^{n^2}$$

und die Determinantenfunktion ist stetig und  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist offen.

## 6. Produktmannigfaltigkeiten

Seien  $(M^n, [\mathcal{A}])$  und  $(\tilde{M}^m, [\tilde{\mathcal{A}}])$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Auf  $M \times \tilde{M}$  definieren wir einen Atlas durch:

$$\mathcal{A}_{M \times \tilde{M}} := \left\{ (U \times V, \varphi \times \psi) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, (V, \psi) \in \tilde{\mathcal{A}} \right\}$$

Damit ist  $(M \times \tilde{M}, [\mathcal{A}_{M \times \tilde{M}}])$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Zum Beispiel ist

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n\text{-mal}}$$

eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

## 7. Untermannigfaltigkeiten

Sei  $(\tilde{M}, [\tilde{\mathcal{A}}])$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $N$  und

$$M \subset \tilde{M}$$

eine beliebige Teilmenge.  $M$  heißt  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\tilde{M}$ , falls für jeden Punkt  $x \in M \subset \tilde{M}$  eine zulässige Karte  $(U, \varphi)$  von  $\tilde{M}$  um  $x$  existiert, so dass

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \{x_{n+1} = \dots = x_N = 0\}.$$

Jede  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit  $M \subset \tilde{M}$  ist eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Atlas

$$\mathcal{A}_M := \left\{ (U \cap M, \varphi|_{U \cap M}) \mid \begin{array}{l} (U, \varphi) \text{ ist eine zulässige Karte mit} \\ \varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \{x_{n+1} = \dots = x_N = 0\} \end{array} \right\}$$

Die Kartenübergänge sind  $C^\infty$ , da sie die Einschränkungen der Kartenübergänge von zulässigen Karten von  $\tilde{M}$  auf den Unterraum  $\mathbb{R}^n$  sind.

## 2.2 Differenzierbare Abbildungen

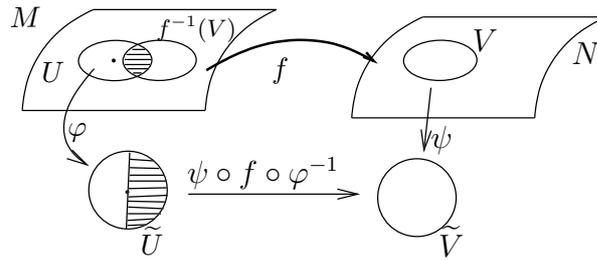
**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten und

$$F : M \longrightarrow N$$

eine Abbildung.  $F$  heißt  $C^k$ -Abbildung ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ), falls für alle zulässigen Karten  $(U, \varphi)$  von  $M$  und  $(V, \psi)$  von  $N$  gilt, dass

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$$

eine  $C^k$ -Abbildung ist.  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$  heißt Kartendarstellung oder Koordinatendarstellung von  $F$ .



$C^k(M, N)$  bezeichnet die Menge aller  $C^k$ -Abbildungen von  $M$  nach  $N$  und  $C^k(M)$  den Vektorraum aller  $C^k$ -Abbildungen von  $M$  nach  $\mathbb{R}$ . Mit der Multiplikation

$$(f \cdot h)(x) := f(x) \cdot h(x) \quad \forall x \in M$$

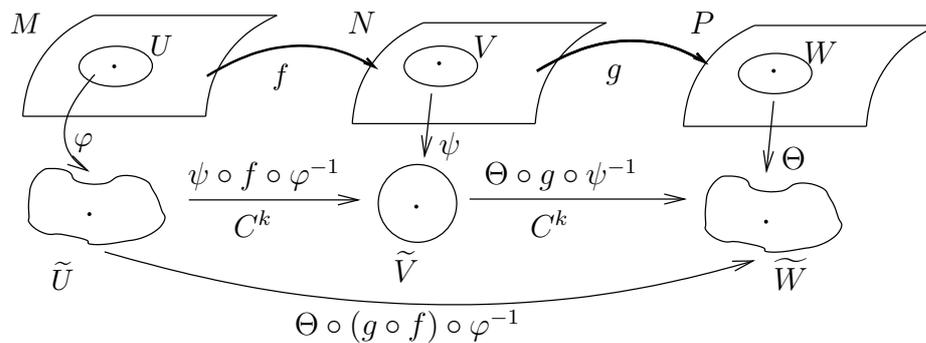
ist  $C^k(M)$  sogar ein Ring.

**Satz 2.3.** *Es gilt:*

1. Seien  $(M, [\mathcal{A}_M])$  und  $(N, [\mathcal{A}_N])$  Mannigfaltigkeiten. Es genügt, die Differenzierbarkeit der Kartendarstellungen einer Funktion  $f : M \rightarrow N$  für alle Karten aus  $\mathcal{A}_M$  und  $\mathcal{A}_N$  zu überprüfen.
2. Seien  $f \in C^k(M, N)$  und  $g \in C^k(N, P)$ , so ist  $g \circ f \in C^k(M, P)$ .

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Übungsaufgabe!
2. Dies folgt unmittelbar aus



da die Verknüpfung von glatten Abbildungen im  $\mathbb{R}^n$  bekanntlich auch glatt ist. □

**Definition.** Seien  $M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten.

1.  $F : M \rightarrow N$  heißt  $C^k$ -Diffeomorphismus, falls  $F$  bijektiv ist,  $F \in C^k(M, N)$  und  $F^{-1} \in C^k(N, M)$ .
2.  $M$  und  $N$  heißen diffeomorph, falls es einen  $C^\infty$ -Diffeomorphismus von  $M$  nach  $N$  gibt.
3.  $\text{Diff}(M, N)$  bezeichnet die Menge aller  $C^\infty$ -Diffeomorphismen von  $M$  nach  $N$ .

**Satz 2.4.** *Es gilt:*

1. Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$  eine zulässige Karte. Dann ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus zwischen den entsprechenden offenen Untermannigfaltigkeiten.
2. Sei  $f : M \rightarrow N$  ein Homöomorphismus zwischen den topologischen Räumen und sei  $(N, [\mathcal{A}])$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$f : (M, [\mathcal{A}_f]) \rightarrow (N, [\mathcal{A}])$$

ein Diffeomorphismus.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1.  $U$  ist eine Mannigfaltigkeit mit einer zulässigen Karte  $(U, \varphi)$ .  $\tilde{U}$  ist eine Mannigfaltigkeit mit einer zulässigen Karte  $(\tilde{U}, id)$ . Die Kartendarstellung von  $\varphi$  ist:

$$id \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = id$$

und damit glatt.

2. Die Kartendarstellung von  $f$  ist:

$$\varphi \circ f \circ (\psi \circ f)^{-1} = \varphi \circ f \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$$

und damit auch glatt.

□

### Bemerkungen zu Diffeomorphietypen von Mannigfaltigkeiten:

- Auf einer Mannigfaltigkeiten können nicht äquivalente  $C^\infty$ -Atlanten existieren, meistens sind sie jedoch diffeomorph.
- Auf top. Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n \leq 3$  existiert nur ein Diffeomorphietyp.
- Jede zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu  $S^1$  oder  $\mathbb{R}$ .
- Im Fall  $n = 2$  kennt man alle glatten zsh. Mannigfaltigkeiten.
- Im Fall  $n = 3$  sind für kompakte Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) nach dem Beweis von Grigori Perelman seit 2002 alle Homöomorphie- (und damit auch Diffeomorphie-) Typen bekannt.
- Ab  $n \geq 4$  existieren mehrere Diffeomorphiestrukturen, z.B. 28 auf  $S^7$ .

- Für  $n \geq 5$  existieren höchstens abzählbar viele Diffeomorphiestrukturen. Ist  $M^n$  darüber hinaus kompakt, so existieren höchstens endlich viele Strukturen.
- Mit der “Yang-Mills-Theorie” (ca. 1984) kann man auf dem  $\mathbb{R}^4$  überabzählbar viele Diffeomorphiestrukturen nachweisen. Für  $n \neq 4$  besitzt der  $\mathbb{R}^n$  jedoch nur einen Diffeomorphietyp.

## 2.3 Der Tangentialraum und das Differential einer glatten Abbildung

Bevor wir uns mit dem Begriff des Differentials für glatte Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten befassen, noch ein paar Erinnerungen an die Analysis:

- Für eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist

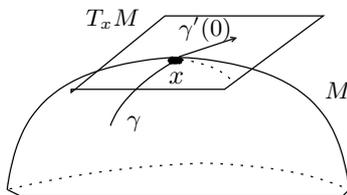
$$\begin{aligned} df_x : \mathbb{R}^n = T_x \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m = T_{f(x)} \mathbb{R}^m \\ v &\mapsto \left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

- Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit,  $x \in M$ . Der Tangentialraum im Punkt  $x$  ist

$$T_x M := \left\{ v \in \mathbb{R}^N \mid \exists \gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M : \gamma(0) = x, \gamma'(0) = v \right\}.$$

Für eine glatte Abbildung  $f : M \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \tilde{M} \subset \mathbb{R}^K$  gilt hier

$$\begin{aligned} df_x : T_x M &\longrightarrow T_{f(x)} \tilde{M} \\ v = \gamma'(0) &\mapsto \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \end{aligned}$$



**Definition.** Sei  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $x \in M$ . Zwei glatte Kurven  $\gamma, \delta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = \delta(0) = x$  heißen äquivalent (Bezeichnung:  $\gamma \sim \delta$ ), falls für eine zulässige Karte  $(U, \varphi)$  um  $x$  gilt:

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \delta)'(0).$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der zulässigen Karte. Ein Tangentialvektor in  $x \in M$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven durch  $x$ .

$$T_x M := \{[\gamma] \mid \gamma \text{ ist Kurve durch } x\}$$

ist der Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $x$ .

**Satz 2.5.** Der Tangentialraum  $T_x M$  ist ein reeller Vektorraum mit der Operation:

$$\lambda[\gamma] + \mu[\delta] := [\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta)]$$

für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $[\gamma], [\delta] \in T_x M$ , wobei  $(U, \varphi)$  eine zulässige Karte um  $x$  mit  $\varphi(x) = 0$  ist.

*Beweis.* Die Kurve

$$\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta)$$

ist eine Kurve durch  $x$  da

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma(0) + \mu \cdot \varphi \circ \delta(0)) &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(x) + \mu \cdot \varphi(x)) \\ &= \varphi^{-1}(\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0) \\ &= \varphi^{-1}(0) = x \end{aligned}$$

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Vertreter  $\gamma \in [\gamma]$  und  $\delta \in [\delta]$ . Weiterhin ist die Definition unabhängig von der gewählten Karte  $(U, \varphi)$ , denn sei  $(U, \psi)$  eine weitere Karte mit  $\psi(x) = 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi^{-1}(\lambda \cdot \psi \circ \gamma + \mu \cdot \psi \circ \delta))'(0) &= d(\varphi \circ \psi^{-1})_0 \left( \frac{d}{dt}(\lambda \cdot \psi \circ \gamma(t) + \mu \cdot \psi \circ \delta(t)) \Big|_{t=0} \right) \\ &= d(\varphi \circ \psi^{-1})_0 (\lambda \cdot (\psi \circ \gamma)'(0) + \mu \cdot (\psi \circ \delta)'(0)) \\ &= \lambda \cdot (d(\varphi \circ \psi^{-1})_0(\psi \circ \gamma)'(0)) + \\ &\quad + \mu \cdot (d(\varphi \circ \psi^{-1})_0(\psi \circ \delta)'(0)) \\ &= \lambda \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) + \mu \cdot (\varphi \circ \delta)'(0) \\ &= (\varphi \circ \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta))'(0) \end{aligned}$$

D.h.

$$\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta) \sim \psi^{-1}(\lambda \cdot \psi \circ \gamma + \mu \cdot \psi \circ \delta).$$

□

**Bemerkung.** Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit, so ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow T_x^{UMF} M \\ [\gamma] &\mapsto \gamma'(0) \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

ein linearer Isomorphismus.

**Vereinbarung.** Für Untermannigfaltigkeiten  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  benutzen wir immer die Realisierung

$$T_x M = T_x^{UMF} M = \{ \gamma'(0) \mid \gamma : I \longrightarrow M, \gamma(0) = x \} \subset \mathbb{R}^N.$$

Wir benutzen auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten für die Tangentialvektoren die formale Bezeichnung  $\gamma'(0) := [\gamma]$ .

**Beispiel 2.6. Tangentialraum an der Sphäre**

Wir betrachten die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n$ ,  $x \in S^n$ . Es gilt:

$$T_x S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0 \},$$

denn sei  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^n$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = x$ , so gilt:

$$\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle|_{t=0} &= 2 \langle \gamma(0), \gamma'(0) \rangle \\ &= 2 \langle x, \gamma'(0) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

und “ $\subset$ ” gezeigt. Die Gleichheit folgt dann aus Dimensionsgründen.

**Definition.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung,  $x \in M$ .

$$\begin{array}{ccc} df_x : T_x M & \longrightarrow & T_{f(x)} N \\ [\gamma] & \mapsto & [f \circ \gamma] \\ \gamma'(0) & \mapsto & (f \circ \gamma)'(0) \end{array}$$

heißt Differential von  $f$  in  $x$ . Sei  $v \in T_x M$ , so ist  $v(f) := df_x(v)$  die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$ .

**Bemerkungen:**

1. Die Definition von  $df_x$  ist korrekt, d.h. aus  $\gamma \sim_x \delta$  folgt  $f \circ \gamma \sim_{f(x)} f \circ \delta$ , denn sei  $(U, \varphi)$  eine zulässige Karte um  $x$  und  $(V, \psi)$  eine zulässige Karte um  $f(x)$ , so gilt:

$$\begin{aligned} (\psi \circ f \circ \gamma)'(0) &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)'(0) \\ &= d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} (\varphi \circ \gamma)'(0) \\ &\stackrel{\gamma \sim_x \delta}{=} d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} (\varphi \circ \delta)'(0) \\ &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \delta)'(0) \\ &= (\psi \circ f \circ \delta)'(0) \end{aligned}$$

2. Sei  $M \subset \tilde{M}$  eine Untermannigfaltigkeit und  $F : \tilde{M} \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Dann ist  $f := F|_M : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und es gilt:

$$df_x = dF_x|_{T_x M} \text{ für alle } x \in M$$

3. Sei  $N \subset \tilde{N}$  eine Untermannigfaltigkeit. Dann ist  $f : M \rightarrow N \subset \tilde{N}$  genau dann glatt bzgl. der Untermannigfaltigkeitsstruktur, wenn

$$f : M \rightarrow \tilde{N}$$

$C^\infty$  ist. Dies folgt aus der Gleichheit der Differentiale.

**Satz 2.7.** *Es gilt:*

1. *Die Kettenregel: Seien  $f : M \rightarrow N$  und  $h : N \rightarrow \tilde{M}$   $C^\infty$ -Abbildungen, so gilt:*

$$d(h \circ f)_x = dh_{f(x)} \circ df_x.$$

2. Ist  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Funktion, so ist

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

eine lineare Abbildung der Vektorräume.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Aus

$$T_x M \xrightarrow{df_x} T_{f(x)} N \xrightarrow{dh_{f(x)}} T_{h(f(x))} \tilde{M}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} d(h \circ f)_x[\gamma] &= [h(f \circ \gamma)] \\ &= dh_{f(x)}[f \circ \gamma] \\ &= dh_{f(x)} \circ df_x[\gamma] \end{aligned}$$

2. Z.z. ist, dass für  $[\gamma], [\delta] \in T_x M$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$df_x(\lambda[\gamma] + \mu[\delta]) = \lambda df_x[\gamma] + \mu df_x[\delta].$$

Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $x$  mit  $\varphi(x) = 0$  und  $(V, \psi)$  eine Karte um  $f(x)$  mit  $\psi(f(x)) = 0$ , dann folgt aus der Linearität für Differentiale auf dem  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} df_x(\lambda[\gamma] + \mu[\delta]) &= df_x([\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta)]) \\ &= [f \circ \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta)] \\ &= [\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta)] \\ &= (d\psi^{-1})_0 \circ \underbrace{d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_0}_{\text{linear}} (\underbrace{\lambda \cdot \varphi \circ \gamma + \mu \cdot \varphi \circ \delta}_{=\lambda \cdot (\varphi \circ \gamma)'(0) + \mu \cdot (\varphi \circ \delta)'(0)})'(0) \\ &= (d\psi^{-1})_0 (\lambda \cdot d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_0 (\varphi \circ \gamma)'(0) + \\ &\quad + \mu \cdot d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_0 (\varphi \circ \delta)'(0)) \\ &= (d\psi^{-1})_0 (\lambda \cdot (\psi \circ f \circ \gamma)'(0) + \mu \cdot (\psi \circ f \circ \delta)'(0)) \\ &= [\psi^{-1}(\lambda \cdot \psi \circ f \circ \gamma + \mu \cdot \psi \circ f \circ \delta)] \\ &= \lambda \cdot df_x[\gamma] + \mu \cdot df_x[\delta] \end{aligned}$$

□

### Folgerungen:

1. Ist  $f : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus,  $x \in M$ , so ist

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

ein linearer Isomorphismus, denn

$$dI_{T_x M} = d(f^{-1} \circ f)_x = df_{f(x)}^{-1} \circ df_x$$

und

$$dI_{T_{f(x)} N} = d(f \circ f^{-1})_{f(x)} = df_x \circ df_{f(x)}^{-1}$$

2. Ist  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

ein linearer Isomorphismus, dann ist  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus. (Satz über den lokalen Diffeomorphismus)

### Die kanonischen Basen in $T_x M$

Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte um  $x \in M$ , dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(x) &:= [\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)] \in T_x M \\ &=: \left. \frac{d}{dt} (\varphi^{-1}(\varphi(x) + te_i)) \right|_{t=0} \\ &= d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}([\varphi(x) + te_i]) \\ &= d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i) \end{aligned}$$

für alle  $i = 1 \dots n$  zu einem Tangentialvektor in  $T_x M$ .

**Satz 2.8.** *Es gilt:*

1. Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte um  $x \in M$ , dann bilden die Tangentialvektoren

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right)$$

eine Basis in  $T_x M$ . Sie heißt kanonische Basis. (Insbesondere ist  $\dim T_x M = n$ .)

2. Sei  $v \in T_x M$  und

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

dessen Basisdarstellung. Sei weiter  $v = [\gamma]$  und

$$\varphi \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$$

die Koordinatendarstellung von  $v$  bezüglich einer geeigneten Karte  $(U, \varphi)$ , dann gilt

$$\xi^i = \gamma'_i(0)$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Eine zulässige Karte um  $x$   $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  ist bekanntlich ein Diffeomorphismus,  $\varphi \in \text{Diff}(U, \varphi(U))$ . Ihr Differential wird damit zu einem Isomorphismus. Und da Isomorphismen Basen in Basen überführen, folgt die Behauptung aus

$$d\varphi_x \left( \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \right) = d\varphi_x \left( d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i) \right) = e_i.$$

2. Aus der Linearität des Differentials folgt einerseits

$$d\varphi_x(v) = d\varphi_x\left(\sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i d\varphi_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$$

und andererseits gilt

$$d\varphi_x(v) = \underbrace{[\varphi \circ \gamma]}_{\text{Kurve im } \mathbb{R}^n} = (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\gamma'_1(0), \dots, \gamma'_n(0)) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(0) e_i.$$

□

**Satz 2.9. Transformationsformeln für kanonische Basen**

1. Seien  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ ,  $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$  zwei zulässige Karten um  $x \in M$ , dann transformieren sich die kanonischen Basisvektoren auf folgende Weise:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(x).$$

2. Sei  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^{\infty}$ -Abbildung,  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte um  $x \in M$  und  $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$  eine zulässige Karte um  $f(x) \in N$ , dann gilt:

$$df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(f(x)).$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten

1. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(x) &= (d\varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= d(\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= d\psi_{\psi(x)}^{-1} \circ d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\ &= d\psi_{\psi(x)}^{-1} \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) (e_{\alpha}) \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) d\psi_{\psi(x)}^{-1}(e_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_{\alpha}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}}(x). \end{aligned}$$

2. Übungsaufgabe (analoge Rechnung)

□

**Der duale Tangentialraum  $T_x^*M$**

Wie in der Linearen Algebra betrachtet man auch hier den Dualraum eines Vektorraumes.

**Definition.** Der duale Tangentialraum in  $x \in M$  ist definiert als

$$T_x^* M := \{L : T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \mid L \text{ ist linear}\}$$

Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte um  $x \in M$ . Für das Differential der glatten Koordinatenabbildung  $x_i : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}, y \mapsto x_i(y)$  gilt:

$$(dx_i)_x : T_x U = T_x M \longrightarrow T_{x_i(x)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

D.h.  $(dx_i)_x$  ist eine lineare Abbildung von  $T_x M$  nach  $\mathbb{R}$ . Somit gilt:

$$(dx_i)_x \in T_x^* M$$

**Satz 2.10.** Die Linearformen  $((dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x)$  bilden eine Basis in  $T_x^* M$ , die dual zur kanonischen Basis  $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$  von  $T_x M$  ist.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass  $(dx_i)_x \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right) = \delta_{ij}$  gilt:

$$\begin{aligned} (dx_i)_x \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right) &= (dx_i)_x (d\varphi^{-1}(e_j)) \\ &= d(x_i \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_j) \\ &= d(I_i)_{\varphi(x)}(e_j) = (e_j)_i \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

□

Durch leichte Rechnung zeigt sich nun daraus, dass Dualbasen ein ähnliches Transformationsverhalten zeigen wie die kanonischen Basen aus Satz 2.9.

**Satz 2.11.** Seien  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  und  $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n))$  zulässige Karten um  $x \in M$ . Dann gilt

$$(dy_i)_x = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_i}{\partial x_\alpha} \right) (x_1, \dots, x_n)(dx_\alpha)_x.$$

**Bemerkungen:**

- Vergleicht man die Indizes der Übergangsmatrizen, so bemerkt man, dass die Transformationsmatrix der Dualbasen die Transponiert-Inverse der Transformationsmatrix der kanonischen Basis ist.
- Man bezeichnet die Vektoren des Dualraumes auch als Kovektoren. Diese transformieren sich per Definition also kovariant. Die Vektoren des Tangentialraumes transformieren sich dagegen kontravariant.

## 2.4 Vektorfelder und Flüsse

**Definition.** Sei  $M^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $TM := \dot{\bigcup}_{x \in M} T_x M$  die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume. Eine Abbildung

$$X : M \longrightarrow TM$$

heißt glattes Vektorfeld auf  $M$  : $\iff$

1.  $X(x) \in T_x M \quad \forall x \in M$
2. Sei  $\mathcal{A}$  ein zulässiger Atlas von  $M$ ,  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{A}$  und für  $x \in U$

$$X(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

die Basisdarstellung von  $X$ , so gilt

$$\xi_i \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \text{ für alle } i = 1, \dots, n.$$

### Bemerkungen:

- Die Forderung 2.) ist unabhängig vom zulässigen Atlas.
- Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte, dann sind  $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$  die kanonischen Basisfelder auf  $U \subset M$ .

$\mathfrak{X}(M)$  bezeichnet die Menge aller  $C^\infty$ -Vektorfelder auf  $M$  und ist ein Modul über dem Ring der glatten Funktionen:

$$\begin{aligned} X, Y \in \mathfrak{X}(M) &\Rightarrow X + Y \in \mathfrak{X}(M), \\ X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M) &\Rightarrow f \cdot X \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

wobei  $X + Y$  und  $f \cdot Y$  punktweise definiert werden.

**Satz 2.12.** Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit und  $X$  eine Abbildung:

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ x &\mapsto X(x) \in T_x M \subset \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Dann gilt:

$X$  ist ein glattes Vektorfeld auf  $M$   $\iff$  Die Abbildung  $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$  ist glatt.

*Beweis.* Sei  $(U, h)$  eine UMF-Karte von  $M$ , d.h.  $U \subset \mathbb{R}^N$  ist offen,

$$h : U \longrightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^N$$

ist ein Diffeomorphismus und

$$h(U \cap M) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Dann ist  $(U \cap M, \varphi = h|_{U \cap M})$  eine Karte von  $M^n$ . Für die kanonische Basis dieser Karte gilt bekanntlich:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i)$$

1.  $(\Rightarrow)$  : Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  die Basisdarstellung von  $X$  auf  $U \cap M$ .  
Mit  $\xi^i \in C^\infty(U)$  ist

$$X \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^n \xi^i \circ \varphi^{-1} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}}_{= \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)}$$

als Verknüpfung von  $C^\infty$ -Abbildungen ( $\varphi^{-1}$  ist ein Diffeomorphismus) glatt. Und da dies für jede Karte gilt, ist

$$X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

glatt.

2.  $(\Leftarrow)$  : Sei  $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Da

$$\begin{aligned} X(x) &= \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i) \\ &= d\varphi_{\varphi(x)}^{-1} \left( \sum_i \xi^i(x) e_i \right) \end{aligned}$$

ist

$$d\varphi_x(X(x)) = (\xi^1(x), \dots, \xi^n(x))$$

als Verkettung von glatten Abbildungen auch glatt, insbesondere sind die  $\xi^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$  damit  $C^\infty$ -Abbildungen. □

**Definition.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ . Dann heißt die Abbildung  $X(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  definiert durch

$$X(f)(x) := df_x(X(x)) \in T_{f(x)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$$

Richtungsableitung von  $f$  nach dem Vektorfeld  $X$ .

**Folgerungen.** Aus den Eigenschaften des Differential folgt für  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f, g \in C^\infty(M)$ :

1.  $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$
2.  $X(f + g) = X(f) + X(g)$
3.  $X(f \cdot g) = f \cdot X(g) + g \cdot X(f)$  (Produktregel)
4. Sei  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$  die kanonische Basis von  $(U, \varphi)$ ,  
 $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  die Basisdarstellung von  $X$  auf  $U$ , dann ist

$$X(f) = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \sum_i \xi^i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \circ \varphi.$$

5. Für eine Abbildung

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto X(x) \in T_x M \end{aligned}$$

gilt:

$$X \text{ ist ein glattes Vektorfeld.} \Leftrightarrow X(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

**Definition.** Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte und  $X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  die Basisdarstellungen auf  $U$ . Das Vektorfeld

$$[X, Y] := \sum_{i=1}^n (X(\eta^i) - Y(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

heißt Kommutator von  $X$  und  $Y$ .

**Bemerkung.** Der Kommutator ist unabhängig von der Kartenwahl. (Dies kann man mit den Transformationsregeln direkt ausrechnen.)

**Definition.** Sei  $F : M \longrightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ . Man sagt  $X$  und  $Y$  seien  $F$ -verknüpft, falls

$$Y(F(x)) = dF_x(X(x))$$

. Man schreibt dann  $Y = F_* X$  oder auch  $Y = dF(X)$ . **Bemerkung.** Im Allgemeinen ist  $dF(X)$  kein Vektorfeld!

### Satz 2.13. Eigenschaften des Kommutators

1.  $[X, Y] = -[Y, X]$  (Schiefsymmetrie)
2.  $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z]$  (linear in jeder Komponente)
3.  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (Jacobi-Identität)

4. Seien  $f, g \in C^\infty(M)$ .

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

5. Sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ . Dann gilt für die Richtungsableitung

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

6. Sind  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M), Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$  durch eine glatte Abbildung  $F : M \rightarrow N$  verknüpft, d.h. es gilt

$$Y_j(F(x)) = dF_x(X_j(x)) \quad j = 1, 2.$$

Dann sind  $[X_1, X_2]$  und  $[Y_1, Y_2]$  auch  $F$ -verknüpft:

$$dF_x([X_1, X_2](x)) = [Y_1, Y_2](F(x))$$

7. Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit, dann kann man  $X \in \mathfrak{X}(M)$  als  $C^\infty$ -Abbildung  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  auffassen, und es gilt:

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X)$$

wobei  $X(Y)$  die Richtungsableitung ist.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

- 1. bis 6. sind Standardaufgaben (Übungsaufgaben).
- zu 7.: Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit. Die Karten auf  $M$  entstehen durch Diffeomorphismen des  $\mathbb{R}^N$ . Sei  $h : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^N$  ein solcher Diffeomorphismus mit  $h(U \cap M) = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ , dann ist  $(U \cap M, \varphi = h|_{U \cap M})$  eine Karte von  $M$ . Mit der kanonischen Basis  $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(x)) \in \mathbb{R}^N$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ergibt sich nun eine Darstellung

$$X = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Nach der Produktregel für die Richtungsableitung gilt

$$\begin{aligned} X(Y) - Y(X) &= \sum_i \left( X(\eta^i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^i X\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \right. \\ &\quad \left. - Y(\xi^i) \frac{\partial}{\partial x_i} - \xi^i Y\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \right) \\ &= \underbrace{\sum_i \left( (X(\eta^i) - Y(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}_{[X, Y]} + \eta^i X\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - \xi^i Y\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_i \left( \eta^i X \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \xi^i Y \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) &= \sum_{i,j} \left( \eta^i \xi^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \xi^i \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j} \eta^i \xi^j \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

denn:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}}_{\text{VF}} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)}_{\text{Fkt}}(x) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}}_{\text{part. Abl}} \left( \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i} \right)(\varphi(x)) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_j \partial x_i}(\varphi(x)) \end{aligned}$$

$\varphi^{-1}$  ist eine  $C^\infty$ -Funktion zwischen reellen Räumen und mit dem Lemma von Schwarz ergibt sich

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi(x)) \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\text{VF}} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)}_{\text{Fkt}}(x) \end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $M^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall um  $0 \in \mathbb{R}$ . Eine glatte Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow M^n$$

heißt Integralkurve von  $X$  durch  $x \in M$ , falls

- $\gamma(0) = x$
- $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \quad \forall t \in I$

**Beispiel 2.14. Beispiele für Integralkurven**

- Sei  $M = \mathbb{R}^n$ . Die Integralkurve von  $X$  durch  $x \in \mathbb{R}^n$  ist die Lösung einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung mit Anfangsbedingung.
- $M = S^2$

$$X(x, y, z) := (-y, x, 0) \implies X \in \mathfrak{X}(S^2)$$

Die Integralkurven von  $X$  sind die Breitenkreise. Aus  $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$  folgt dann

$$\gamma'_1(t) = -\gamma_2(t), \quad \gamma'_2(t) = \gamma_1(t) \quad \text{und} \quad \gamma'_3(t) = 0.$$

Damit ist  $\gamma_3(t) \equiv \text{const.}$  und

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} \cos(t + t_0) \\ -\sin(t + t_0) \end{pmatrix}$$

Durch die Anfangsbedingungen  $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) = p_0$  ist dann die Integralkurve an  $X$  durch  $p_0 \in S^2$  eindeutig bestimmt.

$$\gamma(t) = (\sqrt{1 - z_0^2} \cos(t_0 + t), \sqrt{1 - z_0^2} \sin(t_0 + t), z_0),$$

wobei  $(x_0, y_0) = \sqrt{1 - z_0^2}(\cos t_0, \sin t_0)$ .

Durch Übertragung des Satzes über Differentialgleichungen im  $\mathbb{R}^n$  erhält man:

**Satz 2.15.** Sei  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ .

1. Zu jedem  $x \in M$  existiert eine eindeutig bestimmte maximale Integralkurve

$$\gamma_x^X : I_x \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

von  $X$  durch  $x$ . Hierbei meint maximal, dass der Definitionsbereich maximal ist.

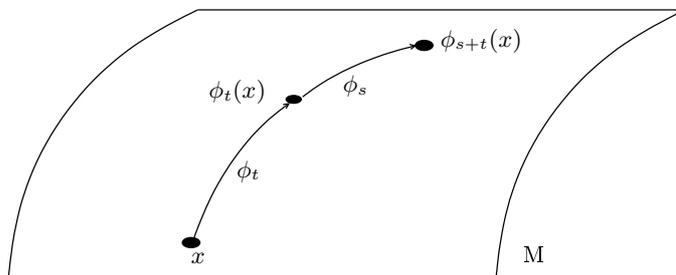
2. Sei  $W = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_x\} \subset \mathbb{R} \times M$ . Dann gilt:

- $W \subset \mathbb{R} \times M$  ist offen.
- Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : W \subset \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \phi_t(x) := \gamma_x^X(t) \end{aligned}$$

ist  $C^\infty$ .

- Ist  $(t, x) \in W$  und  $(s, \phi_t(x)) \in W$ , so folgt  $(t + s, x) \in W$  und  $\phi_{s+t}(x) = \phi_s \circ \phi_t(x)$ .

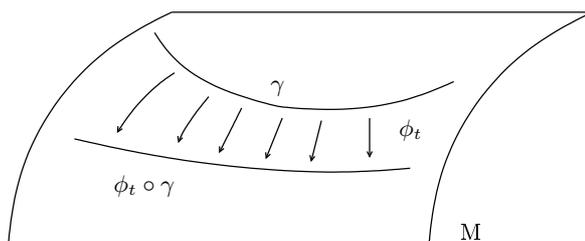


Der Beweis läuft analog zum  $\mathbb{R}^n$  indem man Karten nutzt<sup>4</sup>.

**Definition.** Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : W \subset \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \phi_t(x) := \gamma_x^X(t) \end{aligned}$$

heißt Fluss des Vektorfeldes  $X$ .



**Definition.** Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$  heißt vollständig  $\Leftrightarrow$  Alle maximalen Integralkurven  $\gamma_x^X$  von  $X$  durch  $x \in M$  sind auf  $\mathbb{R}$  definiert.

Ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$  vollständig, so ist der Fluss  $\phi_t$  von  $X$  ein Diffeomorphismus für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longrightarrow \gamma_x^X(t) \\ \phi_t : M &\longrightarrow M \\ x &\mapsto \phi_t(x) = \gamma_x^X(t) \end{aligned}$$

Es gilt  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$  und  $\phi_0 = \text{id}$ . Die Menge  $\{\phi_t\} \subset \text{Diff}(M)$  ist eine einparametrische Untergruppe von Diffeomorphismen definiert durch das vollständige Vektorfeld  $X$ .

**Satz 2.16.** Sei  $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ ,

$$\gamma_x : I_x = (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M \quad (\text{mit } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

die maximale Integralkurve von  $X$  durch  $x$  und gelte  $b < \infty$ . Dann gibt es zu jeder kompakten Teilmenge  $A \subset M$  ein  $\varepsilon > 0$  so, dass

$$\gamma_x(t) \notin A \quad \forall t \in (b - \varepsilon, b).$$

(D.h. eine nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte maximale Integralkurve verlässt jeden kompakten Bereich in endlicher Zeit.)

<sup>4</sup>siehe: Gromoll-Klingenberg-Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen (Anhang)

*Beweis.* Angenommen die Behauptung stimmt nicht. Dann existiert eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_x$  mit  $t_n \rightarrow b$  und  $\gamma_x(t_n) \in A$ . Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  auch folgenkompakt. D.h. es existiert eine in  $A$  konvergente Teilfolge von  $(\gamma_x(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ . O.B.d.A. konvergiere  $(\gamma_x(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $p \in A$ . Nach Satz 2.15 gilt

$$(0, p) \in W := \text{Definitionsbereich des Flusses } \phi \text{ von } X.$$

Außerdem ist  $W$  offen. Somit existiert eine Umgebung von  $(0, p)$ , die in  $W$  liegt:

$$(-\delta, \delta) \times U(p) \subset W.$$

Für hinreichend große  $n$  gilt dann

$$b - t_n < \delta \text{ und } \gamma_x(t_n) \in U(p)$$

Sei  $\beta : (t_n - \delta, t_n + \delta) \rightarrow M$  definiert durch

$$\beta(t) := \phi(t - t_n, \gamma_x(t_n)),$$

dann ist  $\phi(t - t_n, \gamma_x(t_n))$  für alle  $t \in (t_n - \delta, t_n + \delta)$  definiert. Und da  $\phi(t_n, x)$  und  $\phi(t - t_n, \gamma_x(t_n))$  existieren, existiert nach Satz 2.15 auch

$$\phi(t_n + t - t_n, x) = \phi(t, x) \text{ für alle } t \in (t_n - \delta, t_n + \delta).$$

Dies ist eine Verlängerung der Integralkurve  $\gamma_x$  auf das Intervall  $(a, \underbrace{t_n + \delta}_{>b})$  und ein Widerspruch zur Maximalität von  $\gamma_x$  auf  $(a, b)$ .  $\square$

**Folgerung und Definition.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld. Mit

$$\text{supp } X := \text{cl} \{x \in M \mid X(x) \neq 0\} \subset M$$

bezeichnen wir den Träger von  $X$ .

**Satz 2.17.** *Ist der Träger kompakt, so ist  $X$  vollständig. Insbesondere ist jedes  $C^\infty$ -Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit vollständig.*

*Beweis.* Sei  $x \in M$ ,  $\gamma_x : I_x \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  die maximale Integralkurve von  $X$  durch  $x$ . Z.z.  $I_x = \mathbb{R}$ .

1. Fall:  $x \in M \setminus \text{supp } X$ . Auf  $M \setminus \text{supp } X$  gilt dann  $X \equiv 0$ , d.h. die Kurve  $\gamma_x \equiv x$  ist die maximale Integralkurve von  $X$  durch  $x$ .
2. Fall:  $x \in \text{supp } X$ . Dann ist  $\gamma_x(I_x) \subset \text{supp } X$ , denn außerhalb von  $\text{supp } X$  sind alle Integralkurven konstant. Mit Satz 2.16 folgt  $I_x = \mathbb{R}$ .

$\square$

**Satz 2.18.** Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $x \in M$ . Seien  $\phi_t : W_t = \{x \in M \mid t \in I_x\} \rightarrow M$  die durch den Fluss von  $X$  definierten lokalen Diffeomorphismen. Dann gilt:

$$[X, Y](x) = \left. \frac{d}{dt} \left( (d\phi_{-t})_{\phi_t(x)} Y(\phi_t(x)) \right) \right|_{t=0}$$

*Beweis.* Sei  $x \in M$  fixiert und  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte um  $x \in M$ . Zudem seien

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}, Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

die Basisdarstellungen von  $X$  und  $Y$  auf  $U$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (d\phi_{-t})_{\phi_t(x)} Y(\phi_t(x)) &= (d\phi_{-t})_{\phi_t(x)} \left( \sum_{i=1}^n \eta^i(\phi_t(x)) \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi_t(x)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \eta^j(\phi_t(x)) (d\phi_{-t})_{\phi_t(x)} \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi_t(x)) \right) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.9}}{=} \sum_{j=1}^n \eta^j(\phi_t(x)) \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(x_k \circ \phi_{-t})(\phi_t(x)) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \right] \end{aligned}$$

Wir benutzen die Taylorentwicklung entlang von Integralkurven. Mit  $h \in C^\infty(U)$ ,  $y \in U$  folgt

$$h(\phi_t(y)) = h(y) + t \cdot dh_y(X(y)) + o(t^2),$$

denn sei  $f(t) := h(\phi_t(y))$ , dann ist

$$f(t) = f(0) + t \cdot f'(0) + \underbrace{\frac{t^2}{2} \cdot f''(0) + \dots}_{o(t^2)}$$

und mit der Kettenregel gilt:

$$f'(0) = \left. \frac{d}{dt} (h(\phi_t(y))) \right|_{t=0} = dh_{\phi_0(y)} \left( \left. \frac{d}{dt} (\phi_t(y)) \right|_{t=0} \right) = dh_y(X(y))$$

und

$$f(0) = h(\phi_0(y)) = h(y).$$

Sei jetzt speziell  $h = x_k \in C^\infty(U)$  die  $k$ -te Koordinate von  $(U, \varphi)$ , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} x_k(\phi_{-t}(y)) &= x_k(y) - t \cdot dx_k(X(y)) + o(t^2) \\ &= x_k(y) - t \cdot dx_k \left( \sum_{i=1}^n \xi^i(y) \frac{\partial}{\partial x_i}(y) \right) + o(t^2) \\ &= x_k(y) - t \cdot \xi^k(y) + o(t^2) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}(x_k \circ \phi_{-t})(y) &= \delta_{jk} - t \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi^k)(y) + o(t^2) \quad \forall y \in U \end{aligned}$$

und es folgt

$$(d\phi_{-t})_{\phi_t(x)}(Y(\phi_t(x))) = \sum_{j,k=1}^n \eta^j(\phi_t(x)) \left[ \delta_{jk} - t \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi^k)(\phi_t(x)) + o(t^2) \right] \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \in T_x M$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\phi_{-t}(Y(\phi_t(x))))|_{t=0} &= \sum_{j,k=1}^n \left( \frac{d}{dt}(\eta^j(\phi_t(x)))|_{t=0} \cdot \delta_{jk} - \eta^j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi^k)(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{d}{dt}(\eta^j(\phi_t(x)))|_{t=0}}_{=X(\eta^j)(x)} \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^n \underbrace{\eta^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(\xi^k)(x)}_{= \sum_{k=1}^n Y(\xi^k)(x)} \frac{\partial}{\partial x_k}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n [X(\eta^j)(x) - Y(\xi^j)(x)] \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \\ &= [X, Y](x) \end{aligned}$$

□

**Satz 2.19.** Sei  $F : M \rightarrow N$  ein Diffeomorphismus,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit dem Fluss  $\{\phi_t^X\}$ . Sei  $F_*X \in \mathfrak{X}(N)$  definiert durch

$$(*) \begin{cases} (F_*X)(y) &= dF_{F^{-1}(y)}(X(F^{-1}(y))) \\ (F_*X)(F(x)) &= dF_x(X(x)) \end{cases}$$

mit dem Fluss  $\{\phi_t^{F_*X}\}$ . Dann gilt

1.  $\phi_t^{F_*X} \circ F = F \circ \phi_t^X$
2.  $X = F_*X \iff F \circ \phi_t^X = \phi_t^X \circ F$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. z.z. Die Kurve  $\gamma(t) = F(\phi_t^X(x))$  ist die Integralkurve von  $F_*X$  durch  $F(x)$ , denn diese ist eindeutig bestimmt.
  - Als Anfangswert haben wir  $\gamma(0) = F(\phi_0^X(x)) = F(x)$ .

- Für die Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \frac{d}{dt}(F(\phi_t^X(x))) \\
&= dF_{\phi_t^X(x)} \left( \underbrace{\frac{d}{dt}(\phi_t^X(x))}_{=X(\phi_t^X(x))} \right) \\
&= dF_{\phi_t^X(x)}(X(\phi_t^X(x))) \\
&\stackrel{(*)}{=} (F_*X)(\underbrace{F(\phi_t^X(x))}_{=\gamma(t)})
\end{aligned}$$

2. Sei  $X = F_*X$ . Mit 1.) folgt

$$\phi_t^X \circ F = F \circ \phi_t^X.$$

Sei umgekehrt  $\phi_t^X \circ F = F \circ \phi_t^X$ .

$$\begin{aligned}
\phi_t^X \circ F &= F \circ \phi_t^X \stackrel{1.}{=} \phi_t^{F_*X} \circ F & \Big| \circ F^{-1} \\
\Rightarrow \phi_t^X &= \phi_t^{F_*X} & \Big| \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \\
\Rightarrow X &= F_*X
\end{aligned}$$

□

**Satz 2.20.** Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  Vektorfelder auf  $M$  mit den Flüssen  $\{\phi_t^X\}$  und  $\{\phi_s^Y\}$ . Dann gilt:

$$\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X \quad \forall s, t \text{ aus dem Definitionsbereich} \iff [X, Y] \equiv 0.$$

*Beweis.* Die einzelnen Implikationen:

- $(\Rightarrow)$ :  $F := \phi_{-t}^X$  ist ein lokaler Diffeomorphismus. Nach Satz 2.19 gilt wegen  $F \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ F$  auch  $Y = F_*Y$ . D.h.

$$\begin{aligned}
Y(x) &= (F_*Y)(x) \\
&= dF_{F^{-1}(x)}(Y(F^{-1}(x))) \\
&= (d\phi_{-t}^X)_{\phi_t^X(x)}(Y(\phi_t^X(x)))
\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
[X, Y](x) &\stackrel{\text{Satz 2.18}}{=} \frac{d}{dt} \left( (d\phi_{-t}^X)_{\phi_t^X(x)}(Y(\phi_t^X(x))) \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} (Y(x)) \Big|_{t=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- ( $\Leftarrow$ ): Sei  $[X, Y] = 0$  auf  $M$ . Da

$$\phi_s^X \circ \phi_t^X = \phi_t^X \circ \phi_s^X = \phi_{s+t}^X$$

ist nach Satz 2.19

$$(\phi_t^X)_* X = X$$

und es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= (\phi_t^X)_*([X, Y](x)) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.13}}{=} [(\phi_t^X)_* X, (\phi_t^X)_* Y](x) \\ &= [X, (\phi_t^X)_* Y](x) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.18}}{=} \left. \frac{d}{ds} \left( (d\phi_{-s}^X)_{\phi_s^X(x)} \left( (\phi_t^X)_* Y(\phi_s^X(x)) \right) \right) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \left( (d\phi_{-s}^X)_{\phi_s^X(x)} (d\phi_t^X)_{\phi_{-t+s}^X(x)} (Y(\phi_{-t}^X(\phi_s^X(x)))) \right) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{ds} \left( d(\phi_{-s}^X \circ \phi_t^X)_{\phi_{s-t}^X(x)} (Y(\phi_{s-t}^X(x))) \right) \right|_{s=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \left( d(\phi_{-\tau}^X)_{\phi_\tau^X(x)} (Y(\phi_\tau^X(x))) \right) \right|_{\tau=t} \end{aligned}$$

Somit ist die Kurve  $d(\phi_{-\tau}^X)_{\phi_\tau^X(x)}(Y(\phi_\tau^X(x))) = ((\phi_{-\tau}^X)_* Y)(x)$  konstant, und es gilt

$$((\phi_{-\tau}^X)_* Y)(x) = ((\phi_0^X)_* Y)(x) = Y(x)$$

Aus Satz 2.19 folgt nun die Behauptung. □

## Vektorfelder und Lie-Algebren

**Definition.** Eine Gruppe  $G$  heißt Liesche Gruppe falls sie eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist, so dass die Abbildung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, a) \mapsto g \cdot a^{-1}$  glatt ist.

Sei  $G$  eine Liesche Gruppe. Dann sind die Gruppenhomomorphismen

$$\begin{aligned} l_g : G &\rightarrow G && \text{Linkstranslation} \\ a &\mapsto g \cdot a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_g : G &\rightarrow G && \text{Rechtstranslation} \\ a &\mapsto a \cdot g \end{aligned}$$

Diffeomorphismen.

**Beispiel 2.21.** *Beispiele für Lie-Gruppen*

- $(\mathbb{R}^n, +)$
- $(\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

- $(T^n = S^1 \times \cdots \times S^1, \cdot)$  (mit  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ )
- Sind  $G$  und  $H$  zwei Liesche Gruppen, so ist  $G \times H$  mit dem komponentenweisen Produkt eine Liesche Gruppe.
- $GL(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$  ist eine offene Untermannigfaltigkeit und eine Liesche Gruppe.
- Jede (topologisch) abgeschlossene Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{R})$  ist eine Liesche Gruppe. ( $O(n)$ ,  $Sp(n)$ ,  $U(n)$ , ...)

**Definition.** Ein Paar  $(V, [\cdot, \cdot])$  heißt Lie-Algebra, falls  $V$  ein reeller Vektorraum ist und  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  folgende Eigenschaften erfüllt:

1.  $[\cdot, \cdot]$  ist schiefsymmetrisch.
2.  $[\cdot, \cdot]$  ist linear in beiden Komponenten.
3. Es gilt die Jacobi-Identität

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad \forall X, Y, Z \in V.$$

**Beispiel 2.22. Beispiele für Lie-Algebren**

1.  $\mathfrak{X}(M)$  mit dem Kommutator von Vektorfeldern ist eine ( $\infty$ -dimensionale) Lie-Algebra.
2.  $M(n, \mathbb{R})$  mit  $[A, B] := A \circ B - B \circ A$  ist eine Lie-Algebra.
3.  $\mathbb{R}^3$  mit dem Vektorprodukt  $[v, w] := v \times w$  ist eine Lie-Algebra.
4. Sei  $(M^{2n}, \omega)$  eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann ist  $C^\infty(M)$  mit der Poisson-Klammer  $\{f, g\} := \omega(s - \text{grad}(f), s - \text{grad}(g))$  eine Lie-Algebra.

**Definition.** Sei  $G$  eine Liesche Gruppe. Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(G)$  heißt linksinvariant, falls  $(l_g)_* X = X$  für alle  $g \in G$ , d.h.

$$(l_g)_* X(l_g a) = (dl_g)_a(X(a)) = X(g \cdot a) = X(l_g a) \quad \forall a, g \in G.$$

**Bemerkung.** Der Kommutator  $[X, Y]$  zweier linksinvarianter VF ist auch linksinvariant, denn sind  $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$  linksinvariant, so ist nach Satz 2.13

$$(l_g)_*[X, Y] = [(l_g)_*X, (l_g)_*Y] = [X, Y]$$

**Definition.** Die Lie-Algebra einer Lieschen Gruppe  $G$  ist der Vektorraum aller linksinvarianten Vektorfelder von  $G$  mit dem Vektorfeld-Kommutator.

$$\mathfrak{g} = LA(G)$$

bezeichnet die Lie-Algebra von  $G$ .

**Bemerkung.** Sei  $e$  das neutrale Element der Liegruppe. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow T_e G \\ X &\longmapsto X(e) \end{aligned}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus, da  $X(g) = (dl_g)_e(X(e))$  gilt. Somit ist  $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(G)$  und man kann  $\mathfrak{g}$  mit  $T_e G$  identifizieren. Die Lie-Klammer auf  $T_e G$  wird definiert durch

$$[v, w] := [\tilde{V}, \tilde{W}](e) \quad v, w \in T_e G,$$

wobei  $\tilde{V}(g) := (dl_g)_e(v)$  und  $\tilde{W}(g) := (dl_g)_e(w)$ .

**Beispiel 2.23.** Die Lie-Algebra von  $Gl(n, \mathbb{R})$

Sei  $G = Gl(n, \mathbb{R})$ . Dann ist die Lie-Algebra von  $G$  die Menge der  $n \times n$ -Matrizen mit dem Matrizenkommutator.

$$\mathfrak{g} = M(n, \mathbb{R}) \quad [A, B] := A \circ B - B \circ A$$

## 2.5 Immersionen, Einbettungen und Submersionen

**Definition.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Dann heißt  $f$

Submersion  $:\Leftrightarrow df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  ist eine surjektive Abbildung für alle  $x \in M$ .

Immersion  $:\Leftrightarrow df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  ist eine injektive Abbildung für alle  $x \in M$ .

Einbettung  $:\Leftrightarrow f$  ist eine injektive Immersion und  $f : M \rightarrow f(M) \subset N$  ist ein Homöomorphismus bzgl. der auf  $f(M)$  durch  $N$  induzierten Topologie.

**Beispiel 2.24.** Immersion, Einbettung und Submersion

1. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^3 - 4t, t^2 - 4) \end{aligned}$$

ist eine *Immersion*.

2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}P^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ [x : y : z] &\longmapsto (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2) \end{aligned}$$

ist eine *Einbettung*. (Übungsaufgabe)

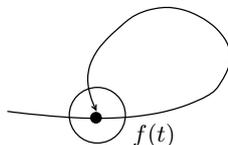
3. Die Hopf-Faserung:

$$\begin{aligned} \pi : S^3 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2 \\ (z_1, z_2) &\longmapsto [z_1 : z_2] \end{aligned}$$

ist eine *Submersion*. (Übungsaufgabe)

4. Nicht jede injektive Immersion ist eine Einbettung.

Die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f'(t) \neq 0$  ist keine Einbettung.



**Satz 2.25.** Sei  $f : M \rightarrow N$  eine injektive Immersion und  $M$  kompakt. Dann ist  $f$  eine Einbettung.

*Beweis.*  $f : M \rightarrow N$  ist stetig. Somit ist auch  $f : M \rightarrow f(M) \subset N$  stetig bzgl. der durch  $N$  induzierten Topologie. Fixiere auf  $f(M)$  die durch  $N$  induzierte Topologie. Dann ist  $f : M \rightarrow f(M)$  bijektiv und stetig. Da  $M$  kompakt ist und  $f(M)$   $T_2$  ist (da  $N$   $T_2$  ist), folgt aus Satz 1.23, dass  $f : M \rightarrow f(M)$  ein Homöomorphismus ist. D.h.  $f$  ist eine Einbettung.  $\square$

**Lemma 2.26.** [Erinnerung an die Analysis II]

1. Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen,

$$f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

glatt und

$$df_x : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus für ein  $x \in G$ . Dann ist  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus um  $x$ . D.h. es existiert eine Umgebung  $U(x)$ , auf der  $f$  ein Diffeomorphismus ist. ("Satz über den lokalen Diffeomorphismus")

2. Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^m$  und  $f : G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine glatte Abbildung mit  $f(0) = 0$

a) Ist  $m \leq n$  und  $df_0$  injektiv, dann existiert eine Karte  $(U, g)$  um  $0$ , sodass

$$g \circ f(u) = i(u),$$

wobei  $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $i(u) = (u, 0)$  die Einbettung bezeichnet.

b) Ist  $m \geq n$  und  $df_0$  surjektiv, dann existiert eine Karte  $(U, h)$  um  $0$ , sodass

$$f \circ h = \pi,$$

wobei  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die kanonische Projektion bezeichnet.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Siehe Analysis II

2. Seien  $e_i$  die kanonischen Basisvektoren im  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$ .

- a) Sei für  $1 \leq i \leq m$   $a_i := df_0(e_i)$  und für  $m < i \leq n$   $a_i \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

Sei nun  $A$  die lineare Abbildung mit  $a_i \mapsto e_i$ . Dann ist

$$F : G \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (u, v) \mapsto A(f(u)) + v$$

glatt mit

$$dF_0 = (A \circ df, \text{id}|_{\mathbb{R}^{n-m}}) = \text{id}_{\mathbb{R}^n},$$

also existiert nach dem Satz über den lokalen Diffeomorphismus eine Umgebung  $W \subset G \times \mathbb{R}^{n-m}$  von 0, sodass  $F|_W : W \rightarrow F(W)$  diffeomorph ist. Ab hier seien alle Funktionen auf  $W$  bzw. geeignete Bilder von  $W$  eingeschränkt.

$$F^{-1} \circ A \circ f : u \xrightarrow{A \circ f} A(f(u)) + 0 = F(u, 0) \xrightarrow{F^{-1}} (u, 0) = i(u).$$

Also ist  $(A^{-1}(F(W)), F^{-1}A)$  eine gesuchte Karte.

- b) Hier sei  $a_{n+1}, \dots, a_m$  Basis von  $\text{Ker}(df_0)$  und  $a_1, \dots, a_n$  so, dass für alle  $i \leq n$   $df_0(a_i) = e_i$ . Sei  $A$  hier deshalb die durch  $e_i \mapsto a_i$  charakterisierte Abbildung und  $\pi$  und  $\varphi$  seien die Projektionen

$$\pi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \\ \varphi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Dann ist

$$F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, F := (f \circ A, \varphi)$$

glatt mit  $dF_0 = \text{id}$ , also existiert nach dem Satz über den lokalen Diffeomorphismus ein  $W \subset G$ , sodass  $F|_W : W \rightarrow F(W)$  diffeomorph. Dann gilt

$$f \circ A \circ F^{-1} : v =: F(u) = \underbrace{(f(A(u)), \varphi(v))}_{\pi(v)} \xrightarrow{F^{-1}} u \xrightarrow{f \circ A} f(A(u)) = \pi(v),$$

also ist hier  $A \circ F^{-1}$  die gesuchte Kartenabbildung. □

## Übertragung auf Mannigfaltigkeiten

**Satz 2.27.** Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine glatte Abbildung,  $x \in M$  und

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

ein Isomorphismus. Dann ist  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus um  $x \in M$ , d.h. es existiert eine Umgebung  $U(x)$ , so dass

$$f|_U : U \rightarrow f(U)$$

ein Diffeomorphismus ist.

*Beweis.* Man wähle eine Karte  $(\tilde{U}, \varphi)$  um  $x$  und  $(V, \psi)$  um  $f(x)$  und wende das obige Lemma auf  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  an.  $\square$

**Satz 2.28.** *Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine Immersion. Dann existiert zu jedem  $x \in M$  eine Umgebung  $U(x) \subset M$ , so dass  $f : U(x) \rightarrow N$  eine Einbettung ist.*

*Beweis.* Sei  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  eine zulässige Karte um  $x \in M$  mit  $\tilde{\varphi}(x) = 0$  und  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  eine zulässige Karte um  $f(x) \in N$  mit  $\tilde{\psi}(f(x)) = 0$ . Nach Voraussetzung ist  $d(\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})_0$  injektiv. Mit dem obigen Lemma existiert also eine Koordinatentransformation  $g$  auf  $\tilde{\psi}(\tilde{V})$ , so dass

$$g \circ (\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\hat{u}) = (\hat{u}, 0) = i(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in \hat{U} \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U}).$$

Sei  $U := \tilde{\varphi}^{-1}(\hat{U})$ , und  $\varphi := \tilde{\varphi}|_U$ , dann ist  $(U, \varphi)$  eine Karte um  $x \in M$ . Die Karte  $(V, \psi)$  um  $f(x)$  sei definiert durch

$$\psi := g \circ \tilde{\psi}, \quad V := \psi^{-1}(g(\tilde{\psi}(\tilde{V})) \cap \pi^{-1}(\hat{U})).$$

D.h.  $f$  hat die Kartendarstellung  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = i$  auf  $U$ . Somit ist

$$f|_U : U \rightarrow N$$

eine Einbettung.  $\square$

**Satz 2.29.** *Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine Einbettung. Dann ist  $f(M) \subset N$  eine  $m$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und die Abbildung*

$$f : M \rightarrow f(M)$$

*mit der Untermannigfaltigkeitsstruktur auf  $f(M)$  ist ein Diffeomorphismus.*

*Beweis.* Nach Satz 2.28 existiert der folgende zulässige Atlas auf  $M$ :

$$\mathcal{A}_M := \left\{ (U, \varphi) \mid \begin{array}{l} (U, \varphi) \text{ ist eine Karte um } x \in M \text{ und es existiert eine} \\ \text{Karte } (V, \psi) \text{ um } f(x), \text{ so dass } \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = i \text{ auf } \varphi(U) \end{array} \right\}$$

Insbesondere gilt:

$$\psi(V \cap f(M)) = \psi(V) \cap \{x_{m+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

D.h.  $f(M)$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $N$ . Die Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ist eine Einbettung, d.h.  $f : M \rightarrow f(M)$  ist ein Homöomorphismus bzgl. der induzierten Topologie auf  $f(M)$ . Analog zu den Sätzen 2.1 und 2.4 folgt, dass

$$\mathcal{A}_{f(M)} = \{(f(U), \varphi \circ f^{-1}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

ein Atlas auf  $f(M)$  und die Abbildung

$$f : (M, \mathcal{A}_M) \rightarrow (f(M), \mathcal{A}_{f(M)})$$

ein Diffeomorphismus ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{A}_{f(M)}$  ein Atlas ist, der durch Untermannigfaltigkeitskarten entsteht. Sei  $(f(U), \varphi \circ f^{-1}) \in \mathcal{A}_{f(M)}$  und  $(V, \psi)$  eine Karte um  $f(x)$  mit  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = i$  auf  $\varphi(U)$ , dann folgt

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1} &= i \text{ auf } \varphi(U) \\ \Rightarrow f \circ \varphi^{-1} &= \psi^{-1} \text{ auf } \varphi(U) \\ \Rightarrow \underbrace{\varphi \circ f^{-1}}_{\in \mathcal{A}_{f(M)}} &= \underbrace{\psi|_{V \cap f(M)}}_{\in \mathcal{A}_{f(U)}^{UMF}} \end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine glatte Abbildung,  $m \geq n$ .  $y \in N$  heißt regulärer Wert von  $f$ , falls

$$df_x : T_x M \rightarrow T_y N$$

surjektiv ist für jedes  $x \in f^{-1}(y)$ .

**Satz 2.30.** Sei  $f : M^m \rightarrow N^n$  eine glatte Abbildung,  $m \geq n$  und  $y \in N$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist

$$B := f^{-1}(y) \subset M$$

eine  $m - n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M$ .

*Beweis.* Wir betrachten die von  $M$  auf  $B$  induzierte Topologie und konstruieren Untermannigfaltigkeitskarten auf  $B$ . Sei  $x \in B \subset M$  und  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  eine zulässige Karte von  $M$  um  $x$  mit  $\tilde{\varphi}(x) = 0$ . Sei weiter  $(V, \psi)$  eine Karte auf  $N$  um  $f(x)$  mit  $\psi(f(x)) = 0$ . Laut Voraussetzung ist

$$df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

surjektiv. Somit ist auch

$$d(\psi \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1})_0 : T_0 \mathbb{R}^m \rightarrow T_0 \mathbb{R}^n$$

surjektiv. D.h. es existiert eine Karte  $(W(0), h)$  mit  $W(0) \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ , so dass

$$\psi \circ f \circ \underbrace{\tilde{\varphi}^{-1} \circ h}_{{=: \varphi^{-1}}}|_W = \pi|_W.$$

Die Karte  $U := \tilde{\varphi}^{-1}(h(W))$ ,  $\varphi := h^{-1} \circ \tilde{\varphi}|_U$  ist eine Untermannigfaltigkeitskarte um  $x \in B \subset M$ , denn  $\forall x \in U$

$$\begin{aligned} x &\in B \\ \Leftrightarrow f(x) &= y \\ \Leftrightarrow 0 &= \psi(f(x)) \\ &= \underbrace{(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}_{\pi} \circ \varphi(x) \\ \Leftrightarrow \varphi(x) &\in \pi^{-1}(0) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varphi_1(x) = \dots = \varphi_n(x), \end{aligned}$$

d.h.  $\varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap \pi^{-1}(0)$ . □

**Satz 2.31. Einbettungssatz von Whitney (1936)<sup>5</sup>**

Sei  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung

$$f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}.$$

Insbesondere ist jede glatte Mannigfaltigkeit  $M^n$  diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .

**Beispiel 2.32. Untermannigfaltigkeiten**

1. Der Graph einer glatten Abbildung  $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$B := \text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in M \times \mathbb{R}^m \mid x \in M\}$$

ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M^n \times \mathbb{R}^m$ .

Betrachte dazu die glatte Funktion

$$\begin{aligned} F : M^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y) := f(x) - y \end{aligned}$$

Es gilt  $B = F^{-1}(0)$  und 0 ist ein regulärer Wert von  $F$ , denn  $\forall x, y \quad dF_{(x,y)}(0, e_i) = -e_i$ .

2. Rotationsflächen

Sei  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  glatt mit  $f > 0$ .

$$M^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ .

3. Gleichungsdefinierte Untergruppen von  $Gl(n, \mathbb{R})$

$$O(n) := \{A \in Gl(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\} \subset Gl(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

ist eine  $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit der  $Gl(n, \mathbb{R})$ . Betrachte dazu die Funktion

$$\begin{aligned} F : Gl(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \{\text{symmetrische } n \times n\text{-Matrizen}\} = \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ A &\longmapsto A \cdot A^t \end{aligned}$$

$O(n) = F^{-1}(I_n)$  und  $I_n$  ist ein regulärer Wert von  $F$ .

---

<sup>5</sup>Ein Beweis steht in M.Hirsch: Differential Topology, Springer 1976

## 2.6 Tensorbündel und Tensorfelder

Als Vorbereitung wiederholen wir zunächst einige Begriffe aus der Algebra, die wir im folgenden benutzen werden.

### 2.6.1 Tensorprodukt von Vektorräumen

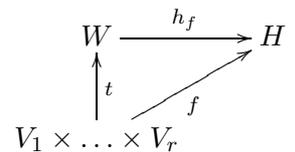
Im folgenden bezeichne  $\mathbb{K}$  den Vektorraum der reellen oder der komplexen Zahlen. Alle Vektorräume, die wir hier betrachten, seien Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

Wir betrachten Vektorräume  $V_1, V_2, \dots, V_r$  der endlichen Dimension  $n_j = \dim_{\mathbb{K}} V_j < \infty$ . Diesen Vektorräumen werden wir einen neuen Vektorraum

$$V \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_r$$

der Dimension  $n_1 \cdot \dots \cdot n_r$  zuordnen, das so genannte *Tensorprodukt von  $V_1, \dots, V_r$* .

**Definition.** Eine  $r$ -lineare Abbildung  $t : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  in einen Vektorraum  $W$  heißt *tensoriell*, falls die folgende *Universalitätseigenschaft* erfüllt ist: Zu jeder  $r$ -linearen Abbildung  $f : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow H$  in einen Vektorraum  $H$  existiert genau eine lineare Abbildung  $h_f : W \rightarrow H$  so dass  $h_f \circ t = f$  gilt.

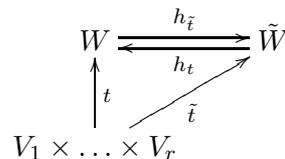


**Satz 2.33.** *Es existiert eine tensorielle Abbildung*

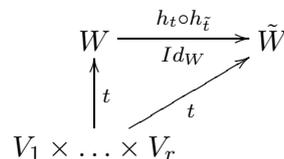
$$t : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_r \rightarrow W.$$

*Diese ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. D.h. seien die Abbildungen  $t : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  und  $\tilde{t} : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \tilde{W}$  tensoriell, so existiert ein Vektorraum-Isomorphismus  $\varphi : W \rightarrow \tilde{W}$  so dass  $\varphi \circ t = \tilde{t}$  gilt.*

*Beweis. Eindeutigkeit:* Aus der Universalitätseigenschaft folgt, dass eindeutig bestimmte lineare Abbildungen  $h_{\tilde{t}} : W \rightarrow \tilde{W}$  und  $h_t : \tilde{W} \rightarrow W$  mit der Eigenschaft  $h_{\tilde{t}} \circ t = \tilde{t}$  und  $h_t \circ \tilde{t} = t$  existieren.



Dann gilt  $h_t \circ h_{\tilde{t}} \circ t = t$ . Andererseits gilt natürlich auch  $id_W \circ t = t$ . Wir betrachten das Diagramm



Aus der Eindeutigkeit in der Universalitätseigenschaft folgt:

$$id_W = h_t \circ h_{\tilde{t}}.$$

Analog zeigt man  $h_{\tilde{t}} \circ h_t = id_{\tilde{W}}$ .

*Existenz:* Es gibt verschiedene Möglichkeiten, eine tensorielle Abbildung von  $V_1, \dots, V_r$  zu realisieren.<sup>6</sup> Wir betrachten hier die folgende: Mit  $V_j^*$  bezeichnen wir den dualen Vektorraum zu  $V_j$ , d.h.  $V_j^* := \{L : V_j \rightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ linear}\}$ . Wir betrachten nun den Vektorraum

$$W := \{L : V_1^* \times \dots \times V_r^* \rightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ } r\text{-linear}\}$$

und die  $r$ -lineare Abbildung

$$\begin{aligned} t : V_1 \times \dots \times V_r &\longrightarrow W \\ (v_1, \dots, v_r) &\longmapsto L_{(v_1, \dots, v_r)}, \end{aligned}$$

wobei  $L_{(v_1, \dots, v_r)} \in W$  folgendermaßen definiert ist:

$$L_{(v_1, \dots, v_r)}(\sigma^1, \dots, \sigma^r) := \sigma^1(v_1) \cdot \dots \cdot \sigma^r(v_r) \quad (\sigma^j \in V_j^*)$$

Wir zeigen, dass die Abbildung  $t : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  tensoriell ist. Sei dazu  $(a_{j1}, \dots, a_{jn_j})$  eine Basis im Vektorraum  $V_j$ . Dann sind die linearen Abbildungen

$$\left( L_{(a_{1p_1}, \dots, a_{rp_r})} \mid p_s \in \{1, \dots, n_s\} \right)$$

eine Basis im Raum der Abbildungen  $W$ . Sei nun  $f : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow H$  eine  $r$ -lineare Abbildung. Dann definieren wir

$$h_f(L_{(a_{1p_1}, \dots, a_{rp_r})}) := f(a_{1p_1}, \dots, a_{rp_r}) \quad (*)$$

und setzen  $h_f$  linear auf  $W$  fort. Dann gilt offensichtlich  $h_f \circ t = f$  und  $h_f$  ist eindeutig bestimmt, denn  $(*)$  muss wegen  $h_f \circ t = f$  gelten.  $\square$

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

**Definition.** Sei  $t : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  eine tensorielle Abbildung. Der Vektorraum  $V_1 \otimes \dots \otimes V_r := W$  heißt Tensorprodukt von  $V_1, V_2, \dots, V_r$ . Weiterhin sei

$$\begin{aligned} t : V_1 \times \dots \times V_r &\xrightarrow{\otimes} V_1 \otimes \dots \otimes V_r \\ (v_1, \dots, v_r) &\longmapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r := t(v_1, \dots, v_r) \end{aligned}$$

Der Vektor  $v_1 \otimes \dots \otimes v_r$  heißt das Tensorprodukt der Vektoren  $v_1, \dots, v_r$ .

Wählen wir die Realisierung des Tensorproduktes aus Satz 2.33, so gilt

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r = \{L : V_1^* \times \dots \times V_r^* \rightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ } r\text{-linear}\}$$

<sup>6</sup>Eine andere Realisierung des Tensorproduktes findet man in F.W. Warner: Foundations of differentiable Manifolds and Lie groups.

und

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r := L_{(v_1, \dots, v_r)}.$$

Nach Definition gilt

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_r = \text{span}_{\mathbb{K}} \{v_1 \otimes \dots \otimes v_r \mid v_j \in V_j, j = 1, \dots, r\}.$$

Da die Abbildung  $t$   $r$ -linear ist, hat man für das Tensorprodukt von Vektoren die folgenden Rechenregeln:

1.  $\lambda \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_r) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes \lambda v_j \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_r \quad (\lambda \in \mathbb{K}).$
2.  $v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes (v_j + w_j) \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_r = v_1 \otimes \dots \otimes v_r + v_1 \otimes \dots \otimes v_{j-1} \otimes w_j \otimes v_{j+1} \otimes \dots \otimes v_r.$

Insbesondere erhält man die folgende Basisdarstellung für Tensorprodukte von Vektoren:

Sei  $(a_{j_1}, \dots, a_{j_{n_j}})$  eine Basis von  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Dann ist

$$(a_{1p_1} \otimes \dots \otimes a_{rp_r} \mid p_j \in \{1, \dots, n_j\})$$

eine Basis von  $V_1 \otimes \dots \otimes V_r$ .

Ist  $v_j = \sum_{p_j=1}^{n_j} \xi^{jp_j} a_{jp_j}$  die Basisdarstellung von  $v_j \in V_j$ , so ist

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_r = \sum \xi^{1p_1} \cdot \dots \cdot \xi^{rp_r} a_{1p_1} \otimes \dots \otimes a_{rp_r}$$

die Basisdarstellung von  $v_1 \otimes \dots \otimes v_r$ . Dies zeigt, dass

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1 \otimes \dots \otimes V_r) = n_1 \cdot \dots \cdot n_r.$$

**Satz 2.34.** Seien  $V_1, \dots, V_r, W$  und  $\tilde{W}$  endlich-dimensionale Vektorräume. Dann gilt:

1.  $V_1^* \otimes \dots \otimes V_r^* \otimes W = \{L : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W \mid L \text{ } r\text{-linear}\}$   
Insbesondere ist:  $V^* \otimes W = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$
2.  $V \otimes W = W \otimes V$
3.  $(V \otimes W) \otimes \tilde{W} = V \otimes (W \otimes \tilde{W}) = V \otimes W \otimes \tilde{W}$
4.  $(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*$

*Beweis.* Die Behauptungen 2), 3) und 4) sind klar. Man schreibt den Isomorphismus mittels Basen direkt hin oder benutzt die Universalitätseigenschaft.

Zu 1.): Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  gilt:

$$\begin{aligned} V &= (V^*)^* \\ v &\mapsto \phi_v \quad \phi_v(\sigma) = \sigma(v) \quad \text{für } \sigma \in V^* \end{aligned}$$

Nach Definition und Satz 2.33 ist dann

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_r^* \otimes W = \{L : V_1 \times \dots \times V_r \times W^* \rightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ } (r+1)\text{-linear}\}$$

Der Vektorraum auf der rechten Seite ist isomorph zum Vektorraum

$$\left\{ \hat{L} : V_1 \times \dots \times V_r \longrightarrow W \mid \hat{L} \text{ } r\text{-linear} \right\}.$$

Dieser Isomorphismus wird beschrieben durch  $L \mapsto \hat{L}$  mit

$$\hat{L}(v_1, \dots, v_r) = \sum_{j=1}^n L(v_1, \dots, v_r, \sigma^j) a_j,$$

wobei  $(a_1, \dots, a_n)$  eine Basis von  $W$  und  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  die dazu duale Basis in  $W^*$  ist.  $\square$

**Definition.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum.

$$T^{(r,s)}(V) := \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{s\text{-mal}}$$

heißt Vektorraum der  $(r, s)$ -Tensoren über  $V$  (oder der  $r$ -fach kovarianten und  $s$ -fach kontravarianten Tensoren über  $V$ ).

Speziell gilt:

$$\begin{aligned} T^{(1,0)}(V) &= V^* \\ T^{(0,1)}(V) &= V \\ T^{(0,0)}(V) &:= \mathbb{K} \\ T^{(r,s)}(V) &= \left\{ L : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{s\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ multilinear} \right\} \\ T^{(r,1)}(V) &= \left\{ L : \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} \longrightarrow V \mid L \text{ multilinear} \right\} \end{aligned}$$

(siehe Satz 2.34). Aus den Tensorprodukten über  $V$  kann man eine Algebra bilden, die Tensoralgebra über  $V$ .

$$T(V) := \bigoplus_{r,s \geq 0} T^{(r,s)}(V) \quad (\text{Menge aller endlichen Tupel})$$

Das Algebrenprodukt ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} T^{(r,s)}(V) \times T^{(\hat{r},\hat{s})}(V) &\xrightarrow{\otimes} T^{(r+\hat{r},s+\hat{s})}(V) \\ (L, \hat{L}) &\mapsto L \otimes \hat{L}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} (L \otimes \hat{L})(x_1, \dots, x_{r+\hat{r}}, y^1, \dots, y^{s+\hat{s}}) &:= L(x_1, \dots, x_r, y^1, \dots, y^s) \\ &\quad \cdot \hat{L}(x_{r+1}, \dots, x_{r+\hat{r}}, y^{s+1}, \dots, y^{s+\hat{s}}) \end{aligned}$$

mit  $x_j \in V$ ,  $y^j \in V^*$ .

Ist  $(a_1, \dots, a_n)$  eine Basis von  $V$  und  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  die dazu duale Basis von  $V^*$ , so ist

$$(\sigma^{i_1} \otimes \dots \otimes \sigma^{i_r} \otimes a_{j_1} \otimes \dots \otimes a_{j_s} \mid i_k \in \{1, \dots, n\}, j_l \in \{1, \dots, n\})$$

eine Basis von  $T^{(r,s)}V$ .

Sei nun  $a'_j = \sum_l b_{lj} a_l$  ein Basiswechsel in  $V$ . Für die Kobasen im Dualraum  $V^*$  ergibt sich damit

$$\sigma'_i = \sum_l b^{il} \sigma_l$$

Dabei bezeichne  $b^{il}$  den  $i$ -ten Eintrag der zur Matrix  $B = \{b_{il}\}$  inversen Matrix. Ein Basisvektor aus  $T^{(r,s)}$  transformiert sich dann aufgrund der Multilinearität wie folgt:

$$\begin{aligned} & \sigma^{i'_1} \otimes \dots \otimes \sigma^{i'_r} \otimes a_{j'_1} \otimes \dots \otimes a_{j'_s} \\ = & \sum_{l_1} b^{i_1 l_1} \sigma^{l_1} \otimes \dots \otimes \sum_{l_r} b^{i_r l_r} \sigma^{l_r} \otimes \sum_{l_{r+1}} b_{l_{r+1} j'_1} a_{l_{r+1}} \otimes \dots \otimes \sum_{l_{r+s}} b_{l_{r+s} j'_s} a_{l_{r+s}} \\ = & \sum_L \underbrace{b^{i_1 l_1} \dots b^{i_r l_r}}_{r\text{-fach kovariant}} \underbrace{b_{l_{r+1} j'_1} \dots b_{l_{r+s} j'_s}}_{s\text{-fach kontravariant}} (\sigma^{l_1} \otimes \dots \otimes \sigma^{l_r} \otimes a_{l_{r+1}} \otimes \dots \otimes a_{l_{r+s}}) \end{aligned}$$

### Alternierende Tensoren

Im Vektorraum der  $k$ -fach kovarianten Tensoren über  $V$  existieren 2 wichtige Unterräume, der Vektorraum der alternierenden bzw. der der symmetrischen Tensoren. Es sei nun

$$T^{(k,0)}V = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-mal}} =: \otimes^k V^*.$$

**Definition.** Eine multilineare Abbildung  $L : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt alternierend, wenn  $L(\dots, v, \dots, w, \dots) = -L(\dots, w, \dots, v, \dots)$  für alle  $v, w \in V$  gilt. Der Vektorraum

$$\Lambda^k(V^*) := \left\{ L : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ multilinear und alternierend} \right\}$$

heißt Vektorraum der alternierenden  $k$ -Formen auf  $V$ .

Aus den Vektorräumen der alternierenden  $k$ -Formen kann man ebenfalls eine Algebra machen. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^l(V^*) & \longrightarrow \Lambda^{k+l}(V^*) \\ (\omega, \sigma) & \longmapsto \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

definiert durch

$$(\omega \wedge \sigma)(x_1, \dots, x_{k+l}) := \frac{1}{k! \cdot l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \omega(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) \cdot \sigma(x_{\pi(k+1)}, \dots, x_{\pi(k+l)})$$

In diesen Formeln bezeichnet  $S_k$  die Gruppe der Permutationen der Zahlen  $1, \dots, k$ .

**Definition.** Die  $(k+l)$ -Form  $\omega \wedge \sigma$  heißt das alternierende Produkt, Dachprodukt oder wedge-Produkt von  $\omega$  und  $\sigma$ .

**Bemerkung.** Manche Autoren multiplizieren in der Definition von  $\omega \wedge \sigma$  noch zusätzlich mit  $\frac{1}{(k+l)!}$ .

**Satz 2.35.** *Das alternierende Produkt hat folgende Eigenschaften:*

1.  $\omega \wedge \sigma = (-1)^{k \cdot l} \sigma \wedge \omega$ ,  $w \in \Lambda^k(V^*), \sigma \in \Lambda^l(V^*)$
2.  $(\omega \wedge \sigma) \wedge \eta = \omega \wedge (\sigma \wedge \eta)$
3. Für 1-Formen  $\omega$  und  $\sigma$  gilt  $\omega \wedge \sigma = \omega \otimes \sigma - \sigma \otimes \omega$
4. Seien  $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in V^*$ ,  $v_1, \dots, v_k \in V$ . Dann gilt

$$\left( \sigma^1 \wedge \sigma^2 \wedge \dots \wedge \sigma^k \right) (v_1, \dots, v_k) = \text{Determinante der Matrix } (\sigma^i(v_j))_{i,j=1,\dots,k}$$

5. Ist  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  eine Basis von  $V^*$ , so ist  $(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$  eine Basis von  $\Lambda^k(V^*)$ . Insbesondere gilt für einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k} \quad \text{für } k \leq n = \dim V \quad \text{und} \quad \Lambda^k V^* = 0 \quad \text{für } k > n$$

Für  $k=0$  setzen wir  $\Lambda^0 V^* := \mathbb{K}$  und  $\lambda \wedge \omega := \lambda \cdot \omega =: \omega \wedge \lambda$  für  $\lambda \in \Lambda^0 V^*, \omega \in \Lambda^k V^*$ . Die Algebra

$$\left( \Lambda(V^*) := \sum_{k=0}^n \Lambda^k(V^*), \wedge \right)$$

heißt Algebra der alternierenden Formen über  $V$ .

### Symmetrische Tensoren

**Definition.** Eine multilineare Abbildung  $L : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K}$  heißt symmetrisch, wenn  $L(\dots, v, \dots, w, \dots) = L(\dots, w, \dots, v, \dots)$  für alle  $v, w \in V$  gilt. Der Vektorraum

$$S^k(V^*) := \left\{ L : \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{K} \mid L \text{ multilinear und symmetrisch} \right\}$$

heißt Vektorraum der symmetrischen  $k$ -fach kovarianten Tensoren über  $V$ .

Aus den Vektorräumen der symmetrischen Tensoren kann man ebenfalls eine Algebra machen. Dazu betrachten wir die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \circ : S^k(V^*) \times S^l(V^*) &\longrightarrow S^{k+l}(V^*) \\ (\omega, \sigma) &\longmapsto \omega \circ \sigma \end{aligned}$$

definiert durch

$$(\omega \circ \sigma)(x_1, \dots, x_{k+l}) := \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_{k+l}} \omega(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}) \cdot \sigma(x_{\pi(k+1)}, \dots, x_{\pi(k+l)})$$

**Definition.** Der  $(k+l)$ -Tensor  $\omega \circ \sigma$  heißt das symmetrische Tensorprodukt von  $\omega$  und  $\sigma$ .

**Satz 2.36.** *Das symmetrische Tensorprodukt hat folgende Eigenschaften:*

1.  $\omega \circ \sigma = \sigma \circ \omega$
2.  $(\omega \circ \sigma) \circ \eta = \omega \circ (\sigma \circ \eta)$
3. Für 1-Formen  $\omega, \sigma$  gilt:  $\omega \circ \sigma = \frac{1}{2}(\omega \otimes \sigma + \sigma \otimes \omega)$
4. Ist  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  eine Basis von  $V^*$ , so ist  $(\sigma^{i_1} \circ \dots \circ \sigma^{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n)$  eine Basis von  $S^k(V^*)$ . Insbesondere gilt:

$$\dim S^k(V^*) = \binom{n+k-1}{k}$$

Für  $k=0$  setzen wir  $S^0(V^*) := \mathbb{K}$  und  $\lambda \circ T = \lambda \cdot T = T \circ \lambda$  für  $\lambda \in S^0(V^*) = \mathbb{K}, T \in S^k(V^*)$ .

Die Algebra

$$\left( S(V^*) := \sum_{k=0}^{\infty} S^k(V^*), \circ \right)$$

heißt Algebra der symmetrischen, kovarianten Tensoren über  $V$ .

Man kann Tensoren mittels linearen Abbildungen von einem Vektorraum auf einen anderen übertragen.

Sei  $f : V \longrightarrow W$  eine lineare Abbildung.  $f$  induziert eine Abbildung auf den kovarianten Tensoren

$$\begin{aligned} f^* : T^{(k,0)}W = \otimes^k W^* &\longrightarrow T^{(k,0)}V = \otimes^k V^* \\ T &\longmapsto f^*T \quad \text{mit} \\ f^*T(v_1, \dots, v_k) &:= T(f(v_1), \dots, f(v_k)), \quad v_j \in V_j \end{aligned}$$

$f^*T$  heißt der durch  $f$  aus  $T$  induzierte Tensor.  $f^*$  heißt die induzierte Abbildung auf den Tensorprodukten.

Ist  $f : V \rightarrow W$  sogar ein Isomorphismus, so kann man allgemeiner die folgende Konstruktion machen: Wir betrachten die duale Abbildung  $f^* : W^* \rightarrow V^*$  zu  $f$ :

$$(f^*\sigma)(v) = \sigma(f(v)), \quad \sigma \in W^*, v \in V.$$

Dann induziert  $f$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} f^* : T^{(r,s)}W &\longrightarrow T^{(r,s)}V \\ T &\longmapsto f^*T \end{aligned}$$

wobei

$$f^*T(v_1, \dots, v_r, \sigma^1, \dots, \sigma^s) := T(f(v_1), \dots, f(v_r), f^{*-1}(\sigma^1), \dots, f^{*-1}(\sigma^s)) \quad v_j \in V, \sigma^j \in V^*$$

**Satz 2.37.** Für Tensoren  $B, \hat{B}$  und lineares  $f$  gilt:

$$f^*(B \otimes \hat{B}) = f^*(B) \otimes f^*(\hat{B}).$$

## 2.6.2 Tensorbündel und Tensorfelder auf Mannigfaltigkeiten

$pr_1$  und  $pr_2$  seien hier die Projektionen von Paaren auf erste bzw. zweite Komponente. d.h.  $pr_1(x, v) := x$  und  $pr_2(x, v) := v$

**Definition.** Sei  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Ein Tripel  $(E, \pi, M)$  heißt glattes Vektorbündel vom Rang  $r$  über  $M$ , falls

1.  $E$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit,  $\pi : E \rightarrow M$  ist glatt.
2.  $E$  ist lokal-trivial, d.h. zu jedem  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U(x) \subset M$  und ein Diffeomorphismus  $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{K}^r$ , so dass  $\pi = pr_1 \circ \phi_U$ .
3. Die "Fasern"  $E_x := \pi^{-1}(x) \subset E$  sind  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und die Abbildungen

$$\phi_{U,x} := pr_2 \circ \phi_U|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{K}^r$$

sind Vektorraumisomorphismen.

Dabei heißt  $E$  *Totalraum*,  $\pi$  die *Projektion* und  $M$  *Basis des Bündels*. Das Paar  $(U, \phi_U)$  heißt *Bündelkarte* oder *lokale Trivialisierung* und

$$\mathcal{A} := \left\{ (U_\alpha, \phi_{U_\alpha}) \mid \alpha \in I, (U_\alpha, \phi_{U_\alpha}) \text{ Bündelkarten}, M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right\}$$

heißt *Bündelatlas*.

### Beispiel 2.38. Beispiele für Vektorbündel

1. Sei  $U \subset M$  offen,  $(E, \pi, M)$  ein Vektorbündel über  $M$ . Dann ist  $(E|_U := \pi^{-1}(U), \pi|_U, U)$  ein Vektorbündel über  $U$ .
2.  $(M \times \mathbb{K}^r, pr_1, M)$  ist ein triviales Vektorbündel.

3. Das Tensorbündel über  $M$ 

Sei  $x \in M$ .  $T_x M$  ist der Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $x$  und  $T_x^* M$  der Kotangentialraum an  $M$  in  $x$ .

$$T^{(r,s)}(T_x M) := \bigotimes^r T_x^* M \otimes \bigotimes^s T_x M$$

Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte von  $M$ . Dann ist

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right)$$

eine Basis in  $T_x M$  und  $((dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x)$  ist die duale Basis in  $T_x^* M$ . Somit ist

$$\left\{ (dx_{i_1})_x \otimes \dots \otimes (dx_{i_r})_x \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}(x) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_s}}(x) \mid i_l, j_k \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

eine Basis in  $T^{(r,s)}(T_x M)$ . Abkürzend schreibt man auch  $dx^I \otimes \frac{\partial}{\partial x^J}$   $I = (i_1, \dots, i_r)$ ,  $J = (j_1, \dots, j_s)$ .

$$\begin{aligned} T^{(r,s)} M &:= \bigcup_{x \in M} T^{(r,s)}(T_x M) \\ \pi : T^{(r,s)} M &\longrightarrow M \\ T^{(r,s)}(T_x M) \ni B &\longmapsto x \end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} T^{(1,0)} M &= T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M \quad \text{das Kotangentialbündel und} \\ T^{(0,1)} M &= TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \quad \text{das Tangentialbündel.} \end{aligned}$$

**Satz 2.39.** Das Bündel der  $(r, s)$ -Tensoren  $\tau := (T^{(r,s)} M, \pi, M)$  ist ein glattes Vektorbündel vom Rang  $n^{r+s}$  über  $M$ .

*Beweis.* In mehreren Teilen:

a) erster Teil der Definition von *lokalen Trivialisierungen* von  $\tau$ :

Sei  $\mathcal{A}_M$  ein zulässiger Atlas auf  $M$ ,  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n)) \in \mathcal{A}_M$ . Dann ist

$$\left\{ (dx^I)_x \otimes \frac{\partial}{\partial x^J}(x) \mid I, J \right\}$$

eine Basis in  $T^{(r,s)}(T_x M)$ .

Die Bijektion

$$\hat{\phi}_{(U, \varphi)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{K}^{n^{r+s}}$$

sei definiert durch

$$T^{(r,s)}(T_x M) \ni B_x \longmapsto (x_1(x), \dots, x_n(x), (B_I^J)_{I,J}) \quad x \in U,$$

wobei  $B_x = \sum_{I,J} B_I^J dx_x^I \otimes \frac{\partial}{\partial x^J}(x)$ .

b) Definition der *Topologie* auf  $T^{(r,s)}M$ :

Sei  $\mathcal{A}_M$  ein zulässiger Atlas auf  $M$ .  $\mathcal{O} \subset T^{(r,s)}M$  heißt offen, falls

$$\hat{\phi}_{(U,\varphi)}(\mathcal{O} \cap \pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$$

offen ist für alle zulässigen Karten  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$ . Dies definiert unabhängig von der Wahl des zulässigen Atlas eine Topologie auf  $T^{(r,s)}M$ , die  $T_2$  ist und eine abzählbare Basis hat, da  $M$  und  $\mathbb{R}^k$  diese Eigenschaften haben.

c)  $T^{(r,s)}M$  ist eine *glatte Mannigfaltigkeit*:

Die Kartenbereiche des Atlas

$$\mathcal{A}_T := \left\{ (\pi^{-1}(U), \hat{\phi}_{(U,\varphi)}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}_M \right\}$$

überdecken ganz  $T^{(r,s)}M$  und die Abbildungen  $\hat{\phi}_{(U,\varphi)}$  sind Homöomorphismen. Somit ist  $T^{(r,s)}M$  eine topologische Mannigfaltigkeit.

Seien  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ ,  $(V, \psi = (y_1, \dots, y_n)) \in \mathcal{A}_M$  mit  $U \cap V \neq \emptyset$ , dann ist der Kartenübergang

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{(V,\psi)} \circ \hat{\phi}_{(U,\varphi)}^{-1} : \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} &\longrightarrow \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \\ (x_1, \dots, x_n, a^I_J) &\mapsto (\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n), b^K_L) \end{aligned}$$

glatt. Dies folgt einerseits aus der Glattheit von  $\psi \circ \varphi^{-1}$  und zum anderen aus dem Koordinatenübergang von  $a^I_J$  nach  $b^K_L$ . Aus den Sätzen 2.9 und 2.11 folgt nämlich

$$\begin{aligned} &\sum_{I,J} a^I_J dx^J \otimes \frac{\partial}{\partial x_I} \\ &= \sum_{I,J} a^I_J \left( \sum_{k_1} \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \psi)_{i_1}}{\partial x_{k_1}} dy^{k_1} \otimes \dots \otimes \sum_{l_s} \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)_{l_s}}{\partial x_{j_s}} \frac{\partial}{\partial y_{l_s}} \right) \\ &= \sum_{K,L} \underbrace{\sum_{I,J} a^I_J \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \psi)_{i_1}}{\partial x_{k_1}} \dots \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)_{l_s}}{\partial x_{j_s}}}_{b^L_K} \left( dy^K \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y_L} \right) \end{aligned}$$

und d.h.

$$b^L_{k_1, \dots, k_r} = \sum_{I,J} \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \psi)_{i_1}}{\partial x_{k_1}} \dots \frac{\partial(\varphi^{-1} \circ \psi)_{i_r}}{\partial x_{k_r}} \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)_{l_{r+1}}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial(\psi^{-1} \circ \varphi)_{l_s}}{\partial x_{j_s}} a^I_J$$

Diese Abbildung ist offensichtlich glatt.

d)  $\pi : T^{(r,s)}M \longrightarrow M$  ist *glatt*:

Betrachte die Kartendarstellungen von  $\pi$ . Seien  $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}_M$ .

$$\begin{aligned} \psi \circ \pi \circ \hat{\phi}_{(U,\varphi)}^{-1}(x_1, \dots, x_n, a^I_J) &= \psi \circ \pi \left( \sum_{I,J} a^I_J (dx^J)_x \otimes \frac{\partial}{\partial x_I}(x) \right) \\ &= \psi(x) \\ &= \psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$\psi \circ \varphi^{-1}$  ist glatt und somit ist auch  $\pi$  glatt.

e) *lokale Trivialisierung* von  $(T^{(r,s)}M, \pi, M)$ :

Sei  $x \in M$  und  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$  eine Karte um  $x$ .

$$\phi_{(U,\varphi)} := (\varphi^{-1} \times id) \circ \hat{\phi}_{(U,\varphi)} : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\hat{\phi}_{(U,\varphi)}} \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}} \xrightarrow{\varphi^{-1} \times id} U \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$$

sei eine Bündelkarte über  $U$ . Es gilt:

i.  $\phi_{(U,\varphi)}$  ist nach Definition ein Diffeomorphismus.

ii.  $pr_1 \circ \phi_{(U,\varphi)} = \pi$

Und die Abbildung

$$B_x = \sum_{I,J} a_J^I (dx^J)_x \otimes \frac{\partial}{\partial x^I}(x) \xrightarrow{pr_2 \circ \phi_{(U,\varphi)}|_{\pi^{-1}(x)} : \pi^{-1}(x)} \mathbb{R}^{n^{r+s}} \mapsto (a_J^I)$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

□

### Spezialfälle:

a) Das Tangentialbündel  $TM^n$  ist eine  $2n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit folgendem Atlas:

Sei  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$ ,  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ . Sei weiter  $t_x \in T_x M$ ,  $t_x = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x)$ .

$$\hat{\phi}_{(U,\varphi)}(t_x) := (\varphi(x), d\varphi_x(t_x)) = (x_1(x), \dots, x_n(x), \xi^1, \dots, \xi^n)$$

$(TM, \pi, M)$  ist ein glattes Vektorbündel vom Rang  $n$ .

b) Das Kotangentialbündel  $T^*M$  ist eine  $2n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit folgendem Atlas:

Sei  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_M$ ,  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ . Sei weiter  $L_x \in T_x^*M$ ,  $L_x = \sum_{i=1}^n \eta_i (dx^i)_x$ .

$$\phi_{(U,\varphi)}(L_x) := (x_1(x), \dots, x_n(x), \eta_1, \dots, \eta_n)$$

$(T^*M, \pi, M)$  ist ein glattes Vektorbündel vom Rang  $n$ .

c) Analog zu Satz 2.39 zeigt man, dass

$$\bigwedge^k M := \bigcup_{x \in M} \bigwedge^k (T_x^*M)$$

eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + \binom{n}{k}$  ist, so dass  $(\bigwedge^k M, \pi, M)$  ein glattes Vektorbündel vom Rang  $\binom{n}{k}$ , das Bündel der (alternierenden)  $k$ -Formen ist.

Basen für die lokale Trivialisierung:

$$\{(dx_{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_x \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

d) Die Menge

$$S^k M := \bigcup_{x \in M} S^k(T_x^* M)$$

ist eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + \binom{n+k-1}{k}$ , so dass  $(S^k M, \pi, M)$  ein glattes Vektorbündel vom Rang  $\binom{n+k-1}{k}$ , das Bündel der  $k$ -fach kovarianten Tensoren über  $M$  ist.

Basen für die lokale Trivialisierung:

$$\{(dx_{i_1})_x \circ \cdots \circ (dx_{i_k})_x \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}$$

**Definition.** Sei  $\xi = (E, \pi, M)$  ein glattes Vektorbündel. Eine glatte Abbildung

$$s : M \longrightarrow E$$

mit  $\pi \circ s = id_M$  heißt glatter Schnitt des Bündels  $\xi$ . Mit  $\Gamma(E)$  wird die Menge aller glatten Schnitte von  $\xi$  bezeichnet. ( $\Gamma(E) = C^\infty(M, E)$ )

**Bemerkung.**  $\Gamma(E)$  ist ein  $C^\infty(M)$ -Modul:

$$\begin{aligned} \Gamma(E) \ni s_1, s_2 &\mapsto s_1 + s_2 \in \Gamma(E) \\ &(s_1 + s_2)(x) := s_1(x) + s_2(x) \\ C^\infty(M) \times \Gamma(E) \ni (f, s) &\mapsto f \cdot s \in \Gamma(E) \\ &(f \cdot s)(x) := f(x) \cdot s(x) \end{aligned}$$

**Definition.** Sei  $(E, \pi, M)$  ein Vektorbündel vom Rang  $r$ ,  $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(E|_U)$ ,  $U \subset M$  offen, so dass  $(s_1(x), \dots, s_r(x))$  für alle  $x \in U$  eine Basis in  $E_x$  ist. Dann nennt man  $(s_1, \dots, s_r)$  eine lokale Basis in  $(E, \pi, M)$  über  $U$ .

**Bemerkungen:**

1. Ist  $\hat{\phi}_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r$  eine Bündelkarte und  $(a_1, \dots, a_r)$  eine Basis in  $\mathbb{K}^r$ , so sind  $s_i : U \longrightarrow E$  definiert durch

$$s_i(x) := \hat{\phi}_U^{-1}(x, a_i), \quad x \in U$$

( $i = 1, \dots, r$ ) eine lokale Basis von  $E$  über  $U$ .

2. Ist  $(s_1, \dots, s_r)$  eine lokale Basis von  $E$  über  $U$ , so definiert

$$\begin{aligned} \phi_U : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{K}^r \\ x \in U, E_x \ni v &\mapsto (x, \xi^1, \dots, \xi^r) \end{aligned}$$

wobei  $v = \sum_{i=1}^r \xi^i s_i(x)$  ist, eine Bündelkarte von  $E$  über  $U$ .

**Satz 2.40.** Sei  $(E, \pi, M)$  ein glattes Vektorbündel und  $s : M \longrightarrow E$  mit  $\pi \circ s = id_M$  gegeben. Sei  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ ,  $(s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_r})$  eine lokale Basis von  $E$  über  $U_\alpha$  und  $s|_{U_\alpha} = \sum_{i=1}^r \xi^{\alpha_i} s_{\alpha_i}$ . Dann ist  $s \in \Gamma(E)$  genau dann, wenn

$$\xi^{\alpha_i} \in C^\infty(U_\alpha) \quad i = 1, \dots, r \quad \forall U_\alpha \in \mathcal{U}$$

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

**Folgerungen:**

1. Ist  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte und

$$\begin{aligned} dx^I \otimes \frac{\partial}{\partial x_J} : U &\longrightarrow T^{(r,s)}M|_U \\ x &\mapsto (dx^I)_x \otimes \frac{\partial}{\partial x_J}(x) \end{aligned}$$

Dann ist  $(dx^I \otimes \frac{\partial}{\partial x_J})_{I,J}$  eine lokale Basis von  $T^{(r,s)}M$  über  $U$ .

2. Sei  $B : M \ni x \mapsto B_x \in T^{(r,s)}(T_x M)$  gegeben. Dann ist  $B \in \Gamma(T^{(r,s)}M)$  genau dann, wenn  $B_I^J \in C^\infty(U)$  für alle  $I, J$ , wobei

$$B_x = \sum_{I,J} B_I^J(x) (dx^I)_x \otimes \frac{\partial}{\partial x_J}(x).$$

Insbesondere gilt:  $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ .

**Definition.** Ein glattes Tensorfeld von Typ  $(r, s)$   $r \in \mathbb{N}$ ,  $s = 0, 1$  ist eine Abbildung

$$B : \mathfrak{X}(M)^r \longrightarrow \begin{cases} C^\infty(M) & , s = 0 \\ \mathfrak{X}(M) & , s = 1 \end{cases}$$

die  $C^\infty(M)$ -multilinear ist, d.h.

$$B(\dots, f_1 \cdot X_1 + f_2 \cdot X_2, \dots) = f_1 \cdot B(\dots, X_1, \dots) + f_2 \cdot B(\dots, X_2, \dots)$$

für alle  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$   $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ .

$\mathfrak{X}^{(r,s)}(M)$  bezeichnet die Menge der  $(r, s)$ -Tensorfelder über  $M$ .  $\mathfrak{X}^{(r,s)}(M)$  ist ein Modul über  $C^\infty(M)$ .

**Beispiel 2.41. Beispiele für Tensorfelder**

1. *Die Induzierte Riemannsche Metrik*

Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit.

$$\mathfrak{X}(M) = \{X \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N) \mid X(x) \in T_x M \ \forall x \in M\}$$

Die induzierte Riemannsche Metrik  $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$  ist definiert durch

$$g(X, Y)(x) := \langle X(x), Y(x) \rangle_{\mathbb{R}^N}.$$

$g$  ist ein symmetrisches  $(2, 0)$ -Tensorfeld.

2. Sei  $M = \mathbb{R}^3$ . Dann ist

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \\ (X, Y) &\mapsto X \times Y \\ &(X \times Y)(x) := X(x) \times Y(x) \end{aligned}$$

ein  $(2, 1)$ -Tensorfeld.

3. Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist der *Kommutator*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

kein Tensorfeld, denn  $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$ .

4. Sei  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  eine zulässige Karte. Die duale Basis  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  von  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} (dx^i)(X) &:= \xi^i \in C^\infty(U) \text{ für} \\ X(x) &= \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}(x) \quad x \in U \end{aligned}$$

$$(dx^i(X))(x) := (dx^i)_x(X(x))$$

**Definition.** Seien  $B_1 \in \mathfrak{X}^{(r_1, 0)}(M)$  und  $B_2 \in \mathfrak{X}^{(r_2, 0)}(M)$ . Dann ist das Tensorprodukt  $B_1 \otimes B_2 \in \mathfrak{X}^{(r_1+r_2, 0)}(M)$  von  $B_1$  und  $B_2$  definiert durch

$$(B_1 \otimes B_2)(X_1, \dots, X_{r_1+r_2}) := B_1(X_1, \dots, X_{r_1}) \cdot B_2(X_{r_1+1}, \dots, X_{r_1+r_2})$$

**Beispiel 2.42. Tensorprodukt für kanonische Basisfelder**

Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte, und bezeichne

$$\delta_J^I = \begin{cases} 0 & , I \neq J \\ 1 & , I = J \end{cases} \quad \text{mit Reihenfolge}$$

dann ist mit  $dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r} \in \mathfrak{X}^{(r, 0)}(U)$

$$(dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r})\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_r}}\right) = \delta_J^I$$

und damit

$$(dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r})(X_1, \dots, X_r) = \xi_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_r^{i_r},$$

wobei  $X_j = \sum_{\alpha=1}^n \xi_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ .

**Satz 2.43. Lokalisierungssatz für Tensorfelder**

Sei  $B \in \mathfrak{X}^{(r, s)}(M)$  mit  $s \in \{0, 1\}$  und  $(X_1, \dots, X_r)$ ,  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)$  Vektorfelder auf  $M$  mit  $X_i(x) = \tilde{X}_i(x)$  für  $i = 1, \dots, r$ . Dann gilt

$$B(X_1, \dots, X_r)(x) = B(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)(x).$$

*Beweis.* Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte um  $x \in M$ . Sei  $f \in C^\infty(M)$  mit  $f(x) = 1$ ,  $\text{supp}(f) \subset U$  (für die Existenz von  $f$  siehe 2.48). Seien  $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{X}(M)$  definiert durch

$$Y_i(y) = \begin{cases} f(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(y) & , y \in U \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$fX_i = \sum_{j=1}^n \xi^{ij} Y_j, \quad f\tilde{X}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\xi}^{ij} Y_j$$

und somit

$$\begin{aligned} B(X_1, \dots, X_r)(x) &= \underbrace{f(x)^r}_{=1} B(X_r, \dots, X_r)(x) \\ &= (f^r B(X_1, \dots, X_r))(x) \\ &= B(fX_1, \dots, fX_r)(x) \\ &= B\left(\sum_{j_1=1}^n \xi^{1j_1} Y_{j_1}, \dots, \sum_{j_r=1}^n \xi^{rj_r} Y_{j_r}\right)(x) \\ &= \left( \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n \xi^{1j_1} \dots \xi^{rj_r} B(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r}) \right)(x) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n \xi^{1j_1}(x) \dots \xi^{rj_r}(x) B(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r})(x) \end{aligned}$$

aus  $f(x)X_i(x) = f(x)\tilde{X}_i(x)$  folgt jedoch  $\xi^{ij_i}(x) = \tilde{\xi}^{ij_i}(x)$ , d.h.

$$B(X_1, \dots, X_r)(x) = \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n \tilde{\xi}^{1j_1}(x) \dots \tilde{\xi}^{rj_r}(x) B(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_r})(x)$$

Analog rechnet man dies für  $B(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r)(x)$  und daraus folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Folgerung.** Ein Tensorfeld  $B \in \mathfrak{X}^{(r,s)}(M)$  mit  $s \in \{0, 1\}$  lässt sich auf eine offene Teilmenge  $U$  einschränken.  $B_U \in \mathfrak{X}^{(r,s)}(U)$  ist definiert durch

$$B_U(X_1, \dots, X_r)(x) := B(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_r)(x),$$

wobei  $x \in U$ ,  $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $\hat{X}_i \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $\hat{X}_i|_U = X_i$ . Ist insbesondere  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte und  $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ , so ist

$$B_U = \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n B_{i_1 \dots i_r} \underbrace{dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_r}}_{\in \mathfrak{X}^{(r,0)}(U)},$$

wobei  $B_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U)$  definiert ist durch  $B_{i_1 \dots i_r} := B_U\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\right)$ .

**Satz 2.44.** *Es existiert eine bijektive Beziehung*

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{X}^{(r,s)}(M) &\longleftrightarrow \Gamma(T^{(r,s)}(M)) \quad (s = 0, 1) \\
 B &\mapsto (M \ni x \mapsto B_x \in T^{(r,s)}(T_x M)) \\
 &\quad \text{für } v_i \in T_x M \text{ wähle } X_i \in \mathfrak{X}(M) \text{ mit } X_i(x) = v_i \\
 &\quad B_x(v_1, \dots, v_r) := B(X_1, \dots, X_r)(x) \\
 B &\leftarrow (M \ni x \mapsto B_x) \in \Gamma(T^{(r,s)}(M)) \\
 &\quad \text{wobei} \\
 B(X_1, \dots, X_r)(x) &:= B_x(X_1(x), \dots, X_r(x))
 \end{aligned}$$

**Definition.** Sei  $\phi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(N)$ . Dann induziert dies ein Tensorfeld  $\phi^*B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$  durch

$$(\phi^*B)(X_1, \dots, X_r)(x) := B_{\phi(x)}(d\phi_x(X_1(x)), \dots, d\phi_x(X_r(x))) \quad X_i \in \mathfrak{X}(M)$$

$\phi^*B$  heißt induziertes Tensorfeld.

Eine  $k$ -Form auf  $M$  ist ein alternierendes  $(k, 0)$ -Tensorfeld

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{k\text{-mal}} \rightarrow C^\infty(M)$$

mit den Eigenschaften

- $\omega$  ist  $C^\infty(M)$ -linear
- $\omega(\dots, X, \dots, Y, \dots) = -\omega(\dots, Y, \dots, X, \dots)$

$\Omega^k(M)$  bezeichnet den Modul der  $k$ -Formen über  $M$ .

**Bemerkung.** Es gilt  $\Omega^k(M) \simeq \Gamma(\bigwedge^k M)$ .

## 2.7 Die "Zerlegung der 1" auf einer glatten Mannigfaltigkeit

Die "Zerlegung der 1" hat eine zentrale Bedeutung für die Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten. Größen, die man im  $\mathbb{R}^n$  kennt, kann man dadurch auf Mannigfaltigkeiten "zusammenkleben", zum Beispiel das Integral oder Skalarprodukte.

**Definition.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $\mathcal{A}$  ein zulässiger Atlas auf  $M$ . Eine abzählbare Familie  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  von nicht negativen Funktionen  $f_n \in C^\infty(M)$  heißt Zerlegung der 1 zu  $(M, \mathcal{A})$ , falls

1. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\text{supp } f_n := \text{cl } \{x \in M \mid f_n(x) > 0\}$  kompakt und in einer Kartenumgebung von  $\mathcal{A}$  enthalten.
2. Die Familie der Mengen  $\{\text{supp } f_n\}_{n=1}^\infty$  ist lokal endlich, d.h. zu jedem  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U(x)$  so dass  $U(x) \cap \text{supp } f_n \neq \emptyset$  nur für endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .
3.  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) \equiv 1 \quad \forall x \in M$ .

**Bemerkung:**

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  ist nach 2.) eine  $C^\infty$ -Funktion, da für alle  $x \in M$  die Summe auf einer Umgebung  $U(x)$  endlich ist.

**Lemma 2.45.** *Ist eine Familie von Mengen  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $A_n \subset M$ , lokal-endlich und  $K \subset M$  kompakt, so schneidet  $K$  nur endlich viele Mengen aus  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ .*

*Beweis.* Da zu jedem  $x \in M$  eine Umgebung  $U(x) \subset M$  mit  $U(x) \cap A_n = \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert und  $K \subset M = \bigcup_{x \in M} U(x)$  gilt, gibt es endlich viele Mengen  $U(x_i)$  mit

$$K \subset U(x_1) \cup \dots \cup U(x_m)$$

Jedes  $U(x_i)$  schneidet sich nur mit endlich vielen Mengen aus  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  und somit gilt das auch für  $K$ .  $\square$

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass zu jeder Mannigfaltigkeit  $M$  und jedem zulässigen Atlas  $\mathcal{A}$  eine Zerlegung der 1 existiert.

**Lemma 2.46.** *Sei  $M$  eine glatte MF,  $U \subset M$  offen und  $K \subset U$  kompakt. Dann existiert eine nicht negative Funktion  $f \in C^\infty(M)$  mit*

$$f|_K > 0 \text{ und } \text{supp } f \subset U.$$

*Beweis.* In mehreren Teilen:

1. *Behauptung:* Für jedes  $x \in U$  existiert eine Umgebung  $V(x) \subset U$  und eine nicht negative Funktion  $f_x \in C^\infty(M)$ , so dass  $f_x(x) > 0$  und  $\text{supp } f_x \subset V(x)$ .

Wähle eine Karte  $(V(x), \varphi)$  um  $x$  mit  $\varphi(x) = 0$  und  $V(x) \subset U$ .  $\varphi(V(x)) \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Umgebung von 0. Wähle ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $\text{cl}(K(0, \varepsilon)) \subset \varphi(V(x))$ .

$$p(t) := \begin{cases} e^{-1/t^2} & , \text{ falls } t > 0 \\ 0 & , \text{ falls } t \leq 0 \end{cases} \text{ ist eine } C^\infty\text{-Funktion auf } \mathbb{R}.$$

$f_x \in C^\infty(M)$  wird definiert durch

$$f_x(y) := \begin{cases} p(\varepsilon^2 - \|\varphi(y)\|^2) & , \text{ falls } y \in V(x) \\ 0 & , \text{ falls } y \in M \setminus V(x) \end{cases} .$$

Es gilt:  $f_x(x) = p(\varepsilon^2) > 0$  und  $\text{supp } f_x \subset \varphi^{-1}(\text{cl } K(0, \varepsilon)) \subset V(x) \subset U$ .

2. *Konstruktion von  $f$ :*

Sei  $x \in K \subset U$ . Wähle  $f_x \in C^\infty(M)$  wie in 1).  $W(x) := \{y \in M | f_x(y) > 0\}$  ist eine offene Teilmenge von  $M$ .

$$\text{cl } W(x) = \text{supp } f_x \subset V(x) \subset U \quad (*)$$

$K \subset \bigcup_{x \in K} W(x)$ . Da  $K$  kompakt ist, existiert endliche Teilüberdeckung:

$$K \subset W(x_1) \cup \dots \cup W(x_n)$$

Sei nun

$$f := f_{x_1} + \dots + f_{x_n} \in C^\infty(M)$$

dann gilt:

- $f$  ist nicht negativ.
- $f|_K > 0$ , da es zu jedem  $x \in K$  ein  $x_i$  gibt mit  $x \in W(x_i)$  und  $f_{x_i}(x) > 0$  und  $f_{x_j}(x) \geq 0$  für  $i \neq j$ .

und

$$\begin{aligned} \text{supp } f &= \text{cl } \{y \in M \mid f(y) > 0\} = \text{cl}(W(x_1) \cup \dots \cup W(x_n)) \\ &= \text{cl } W(x_1) \cup \dots \cup \text{cl } W(x_n) \stackrel{(*)}{\subset} U \end{aligned}$$

□

**Satz 2.47.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A}$  ein zulässiger Atlas. Dann existiert eine Zerlegung der 1 zu  $(M, \mathcal{A})$ .

*Beweis.* In mehreren Schritten:

1. Sei  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ . O.B.d.A. können wir annehmen, dass  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  eine abzählbare, lokal-endliche Überdeckung und  $\text{cl } U_\alpha$  kompakt ist, denn nach Satz 1.27 existiert zu  $\mathcal{U}$  eine solche Verfeinerung.
2. *Behauptung:* Es existiert eine offene Überdeckung  $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  von  $M$  mit  $\text{cl } W_\alpha \subset U_\alpha$ .

Zu  $x \in M$  existiert ein  $\alpha(x) \in \Lambda$  mit  $x \in U_{\alpha(x)}$ . Wir wählen eine offene Menge  $\mathcal{O}(x)$  mit  $\text{cl } \mathcal{O}(x) \subset U_{\alpha(x)}$ . (z.B. so:  $\exists \varepsilon K(\varphi(x), \varepsilon) \subset \varphi(U_\alpha)$ . Wähle  $\mathcal{O}(x) := \varphi^{-1}(K(\varphi(x), \frac{\varepsilon}{2}))$ .) Dies ergibt eine offene Überdeckung  $\mathcal{O}$  von  $M$ . Nach Satz 1.27 existiert eine abzählbare, lokal-endliche Verfeinerung  $\mathcal{N} = \{N_\kappa\}_{\kappa \in K}$  von  $\mathcal{O}$ , d.h.

- a)  $M = \bigcup_{\kappa \in K} N_\kappa$ .
- b)  $\forall x \in M \exists \kappa \in K N_\kappa \subset \mathcal{O}(x) \subset U_{\alpha(x)}$ .
- c)  $\{N_\kappa\}_{\kappa \in K}$  ist lokal endlich.
- d)  $\text{cl } N_\kappa \subset \text{cl } \mathcal{O}(x) \subset U_{\alpha(x)}$  für ein beliebiges  $x \in M$ .

Sei  $\alpha \in \Lambda$  fix.  $J_\alpha := \{\kappa \in K \mid \text{cl } N_\kappa \subset U_\alpha\}$ . Da  $\{N_\kappa\}$  lokal-endlich ist und  $\text{cl } U_\alpha$  kompakt, ist  $J_\alpha$  nach Lemma 2.45 endlich.

Sei nun  $W_\alpha := \bigcup_{\kappa \in J_\alpha} N_\kappa$ .  $W_\alpha$  ist offen.  $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  ist eine abzählbare Überdeckung von  $M$

$$\text{cl } W_\alpha = \text{cl} \left( \bigcup_{\kappa \in J_\alpha} N_\kappa \right) = \bigcup_{\kappa \in J_\alpha} \text{cl } N_\kappa \subset U_\alpha$$

Außerdem ist  $\text{cl } W_\alpha$  kompakt, da  $\text{cl } W_\alpha \subset \text{cl } U_\alpha$  ist und  $\text{cl } U_\alpha$  nach 1. kompakt ist.

3. *Definition der Zerlegung der 1:*

Wir wenden das Lemma 2.46 auf  $cl(W_\alpha) \subset U_\alpha$  an.

Es existiert eine nicht negative Funktion  $g_\alpha \in C^\infty(M)$  mit  $g_\alpha|_{cl W_\alpha} > 0$  und  $\text{supp } g_\alpha \subset U_\alpha$ . Sei  $g := \sum_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha$ .  $g$  existiert und ist eine  $C^\infty$ -Funktion, da  $\{U_\alpha\}$  eine lokal endliche Familie von Mengen ist und  $g_\alpha$  außerhalb von  $U_\alpha$  verschwindet, d.h.  $\sum_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha|_{U(x)}$  ist für jedes  $x \in M$  eine endliche Summe.

$g(x) > 0$  für alle  $x \in M$ , da zu jedem  $x \in M$  ein  $\alpha \in \Lambda$  existiert mit  $x \in W_\alpha$  und  $g_\alpha > 0$  auf  $cl W_\alpha$  und  $g_\beta \geq 0$  für  $\beta \neq \alpha$ .

$$f_\alpha := \frac{g_\alpha}{g} \in C^\infty(M)$$

Es gilt:

- a)  $f_\alpha \geq 0$ ,  $\text{supp } f_\alpha = \text{supp } g_\alpha \subset U_\alpha$
- b)  $\{\text{supp } f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  ist lokal endlich, da  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  lokal endlich ist.
- c)  $\sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha = \frac{\sum_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha}{g} \equiv 1$

Damit wird  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  zu einer Zerlegung der 1 von  $(M, \mathcal{A})$ .

□

Aus dem Beweis ergibt sich die

**Folgerung.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein abzählbarer zulässiger Atlas

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\},$$

sodass

- 1.  $\{U_\alpha\}_\alpha$  ist eine lokal-endliche Überdeckung von  $M$ .
- 2.  $cl U_\alpha$  ist kompakt für alle  $\alpha \in \Lambda$ .
- 3. Es existiert eine Zerlegung der 1  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  zu  $(M, \mathcal{A})$  mit  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$ .

**Satz 2.48.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen,  $K \subset M$  kompakt und  $K \subset U$ . Dann existiert eine nicht negative Funktion  $f \in C^\infty(M)$  mit  $f|_K \equiv 1$  und  $\text{supp } f \subset U$ .

*Beweis.* Wir wählen einen Atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  aus der Folgerung und verfeinern ihn:

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ (V \cap U, \varphi|_{V \cap U}) \mid (U, \varphi) \in \tilde{\mathcal{A}} \right\} \\ &\cup \left\{ (V \cap (M \setminus K), \varphi|_{V \cap (M \setminus K)}) \mid (U, \varphi) \in \tilde{\mathcal{A}} \right\} \\ &=: \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\} \end{aligned}$$

so dass entweder  $U_\alpha \subset U$  oder  $U_\alpha \subset M \setminus K$ . Sei  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  eine Zerlegung der 1 zu  $\mathcal{A}$ ,  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$  und

$$\tilde{\Lambda} := \{\alpha \in \Lambda \mid \text{supp } f_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

Nach Wahl des Atlas  $\mathcal{A}$  gilt:  $\alpha \in \tilde{\Lambda} \Rightarrow \text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha \subset U$ , denn für  $\alpha \in \tilde{\Lambda}$  kann  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha \subset M \setminus K$  nicht gelten. Für

$$f := \sum_{\alpha \in \tilde{\Lambda}} f_\alpha \in C^\infty(M)$$

gilt dann:

1.  $f \geq 0$
2.  $f|_K \equiv 1$ , da für alle  $x \in K$  und  $\alpha \in \Lambda$  aus  $f_\alpha(x) > 0$  folgt, dass  $\alpha$  aus  $\tilde{\Lambda}$  ist, d.h.

$$f|_K = \sum_{\alpha \in \tilde{\Lambda}} f_\alpha|_K \equiv 1.$$

3.  $\text{supp } f = \bigcup_{\alpha \in \tilde{\Lambda}} \text{supp } f_\alpha \subset U$ .

□

## 2.8 Orientierbare Mannigfaltigkeiten

Zur Erinnerung:

### 2.8.1 Orientierung eines Vektorraumes $V$ mit Dimension $n$

Es sei

$$B(V) = \text{Menge der Basen in } V.$$

Wir führen darauf eine Äquivalenzrelation ein:

$$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \sim \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) :\iff \det \mathfrak{M}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} > 0,$$

dabei bezeichne  $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$  die Übergangsmatrix von  $\mathbf{a}$  nach  $\mathbf{b}$ .

**Definition.** Eine Orientierung in  $V$  ist eine Äquivalenzklasse von Basen

$$[(a_1, \dots, a_n)] \in B(V)_{/\sim}$$

**Bemerkungen:**

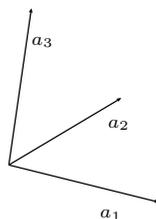
- Es existieren genau 2 mögliche Orientierungen von  $V$ .
- Mit  $O_V$  wollen wir eine Orientierung von  $V$  bezeichnen. Sei dann das Paar  $(V, O_V)$  vorgegeben, so wollen wir  $\mathbf{a} \in B(V)_{/\sim}$  positiv orientiert nennen, falls  $\mathbf{a} \in O_V$ . Anderenfalls heißt  $\mathbf{a}$  negativ orientiert.

**Beispiel 2.49. Beispiele für Orientierungen von VR**

1. Die Orientierung  $O_{\mathbb{R}^n} = [(e_1, \dots, e_n)]$  des  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \dots, 0)$ , heißt positive Orientierung des  $\mathbb{R}^n$ .
2. Im  $\mathbb{R}^2$  sind  $(a_1, a_2) \in O_{\mathbb{R}^2} \iff \varphi \in (0, \pi)$ , wobei



3. Im  $\mathbb{R}^3$  gilt:  $(a_1, a_2, a_3) \in O_{\mathbb{R}^3}$  genau dann, wenn sie die "rechte Hand Regel" erfüllen:

**2.8.2 Orientierung auf Mannigfaltigkeiten**

**Definition.** Sei  $M^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Eine Orientierung von  $M$  ist eine Familie von Orientierungen der Tangentialräume

$$O_M = \{O_{T_x M}\}_{x \in M}$$

mit folgender Eigenschaft: Zu jedem  $x \in M$  existiert eine zulässige Karte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ , sodass für deren kanonische Basis gilt:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y) \right) \in O_{T_y M} \text{ für alle } y \in U$$

$M$  heißt genau dann orientierbar, wenn eine Orientierung  $O_M$  existiert.  $(M, O_M)$  nennt man dann orientierte Mannigfaltigkeit.

Sei  $(M, O_M)$  eine orientierte MF. Eine zulässige Karte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  heißt positiv orientiert bzw. negativ orientiert, falls

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y) \right) \in O_{T_y M} \text{ für alle } y \in U$$

bzw.

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y) \right) \notin O_{T_y M} \text{ für alle } y \in U$$

**Bemerkung.** Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte und sei  $\varphi^- := (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ , dann gilt:

$$(U, \varphi) \text{ ist positiv orientiert} \iff (U, \varphi^-) \text{ ist negativ orientiert}$$

**Beispiel 2.50. Beispiele für orientierbare MF**

- $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  und  $\text{graph}(f)$  mit  $f : U_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sind orientierbar, da man sie durch eine einzige Karte überdecken kann.
- $S^1$  ist orientierbar, denn für  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  ist  $O_{T_x S^1} = [\gamma'(t)]$  eine Orientierung.

**Satz 2.51.**  $M^n$  ist genau dann orientierbar, falls ein zulässiger Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$  existiert, so dass für alle Karten  $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\det \left( D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \right) > 0 \text{ für alle } x \in U \cap V$$

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Sei  $O_M$  eine Orientierung von  $M$ . Nach Definition existiert nun um  $x \in M$  eine zulässige Karte  $(U_x, \varphi_x)$ , so dass

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y) \right) \in O_{T_y M} \text{ für alle } y \in U_x$$

Betrachten wir nun den Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in M}$ . Sei daraus  $(U_x, \varphi_x)$  und  $(U_y, \varphi_y)$  mit  $U_x \cap U_y \neq \emptyset$ , dann ist mit  $z \in U_x \cap U_y$  und der Transformationsformel für kanonische Basen

$$D(\varphi_y \circ \varphi_x^{-1})_{\varphi_x(z)} = \mathfrak{M}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(z)\right)}. \quad (*)$$

Da aber nach Voraussetzung  $(U_x, \varphi_x)$  und  $(U_y, \varphi_y)$  positiv orientiert sind, gilt

$$\det \mathfrak{M}_{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(z)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}(z)\right)} > 0 \quad (**)$$

Damit haben wir einen Atlas mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

( $\Leftarrow$ ): Sei  $x \in M$  und  $\mathcal{A}$  der besagte Atlas. Sei weiterhin  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  eine Karte um  $x$ , dann definieren wir

$$O_{T_x M} := \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right) \right].$$

Wegen (\*) und (\*\*) ist dies korrekt definiert und damit bildet

$$O_M := \{O_{T_x M}\}_{x \in M}$$

eine Orientierung von  $M$ . □

**Folgerung.** Seien  $M$  und  $N$  orientierbar, so ist auch  $M \times N$  orientierbar. Denn seien  $(U_M \times U_N, \varphi_M \times \varphi_N)$  und  $(V_M \times V_N, \psi_M \times \psi_N)$  aus dem Produktatlas  $\mathcal{A}_{M \times N}$ , so gilt

$$D\left((\psi_1 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}\right) = \begin{pmatrix} D(\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) & 0 \\ 0 & D(\psi_2 \circ \varphi_2^{-1}) \end{pmatrix}.$$

Damit wird z.B. der  $n$ -Torus  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$  orientierbar.

**Satz 2.52.** Eine  $n$ -dimensionale MF  $M^n$  ist genau dann orientierbar, falls eine  $n$ -Form  $\omega \in \Omega^n(M)$  mit der Eigenschaft

$$\omega_x \neq 0 \quad \forall x \in M$$

existiert.

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ): Sei  $\omega$  die besagte  $n$ -Form, so existiert für jedes  $x \in M$  eine Basis  $(a_1(x), \dots, a_n(x))$  in  $T_x M$  mit  $\omega_x(a_1(x), \dots, a_n(x)) \neq 0$ . Sei  $(b_1(x), \dots, b_n(x))$  nun eine weitere Basis dieser Art, so gilt bekanntlich aufgrund der Schiefsymmetrie von  $\omega_x$

$$\omega_x(a_1(x), \dots, a_n(x)) = \det\left(\mathfrak{M}_{(a_i)(b_j)}\right) \omega_x(b_1(x), \dots, b_n(x)) > 0.$$

D.h. die Definition

$$O_{T_x M} := [(a_1(x), \dots, a_n(x))]$$

ist korrekt. Wir zeigen nun, dass  $O_M := \{O_{T_x M}\}_{x \in M}$  eine Orientierung von  $M$  bildet: Sei  $x \in M$  und  $(U, \varphi)$  eine zulässige Karte um  $x$  und  $U$  zusammenhängend. Aufgrund der Stetigkeit ist dann nach dem Zwischenwertsatz entweder

$$\omega_y\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y)\right) > 0 \quad \forall y \in U,$$

oder

$$\omega_y\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y)\right) < 0 \quad \forall y \in U.$$

Im ersten Fall realisiert  $(U, \varphi)$  die Orientierung, im zweiten ist es dagegen  $(U, \varphi^-)$ .

( $\Rightarrow$ ): Hier benutzen wir die Zerlegung der 1: Sei  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  ein abzählbarer Atlas aus positiv orientierbaren Karten und  $\{f_i\}_{i \in I}$  eine Zerlegung der 1 zu  $\mathcal{A}$  mit  $\text{supp } f_i \subset U_i$ . Zu jeder Karte  $\varphi_i = (x_1, \dots, x_n)$  definieren wir  $\omega_i := dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega(U_i)$  und betrachten

$$\omega := \sum_{i \in I} \underbrace{f_i \omega_i}_{\in \Omega(M)}.$$

Zu zeigen ist nun, dass  $\omega_x \neq 0$  für alle  $x \in M$ : Sei  $(a_1(x), \dots, a_n(x)) \in O_{T_x M}$ , dann ist  $(\omega_i)_x(a_1(x), \dots, a_n(x)) > 0$  für jedes  $x \in U_i$  und  $i \in I$ . Da nun

$$f_i(x) \cdot (\omega_i)_x(a_1(x), \dots, a_n(x)) \geq 0, \text{ aber } \sum_{i \in I} f_i = 1,$$

existiert ein  $j \in I$  mit  $f_j > 0$ , so dass

$$\omega_x(a_1(x), \dots, a_n(x)) > 0$$

□

**Definition.** Sei  $(M^n, O_M)$  eine orientierte Mannigfaltigkeit. Eine  $n$ -Form  $\omega \in \Omega^n(M)$  mit

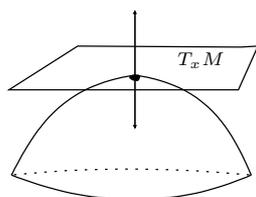
$$\omega_x(a_1(x), \dots, a_n(x)) > 0 \text{ für alle } [(a_1(x), \dots, a_n(x))] \in O_{T_x M}$$

heißt Volumenform von  $(M, O_M)$ .

**Satz 2.53.** Sei  $M^n$  eine Hyperfläche des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , d.h.  $M$  ist eine  $n$ -dimensionale UMF von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dann gilt:  $M$  ist genau dann orientierbar, falls ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld existiert

$$\begin{aligned} \mu : M^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\mapsto \mu(x) \in N_x M = (T_x M)^\perp \end{aligned}$$

wobei  $\|\mu(x)\| \equiv 1$ .



Da  $N_x M = (T_x M)^\perp$  ein ein-dimensionaler Unterraum ist, existieren dort nur 2 Vektoren der Länge 1.

*Beweis.* ( $\Rightarrow$ ): Sei  $O_M = \{O_{T_x M}\}_{x \in M}$  eine Orientierung auf  $M$ , dann wählen wir ein  $\mu(x) \in N_x M$  mit  $\|\mu(x)\| = 1$ , sodass

$$\underbrace{(v_1, \dots, v_n, \mu(x))}_{\in O_{T_x M}} \in O_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Damit ist  $\mu(x)$  eindeutig bestimmt, denn mit einem weiteren  $(w_1, \dots, w_n) \in O_{T_x M}$  ergibt sich

$$0 < \det(\mathfrak{M}_{v,w}) = \det \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_{v,w} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(\mathfrak{M}_{(v,\mu),(w,\mu)}) \quad (*)$$

Stetigkeit von  $\mu$ : Für eine positiv orientierte Karte  $(U, \varphi)$  ergibt sich aus den Eigenschaften des Vektorproduktes

$$\mu(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x)}{\left\| \frac{\partial}{\partial x_1}(x) \times \dots \times \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right\|}$$

Diese Abbildung ist stetig.

( $\Leftarrow$ ): Sei  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ein stetiges Normalenfeld, so definieren wir

$$O_{T_x M} = [(v_1, \dots, v_n)] : \Leftrightarrow (v_1, \dots, v_n, \mu(x)) \in O_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Wegen Aussage (\*) ist die Definition korrekt. Nun zur Orientierung: Sei  $(U, \varphi)$  eine zulässige Karte und  $U$  zusammenhängend. Aufgrund der Stetigkeit der Determinanten ist

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y), \mu(y) \right) \in O_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad \forall y \in U,$$

oder

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(y), \mu(y) \right) \notin O_{\mathbb{R}^{n+1}} \quad \forall y \in U.$$

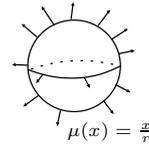
Im ersten Fall realisiert  $(U, \varphi)$  die Orientierung, und im zweiten Fall  $(U, \varphi^-)$ .  $\square$

### Folgerungen:

1.  $S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$  ist orientierbar:

$$T_x S_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, x \rangle = 0\}$$

somit ist  $\mu(x) = \frac{x}{r}$  ein Einheitsnormalenfeld



2. Gleichungsdefinierte Hyperflächen sind orientierbar :

Sei  $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung und  $0 \in \mathbb{R}$  ein regulärer Wert von  $f$ , dann bildet

$$M^n := f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

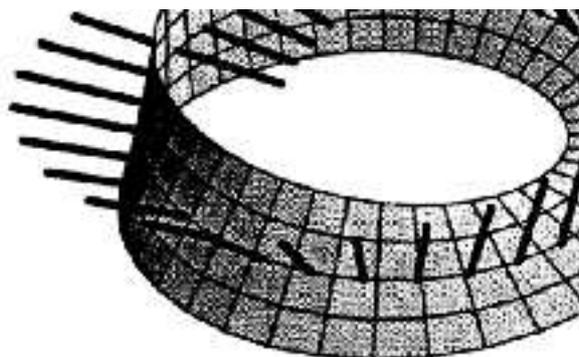
eine Hyperfläche mit  $T_x M = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, \text{grad } f(x) \rangle = 0\}$ . Sei nämlich  $\gamma$  ein Weg auf  $M$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = v \in T_x M$ , so gilt

$$0 = f(\gamma(0)) \Rightarrow [f \circ \gamma] = df_x(v) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle = 0.$$

Damit ist dann  $N_x M = \mathbb{R} \cdot \text{grad } f(x)$  und

$$\mu(x) = \frac{\text{grad } f(x)}{\|\text{grad } f(x)\|}$$

3. Das Möbiusband ist nicht orientierbar:



Normalen an ein Möbiusband

Es existiert kein stetiges Normalenfeld!

## 2.9 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Eine Integrationstheorie existiert auf jedem Maßraum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  mit Menge  $X$ ,  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und Maß  $\mu$ . Welchen Maßraum nimmt man nun für Mannigfaltigkeiten?

**Definition.** Sei  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt messbar (Nullmenge), falls für alle Karten  $(U, \varphi)$  eines zulässigen Atlanten  $\mathcal{A}_M$  die Menge  $\varphi(U \cap A)$  Lebesgue-messbar (Lebesgue-Nullmenge) ist.

Diese Definition ist korrekt, da beide Begriffe invariant unter  $C^1$ -Abbildungen sind. Die Menge der messbaren Teilmengen bilden eine  $\sigma$ -Algebra, das Maß darauf definiert man indirekt.

Wir wollen nun erklären, was man unter dem Integral über eine  $n$ -Form  $\omega$  versteht. Dazu setzen wir voraus, dass  $M^n$  eine *orientierte* Mannigfaltigkeit ist.<sup>7</sup> Wir bezeichnen dann

$$\Omega_0^n(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \text{supp } \omega = \text{cl} \{x \in M \mid \omega_x \neq 0\} \text{ ist kompakt}\}$$

die Menge der  $n$ -Formen mit kompaktem Träger, und

$$\Omega_+^n(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \omega_x(a_1, \dots, a_n) \geq 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in O_{T_x M}\}$$

bzw.

$$\Omega_-^n(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \omega_x(a_1, \dots, a_n) \leq 0 \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in O_{T_x M}\}$$

als Menge der positiven bzw. negativen  $n$ -Formen. Zur Abkürzung schreiben wir kurz

$$\Omega_{0,\pm}^n(M) := \Omega_0^n(M) \cup \Omega_+^n(M) \cup \Omega_-^n(M)$$

<sup>7</sup>Für nicht-orientierbare Mannigfaltigkeiten, siehe "Sulanke/Wintgen: Differentialgeometrie und Faserbündel"

Unser Ziel ist nun die Definition von

$$\int_A \omega \quad \text{mit } \omega \in \Omega_{0,\pm}(M)$$

**Definition.** Sei  $\omega \in \Omega_{0,\pm}(M)$ ,  $A \subset M^n$  messbar und enthalten in einer *positiv-orientierten* Karte  $(U, \varphi)$ . Das Integral von  $\omega$  über  $A$  ist dann definiert durch

$$I_1 : \quad \int_A \omega := \int_{\varphi(A)} (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda^n.$$

Dies ist das Lebesgue-Integral der stetigen Abbildung  $\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}$  über der Lebesguemenge  $\varphi(A)$  im  $\mathbb{R}^n$ , wobei  $\omega_\varphi$  aus der lokalen Darstellung von  $\omega$  in  $U$

$$\omega_U = \omega_\varphi dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

mit

$$\omega_\varphi(x) = \omega_x \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right)$$

kommt. (D.h. man integriert die lokalen Koeffizienten der Form  $\omega$  über dem Koordinatenbereich von  $A$ .)

**Satz 2.54.** Die Definition  $(I_1)$  ist korrekt, d.h. sie ist unabhängig von der gewählten Karte.

*Beweis.* Sei  $A \subset U$  und  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  und  $\psi = (y_1, \dots, y_n)$  zwei positiv-orientierte Kartenabbildungen auf  $U$ . Für die lokale Darstellung von  $\omega$  gilt dann die Transformation

$$\omega = \omega_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det \left( D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \right) \cdot \omega_\psi dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$$

bzw

$$\omega_\varphi(x) = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) = \det \left( D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)} \right) \underbrace{\omega \left( \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right)}_{\omega_\psi}$$

daraus folgt jedoch

$$\omega_\varphi \circ \varphi^{-1} = \det D \left( \underbrace{\psi \circ \varphi^{-1}}_T \right)_{\varphi(x)} \cdot \omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ \left( \underbrace{\psi \circ \varphi^{-1}}_T \right). \quad (*)$$

Auf den Diffeomorphismus  $T : \varphi(U) \rightarrow \psi(U)$  wenden wir nun die Transformationsformel für Lebesgueintegrale an:

$$\underbrace{\int_{T(\varphi(A))}}_{\psi(A)} (\omega_\psi \circ \psi^{-1}) d\lambda^n = \int_{\varphi(A)} (\omega_\psi \circ \psi^{-1} \circ T) \cdot \underbrace{|\det DT|}_{>0 \text{ da orient.}} d\lambda^n$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\varphi(A)} (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda^n$$

□

I.A. liegt  $A$  jedoch nicht vollständig in einem Kartenbereich! Dies motiviert folgende

**Definition.** Ist  $\omega \in \Omega_{0,\pm}(M)$ ,  $A \subset M^n$  messbar und  $\eta = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  ein abzählbarer, positiv-orientierter Atlas auf  $M$  mit Zerlegung der 1  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ , dann sei

$$I_2 : \quad \int_A \omega := \sum_{\alpha \in \Lambda} \underbrace{\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega}_{\text{nach Def. } I_1}$$

**Bemerkungen:**

- Ist  $\omega \in \Omega_0^n(M)$ , so summiert man nach Lemma 2.45 über endlich viele Summanden.
- Ist  $\omega \in \Omega_\pm^n(M)$ , so gilt  $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega \geq 0$  bzw.  $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega \leq 0$  für alle  $\alpha \in \Lambda$ .

**Satz 2.55.** Die Definition  $I_2$  ist korrekt, d.h. sie ist unabhängig von den gewählten  $(\eta, \{f_\alpha\})$ . Falls  $A$  in einem Kartenbereich liegt, stimmt sie mit der Definition  $I_1$  überein.

*Beweis.* In mehreren Schritten:

1. *Unabhängigkeit vom Atlas und der Zerlegung der 1*

Sei  $\hat{\eta} = (V_\beta, \psi_\beta)$ ,  $\{g_\beta\}$  ein weiterer positiv-orientierter Atlas mit Zerlegung der 1, dann ist

$$\text{supp}(f_\alpha g_\beta \omega) \subset U_\alpha \cap U_\beta$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega &= \sum_{\alpha} \int_{A \cap U_\alpha} \underbrace{\sum_{\beta} g_\beta}_{\text{endl. Sum.}} f_\alpha \cdot \omega \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \int_{A \cap U_\alpha \cap U_\beta} f_\alpha g_\beta \cdot \omega = (*) \end{aligned}$$

Nun vertauschen wir die Summenzeichen. Dabei sei darauf hingewiesen, das für ein fixiertes  $\beta$  nur endlich viele  $f_\alpha g_\beta$  nicht verschwinden, da der Träger von  $g_\beta$  kompakt ist. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{\beta} \underbrace{\sum_{\alpha}}_{\text{endl. Sum.}} \int_{A \cap U_\alpha \cap U_\beta} f_\alpha g_\beta \cdot \omega \\ &= \sum_{\beta} \int_{A \cap U_\beta} \underbrace{\sum_{\alpha} f_\alpha}_{=1} g_\beta \cdot \omega \\ &= \sum_{\beta} \int_{A \cap U_\beta} g_\beta \cdot \omega \end{aligned}$$

2. *Übereinstimmung der Definitionen*

Sei  $A \subset U$  in einem Kartenbereich einer positiv-orientierten Karte  $(U, \varphi)$ . Zu zeigen ist nun, dass

$$\int_{\varphi(A)} \omega_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda^n = \sum_\alpha \int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega.$$

Es gilt nun  $(A \cap U_\alpha) \subset A \subset U$ , d.h. wir können für  $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega$  die Definition  $I_1$  verwenden:

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \cdot \omega &= \sum_\alpha \int_{\varphi(A \cap U_\alpha)} (f_\alpha \cdot \omega_\varphi) \circ \varphi^{-1} d\lambda^n \\ &= \sum_\alpha \int_{\varphi(A \cap U)} (f_\alpha \circ \varphi^{-1}) \cdot (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda^n \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\varphi(A)} \underbrace{\left( \sum_\alpha f_\alpha \circ \varphi^{-1} \right)}_{=1} \cdot (\omega_\varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda^n \end{aligned}$$

zu (\*): Die Summe ist für  $\omega \in \Omega_0^n(M)$  endlich und in den anderen Fällen haben alle Summanden das gleiche Vorzeichen. □

**Satz 2.56.** Sei  $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(M)$ , dann gilt:

1. Rechenmethode der Integralberechnung

Aus  $A = A_0 \cup \bigcup_{i=1}^\infty A_i$  mit Nullmenge  $A_0$  und paarweise disjunkten, messbaren  $A_i$  ergibt sich

$$\int_A \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} \omega$$

D.h. man zerlege  $A$  in disjunkte Teilmengen  $A_i$ , die in Kartenumgebungen liegen und berechne  $\int_{A_i} \omega$  mit Definition  $I_1$ . Die Nullmengen kann man weglassen.

2. Mittelwertsatz

Sei  $x \in M$ ,  $f \in C^\infty(M)$  und  $\omega$  eine Volumenform auf  $M$ , dann ist

$$f(x) = \lim_{U_i \rightarrow \{x\}} \frac{\int_{U_i} f \cdot \omega}{\int_{U_i} \omega}$$

wobei  $\lim_{U_i \rightarrow \{x\}}$  bedeutet, dass  $U_i \subset \varphi^{-1}(K_{\varepsilon_i}(\varphi(x)))$  zsh. mit  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ .

3. Verhalten unter Diffeomorphismen

Sei  $\Phi : M^n \rightarrow N^n$  ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, d.h. mit  $(e_1, \dots, e_n) \in O_{T_x M}$  ist  $(d\Phi_x(e_1), \dots, d\Phi_x(e_n)) \in O_{T_{\Phi(x)} N}$ , so folgt

$$\int_A \Phi^* \omega = \int_{\Phi(A)} \omega$$

wobei natürlich  $A \subset M$  messbar ist, und  $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(M)$ .

4. Verhalten bei Orientierungsänderung von  $M$ 

$(M, O_M)$  sei eine orientierte Mannigfaltigkeit und

$$-M := (M, -O_M := \{-O_{T_x M}\})$$

die Umkehrung der Orientierung in jedem Tangentialraum, dann gilt

$$\int_A \omega = - \int_{-A} \omega$$

*Beweis.* Für 1.) wendet man das Integral  $I_2$  an und auf  $\int_{A \cap U_\alpha} f_\alpha \omega$  die entsprechenden Eigenschaften des L-Integrals im  $\mathbb{R}^n$ .

3.) und 4.) folgen aus der Transformationsformel für das L-Integral im  $\mathbb{R}^n$  (Vgl. Beweis von Satz 2.54).  $\square$

**Bemerkung.** Sei  $\mathcal{R}(M) := \{A \subset M \mid A \text{ ist messbar}\}$ . Dies ist eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$  und für jedes  $\omega \in \Omega_{0,\pm}^n(M)$  ist

$$\begin{aligned} \mu_\omega : \mathcal{R}(M) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}} \\ A &\longmapsto \int_A \omega \end{aligned}$$

ein signiertes Maß. Ist dann  $f : M \rightarrow [0, \infty]$   $\mathcal{R}$ -messbar, so gilt

$$\int_M f d\mu_\omega = \int_A f \cdot \omega$$

Dadurch erhält man eine Integrationstheorie auf  $M$  mittels  $n$ -Formen.

## 2.10 Der Satz von Stokes

Der zentrale Satz in der Integrationstheorie ist der Satz von Stokes:

**Satz 2.57.** Sei  $M^n$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$  und sei  $\omega \in \Omega_{0,\pm}^{n-1}(M)$ , so gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Diesen Satz wollen wir nun im Folgenden beweisen. Dies stellt lediglich eine Wiederholung zum Grundkurs "Analysis IV" dar, da alle Beweise analog zu denen aus der Theorie der Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  geführt werden.

Zuerst werden wir auf den Begriff der "berandeten Mannigfaltigkeit" eingehen. Danach wollen wir wichtige Eigenschaften des Differential einer  $k$ -Form wiederholen, bevor wir dann im Anschluss den Satz von Stokes beweisen.

### 2.10.1 Mannigfaltigkeiten mit Rand

Wir bezeichnen mit

$$\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

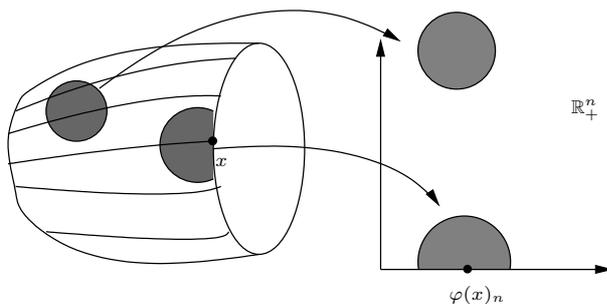
den "oberen" Halbraum mit induzierter Topologie.

**Definition.**  $M^n$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand:  $\iff$

1.  $M^n$  ist ein top. Raum mit  $T_2$ -Eigenschaft und abzählbarer Basis.
2. Es existiert eine offene Überdeckung  $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  von  $M$  und Homöomorphismen

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}_+^n$$

3.  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  sind  $C^\infty$ -Abbildungen.



Die Menge

$$\partial M = \{x \in M \mid \text{es ex. Karte } (U, \varphi) \text{ mit } \varphi(x)_n = 0\}$$

bezeichnen wir als Rand von  $M$ . Die Menge

$$\text{int } M = \{x \in M \mid \text{es ex. Karte } (U, \varphi) \text{ mit } \varphi(x)_n > 0\}$$

als Inneres von  $M$ .

Es ist nun klar, dass nur einer von diesen zwei Fällen eintreten wird. Denn sei  $x \in (\partial M \cap \text{int } M)$ , dann gibt es zum einen eine Karte

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^n$$

mit  $x \in U_1$  und  $\varphi(x)_n > 0$ , und eine Karte

$$\varphi_2 : U_2 \longrightarrow \tilde{U}_2 \subset \mathbb{R}_+^n$$

mit  $x \in U_2$  und  $\varphi(x)_n = 0$ . Damit ist  $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$  offen im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}_+^n$  jedoch nicht, da  $\varphi_2(x) \in \partial \mathbb{R}_+^n$ . Das Bild der offenen Menge  $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$  sollte unter dem Diffeomorphismus  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  jedoch auch offen sein. Es gilt also

$$\partial M \cap \text{int } M = \emptyset$$

Aus der Konstruktion erkennt man leicht, dass es sich bei  $\text{int } M$  um eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, und bei  $\partial M$  um eine  $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand handelt.

Ist nun  $M$  orientiert, so induziert dies eine Orientierung auf  $\partial M$ :

**Definition.** Sei  $(M^n, O_M)$  eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M \neq \emptyset$ . Sei weiterhin  $x \in \partial M$ ,  $w = [\gamma]$  mit  $\gamma(0) = x$  und

$$\gamma : (-\varepsilon, 0] \longrightarrow M$$

dann heißt

$$O_{\partial M} := \{O_{T_x \partial M} := \{(v_1, \dots, v_{n-1}) \mid (w, v_1, \dots, v_{n-1}) \in O_M\}\}_{x \in \partial M}$$

die von  $O_M$  induzierte Orientierung auf  $\partial M$ .

### 2.10.2 Das Differential einer $k$ -Form.

In Abschnitt 3 haben wir bereits das Differential einer glatten Funktion definiert. Dies war die folgende Abbildung, die jeder Nullform (=Funktion) eine 1-Form zuordnet

$$\begin{aligned} d : C^\infty(M) &\longrightarrow \Omega^1(M) \\ f &\longmapsto df \quad \text{wobei } df(X) := X(f) \end{aligned}$$

Die lokale Darstellung von  $df$  bezüglich einer Karte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  ist gegeben durch

$$df = \sum_{i=1}^n df \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(f) dx^i.$$

Wir definieren jetzt das Differential auf den  $k$ -Formen für  $k \geq 1$ , das jeder  $k$ -Form eine  $(k+1)$ -Form zuordnet.

**Definition.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} d : \Omega^k(M) &\longrightarrow \Omega^{k+1}(M), \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

sei definiert durch

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &:= \sum_{j=0}^k (-1)^j X_j \left( \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) \right) \\ &+ \sum_{0 \leq \alpha < \beta \leq k} (-1)^{\alpha+\beta} \omega([X_\alpha, X_\beta], X_0, \dots, \widehat{X}_\alpha, \dots, \widehat{X}_\beta, \dots, X_k). \end{aligned}$$

(Dabei bedeutet der "Hut" auf einem Eintrag  $X_i$ , d.h.  $\widehat{X}_i$ , dass das entsprechende Vektorfeld weggelassen wird.)  $d$  heißt Differential auf dem Raum der  $k$ -Formen,  $d\omega$  heißt Differential von  $\omega$ .

Als Spezialfälle erhält man beispielsweise für das Differential von 1- bzw. 2-Formen

1. Sei  $\omega \in \Omega^1(M)$  eine 1-Form. Dann gilt

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

2. Sei  $\omega \in \Omega^2(M)$  eine 2-Form. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &- \omega([X, Y], Z) + \omega([X, Z], Y) - \omega([Y, Z], X). \end{aligned}$$

**Satz 2.58. Eigenschaften des Differentials**

1. Die Abbildung  $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$  ist korrekt definiert und linear.
2. Sei  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine Karte auf  $M$  bezüglich derer  $\omega$  die lokale Darstellung  $\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I$  habe. Dann gilt für die lokale Darstellung von  $d\omega$

$$d\omega|_U = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I.$$

3.  $d(\omega \wedge \sigma) = d\omega \wedge \sigma + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\sigma$ .
4.  $dd\omega = 0$  für alle  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $k \geq 0$ .
5. Ist  $F : M \longrightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $\omega \in \Omega^k(N)$ , dann gilt

$$d(F^*\omega) = F^*d\omega.$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Nach Definition ist  $d$  offensichtlich linear. Die Schiefsymmetrie von  $d\omega$  folgt aus der Schiefsymmetrie der  $k$ -Form  $\omega$  bzw. des Kommutators  $[\cdot, \cdot]$ . Die  $C^\infty$ -Linearität von  $d\omega$  folgt aus den Rechenregeln für den Kommutator aus Satz 2.13. Man benutzt dazu z.B. die Regel

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X.$$

Also ist  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ .

2. Die  $k$ -Form  $\omega$  habe die lokale Darstellung

$$\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I.$$

Nach 1.) ist  $d\omega$  eine  $(k+1)$ -Form, besitzt also eine lokale Darstellung der Form

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{\substack{J=(j_0, \dots, j_k) \\ 1 \leq j_0 < \dots < j_k \leq n}} (d\omega) \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \cdot dx^J \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} \sum_J \left[ \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha \frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}} \left( \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_{j_\alpha}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \right) \right) \right] \cdot dx^J + 0, \end{aligned}$$

wobei  $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$  benutzt wurde. Es folgt durch Vertauschen der Differentiale

$$\begin{aligned} d\omega|_U &= \sum_{J=(I, j_\alpha)} \left[ \sum_{\alpha=0}^k \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_\alpha}} (\omega_I) \right) \right] \cdot dx_{j_\alpha} \wedge dx^I \\ &= \sum_I \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\omega_I) \cdot dx_j \right] \wedge dx^I \\ &= \sum_I d\omega_I \wedge dx^I. \end{aligned}$$

3. Wir dürfen O.B.d.A.  $\omega = f dx^I$  und  $\sigma = g dx^J$  annehmen, da  $d$  linear und eine lokale Operation ist. Dann folgt durch die bereits bekannten Rechenregeln für Differentialformen

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \sigma) &= d(f dx^I \wedge g dx^J) = d(fg dx^I \wedge dx^J) \stackrel{2.}{=} d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &\stackrel{\text{PR}}{=} (g df + f dg) \wedge dx^I \wedge dx^J = df \wedge dx^I \wedge g dx^J + dg \wedge f dx^I \wedge dx^J \\ &= df \wedge dx^I \wedge \sigma + dg \wedge \omega \wedge dx^J \stackrel{2.}{=} (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

4. Wir beweisen die Behauptung zunächst für  $k = 0$ . Sei dazu  $f \in C^\infty(M)$ . Dann gilt nach Definition des Differentials und unter Benutzung der Eigenschaften des Kommutators aus Satz 2.13

$$\begin{aligned} d(df)(X, Y) &\stackrel{\text{Def}}{=} X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X, Y]) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei nun  $k \geq 1$  und  $\omega \in \Omega^k(M)$  eine  $k$ -Form mit der lokalen Darstellung  $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$ . Dann gilt

$$d(d\omega) \stackrel{2.}{=} \sum_I d(d\omega^I \wedge dx^I) \stackrel{3.}{=} \sum_I [d(d\omega^I) \wedge dx^I - d\omega^I \wedge d(dx^I)].$$

Da  $\omega^I \in C^\infty(M)$  und  $dx^I = dx_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_1}$  ist, folgt  $d(d\omega) = 0$  aus dem Fall  $k = 0$ .

5. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Grad von  $\omega$ .

Sei  $k = 0$  und  $f \in C^\infty(N) = \Omega^0(N)$ . Dann gilt  $(F^*f)(x) = f(F(x))$ . Also folgt

$$d(F^*f)_x(v) = d(f \circ F)_x(v) \stackrel{KR}{=} (df)_{F(x)}(dF_x(v)) = (F^*df)_x(v),$$

d.h.  $d(F^*f) = F^*df$ .

Wir setzen nun voraus, dass die Behauptung bereits für  $k$ -Formen bewiesen ist und schließen auf  $(k+1)$ -Formen. Sei also  $\omega$  eine  $(k+1)$ -Form. Wie oben dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\omega = f dx_0 \wedge \dots \wedge dx_k =: dx_0 \wedge \tilde{\omega}$  gilt. Dann ist  $\tilde{\omega}$  eine  $k$ -Form, erfüllt also die Induktionsvoraussetzung.

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d(F^*(dx_0 \wedge \tilde{\omega})) = d(F^*dx_0 \wedge F^*\tilde{\omega}) \stackrel{3.}{=} F^*ddx_0 - d(F^*\tilde{\omega}) \\ &\stackrel{IV}{=} 0 - F^*(d\tilde{\omega}) = F^*(-d\tilde{\omega}) = F^*(d(dx_0 \wedge \tilde{\omega})). \end{aligned}$$

□

### 2.10.3 Der Satz von Stokes für Differentialformen

**Satz 2.59. Satz von Stokes.** Sei  $M^n$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit,  $\partial M$  der Rand von  $M$ , versehen mit der induzierten Orientierung und  $\omega$  eine  $(n-1)$ -Form mit kompaktem Träger auf  $M$ . Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (*)$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  ein Atlas auf  $M$  und  $\{f_\alpha\}$  eine Zerlegung der 1 zu  $\mathcal{A}$ . Dann ist  $\omega = \sum_\alpha f_\alpha \omega$ , wobei die Summe endlich ist, da  $\text{supp } \omega$  kompakt und die Familie der Träger  $\{\text{supp } f_\alpha\}$  lokal endlich ist. Da die linke und rechte Seite von  $(*)$  linear in  $\omega$  sind, genügt es zu zeigen, dass

$$\int_M d(f_\alpha \omega) = \int_{\partial M} f_\alpha \omega$$

gilt. Deshalb können wir, um  $(*)$  zu beweisen, o.B.d.A. annehmen, dass der Träger  $\text{supp } \omega$  in einer Kartenumgebung  $U$  von  $M$  liegt.

Wir werden nun  $(*)$  durch direktes Ausrechnen beider Integrale beweisen.

1. Berechnung von  $\int_M d\omega$ :

Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine positiv orientierte Karte mit  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}_+^n$ . Bezüglich dieser Karte ist  $\omega$  durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n, \quad \text{mit } \omega_i = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

gegeben. Wenden wir das Differential darauf an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^n d\omega_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_i) dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (d\omega)_\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen und Umformen des Integrals erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_U d\omega \\ &= \int_{\varphi(U)} (d\omega)_\varphi \circ \varphi^{-1} d\lambda_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i) \circ \varphi^{-1} d\lambda_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i \circ \varphi^{-1})(x) dx_i \right)}_{(**)} dx_1 \dots \widehat{dx}_i \dots dx_n, \end{aligned}$$

wobei die letzte Identität aufgrund des Satzes von Fubini gilt. Da  $\text{supp } \omega \subset \varphi(U)$ , konnten wir beim letzten Schritt den Integrationsbereich über ganz  $\mathbb{R}^n$  ausdehnen. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

a) Ist  $i < n$ , so gilt

$$(**) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\omega_i \circ \varphi^{-1})(x) dx_i = [\omega_i \circ \varphi^{-1}]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

da  $\text{supp } \omega_i$  kompakt ist.

b) Falls  $i = n$  ist, gilt

$$(**) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n} (\omega_n \circ \varphi^{-1})(x) dx_i = -\omega(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)).$$

Daraus folgt

$$\int_M d\omega = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

2. *Berechnung von  $\int_{\partial M} \omega$ :*

Da  $\text{supp } \omega \subset U$ , ist  $\text{supp } \omega|_{\partial M} \subset \partial M \cap U$ . Ist  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine Karte auf  $M$ , so ist

$$(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M} = (x_1, \dots, x_{n-1}))$$

eine Karte auf  $\partial M$ , da der Rand durch  $x_n = 0$  charakterisiert ist.

Sei  $\nu(x) = -\frac{\partial}{\partial x_n}$  der nach außen zeigende Normalenvektor in  $T_x M$ . Die folgenden Basen von  $T_x M$  in einem Randpunkt  $x \in \partial M$  sind gleich orientiert:

$$\begin{aligned} \left( \nu(x), \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x) \right) &\sim \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x), (-1)^{n-1} \nu(x) \right) \\ &\sim \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}(x), (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right) \end{aligned}$$

da die Vektoren  $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$  und  $\nu(x)$  nach Definition in verschiedene Richtungen bezüglich  $T_x \partial M$  zeigen,  $\nu(x)$  nach außen und  $\frac{\partial}{\partial x_n}(x)$  nach innen. Also ist die Karte  $(U \cap \partial M, \varphi|_{U \cap \partial M})$  des Randes positiv orientiert, falls  $n$  gerade ist und negativ orientiert, falls  $n$  ungerade ist.

Die lokale Darstellung von  $\omega|_{U \cap \partial M}$  bzgl. der Randkarte ist

$$\omega|_{U \cap \partial M} = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n|_{U \cap \partial M} = \omega_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},$$

denn für jeden Tangentialvektor  $\frac{\partial}{\partial x_j}(x) \in T_x \partial M$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , ist

$$(dx_n)_x \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right) = 0$$

a) Sei  $n$  gerade. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{U \cap \partial M} \omega_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \\ &= \int_{\varphi(U \cap \partial M)} \omega_n \circ \varphi^{-1} d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

b) Ist  $n$  ungerade, so ist

$$\int_{\partial M} \omega = - \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_n(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) d\lambda_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Damit ist die Behauptung  $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$  bewiesen.

□





Ist  $g$  eine Metrik auf  $M^n$ , so heißt  $(M, g)$

- Riemannsche Mannigfaltigkeit  $\Leftrightarrow g$  Riemannsche Metrik
- Lorentz-Mannigfaltigkeit  $\Leftrightarrow g$  Lorentz-Metrik
- pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $\Leftrightarrow g$  pseudo-Riemannsche Metrik
- semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $\Leftrightarrow g$  beliebige Metrik.

Jedem Vektor des Tangentialraumes lässt sich genau eine der folgenden Eigenschaften zuordnen:

**Definition.** Sei  $g$  eine Metrik auf  $M$ , dann heißt  $v \neq 0$

- zeitartig  $\Leftrightarrow g_x(v, v) < 0$
- isotrop (lichtartig)  $\Leftrightarrow g_x(v, v) = 0$
- raumartig  $\Leftrightarrow g_x(v, v) > 0$ .

### Lokale Darstellung einer Metrik

Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte, dann ist

$$g_U = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \circ dx_j$$

mit

$$g_{ij}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right).$$

Die Funktionen  $g_{ij} \in C^\infty(U)$  heißen lokale Koeffizienten der Metrik bezüglich  $(U, \varphi)$ .

Da  $g_x$  nicht ausgeartet und symmetrisch ist, ist die Matrix  $(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n$  symmetrisch und invertierbar. Die dazu inverse Matrix bezeichnet man mit  $(g^{kl}(x))_{k,l=1}^n$ .

### Beispiel 3.1. Beispiele für Metriken

- **Metriken im  $\mathbb{R}^n$**

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$  eine nicht ausgeartete symm. BLF vom Index  $p$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Ein Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine glatte Abbildung

$$X \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

und somit ist

$$g_{p,q}(X, Y)(x) := \langle X(x), Y(x) \rangle_{p,q}$$

eine Metrik vom Index  $p$  auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$ .

Zur lokalen Darstellung von  $g_{p,q}$ : Sei  $(a_1, \dots, a_n)$  ONB von  $(\mathbb{R}^{p,q}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q})$ , d.h.

$$\langle a_i, a_j \rangle_{p,q} = \begin{cases} -\delta_{ij} & \text{für } i \leq p \\ \delta_{ij} & \text{für } i > p. \end{cases}$$

Für eine Karte auf dem  $\mathbb{R}^n : \varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$  mit  $x = \sum x_i a_i$  gilt dann  $\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = a_i$  und daraus folgt

$$g_{ij}(x) = \langle a_i, a_j \rangle_{p,q} = \varepsilon_i \delta_{ij} \quad \text{wobei } \varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{für } i \leq p \\ 1 & \text{für } i > p \end{cases}$$

und damit ist

$$g_{p,q} = -dx_1^2 - \dots - dx_p^2 + dx_{p+1}^2 + \dots + dx_n^2 \quad \text{wobei } dx_i^2 = dx_i \circ dx_i.$$

$(\mathbb{R}^n, g_{p,q})$  heißt Minkowski-Raum.

### • Induzierte Metriken

Sei  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  eine Immersion. Dann heißt  $f^*\tilde{g}$  die induzierte Riemannsche Metrik auf  $M$ .

Sei  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  eine Immersion, so dass für alle  $x \in M$

$$df_x(T_x M) \subset T_{f(x)}\tilde{M}$$

ein nicht ausgearteter Unterraum ist, (d.h.  $\tilde{g}_{f(x)}$  ist auf  $df_x(T_x M)$  nicht ausgeartet). Dann ist  $f^*\tilde{g}$  eine Metrik auf  $M$  und heißt induzierte semi-Riemannsche Metrik.

- Sei  $(\mathbb{R}^2, g_{1,1})$  und  $M = \mathbb{R}$ . Die Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow (x, x)$  ist eine Einbettung. Aber jeder Vektor  $df_{(x,x)}(v)$  ist isotrop und deshalb ist  $f^*g_{1,1} \equiv 0$ , also keine Metrik.
- Sei speziell  $M \subset \tilde{M}$  eine Untermannigfaltigkeit und  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, sodass für alle  $x \in M$   $T_x M \subset T_x \tilde{M}$  ein nicht ausgearteter Unterraum ist. Dann ist

$$g := \tilde{g}|_{\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)}$$

eine semi-Riemannsche Metrik auf  $M$ .

- Ist  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine Untermannigfaltigkeit des reellen Vektorraumes  $\mathbb{R}^N$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$  das Standardskalarprodukt von  $\mathbb{R}^N$ . Dann gilt  $\mathfrak{X}(M) \subset C^\infty(M^n, \mathbb{R}^N)$ .

$$g(X, Y)(x) := \langle X(x), Y(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

ist Riemannsche Metrik auf  $M^n$ . Diese heißt induzierte Riemannsche Metrik der Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^N$ .

### • Rotationsflächen im $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit

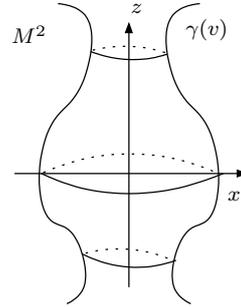
$$M^2 = \{f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v)) \mid v \in (a, b), u \in \mathbb{R}\}$$

mit einer Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den Eigenschaften  $\gamma_1(v) > 0$  und  $\dot{\gamma} \neq 0$ .

$M^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist eine 2-dim. UMF. Sei  
 $D = (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times (v_0 - \varepsilon, v_0 + \varepsilon)$ ,  
dann ist  
 $(U = f(D), \varphi = f^{-1}|_D = (u, v))$   
eine Karte um  $f(u_0, v_0)$ .



Für die kanonische Basis ergibt sich damit

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial u} (u, v) = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v} (f(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial v} (u, v) = (\dot{\gamma}_1(v) \cos u, \dot{\gamma}_1(v) \sin u, \dot{\gamma}_2(v)).$$

Die Koeffizienten der lokalen Darstellung der induzierten Metrik ergeben sich dann aus

$$\begin{aligned} (g_{ij}(f(u, v))) &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(v) & 0 \\ 0 & \|\dot{\gamma}(v)\|^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$g_{f(u,v)} = \gamma_1^2(v) du^2 + \|\dot{\gamma}(v)\|^2 dv^2$$

### • Produkt-Metriken

Seien  $(M, g), (N, h)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit den Projektionen

$$\pi_1 : M \times N \rightarrow M \text{ und } \pi_2 : M \times N \rightarrow N$$

Wir definieren eine Metrik  $r \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M \times N)$  durch

$$r := \pi_1^* g + \pi_2^* h.$$

Dies ist eine Metrik auf  $M \times N$  mit  $\text{Index}(r) = \text{Index}(g) + \text{Index}(h)$  und heißt Produkt-Metrik.

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}(M \times N) &\simeq T_x M \times T_y N \\ v &\mapsto \underbrace{((d\pi_1)_{(x,y)}(v))}_{v_1}, \underbrace{((d\pi_2)_{(x,y)}(v))}_{v_2} \end{aligned}$$

und damit

$$r_{(x,y)}(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = g_x(v_1, w_1) + h_y(v_2, w_2).$$

Deshalb benutzt man auch folgende Schreibweise:

$$r = g + h$$

• **warped-product-Metriken**

Seien  $(M, g), (N, h)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten und

$$f \in C^\infty(M), f > 0$$

Wir definieren folgende Metrik auf  $M \times N$

$$r := \pi_1^* g + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* h,$$

oder in Kurzform

$$r = g + f^2 h,$$

wobei

$$r_{(x,y)}(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = g_x(v_1, w_1) + f(x)^2 h_y(v_2, w_2)$$

Diese semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M \times_f N := (M \times N, r)$  heißt warped product.

Viele kosmologische Modelle (4-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die die Einstein-Gleichungen der ART erfüllen:  $Ric - \frac{1}{2}Rg = T$ ) sind warped products.

$$M = I \times_f F$$

Dabei ist  $(F, g)$  eine 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung,  $I_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f \in C^\infty(I)$ . Für die Metrik ergibt sich

$$r = -dt^2 + f^2 g.$$

**Satz 3.2.** *Auf jeder  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M^n$  existiert eine Riemannsche Metrik.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  ein abzählbarer Atlas mit Zerlegung der 1  $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ . Wir betrachten die induzierte Riemannsche Metrik

$$g_\alpha := \varphi_\alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(U_\alpha)$$

auf  $U_\alpha \subset M$ . Da  $\text{supp } f_\alpha \subset U_\alpha$  ist  $f_\alpha g_\alpha \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$  ein symmetrisches Tensorfeld auf  $M$ . Die Fortsetzung

$$g := \sum_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \cdot g_\alpha \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$$

ist wohldefiniert und symmetrisch, da  $\{\text{supp } f_\alpha\}$  lokal endlich ist. Dazu ist  $g_x$  positivdefinit: Für  $v \in T_x M, v \neq 0$  gilt

$$g_x(v, v) = \sum_{\alpha \in \tilde{\Lambda}} f_\alpha(x) g_{\alpha_x}(v, v) \geq 0,$$

wobei  $\tilde{\Lambda} = \{\alpha \in \Lambda \mid x \in U_\alpha\}$ . Da  $\sum_{\alpha \in \tilde{\Lambda}} f_\alpha \equiv 1$ , existiert  $\alpha_0$  mit  $f_{\alpha_0}(x) > 0$ , sodass  $g_x(v, v) > 0$ . Damit ist  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ . □

Metriken mit  $\text{Index}(g) = k > 0$  existieren nicht immer. Dazu braucht man zusätzliche topologische Bedingungen an  $M$ .

**Satz 3.3.** *Auf  $M^n$  existiert genau dann eine pseudo-Riemannsche Metrik der Signatur  $(p, q)$ , wenn*

$$TM = \xi^p \oplus \eta^q,$$

dabei sind  $\xi^p$  und  $\eta^q$  Vektorbündel vom Rang  $p$  und  $q$ .

Die Aufspaltung  $TM = \xi^p \oplus \eta^q$  hat topologische Konsequenzen  $\rightarrow$  Stiefel-Whitney-Klassen, Chernklassen. Für Lorentz-Metriken gilt speziell

**Satz 3.4.** *Sei  $M^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *Auf  $M$  existiert eine Lorentz-Metrik*
2. *Es existiert ein nirgends verschwindendes Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ( $X(x) \neq 0, \forall x \in M$ )*
3.  *$M$  ist nicht-kompakt oder  $M$  ist kompakt und die Eulersche Charakteristik  $\mathfrak{X}(M)$  ist Null.*

(Beweis:  $\rightarrow$  O'Neill: Semi-Riemannsche Geometrie, S. 149).

Wir erinnern an den schon aus Analysis IV bekannten

**Satz 3.5. Satz vom Igel.** *Auf der Sphäre  $S^{2n}$  existiert kein nirgends verschwindendes Vektorfeld.*

Aus Satz 3.4 folgt nun, dass auf  $S^{2n}$  keine Lorentz-Metrik existieren kann.

## 3.2 Längen, Winkel und Volumen in semi-Riem. MF

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit dem Problem der Volumen- und Längen-Definition einer semi-Riem. Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  beschäftigen.

### 3.2.1 Längen von Kurven in $M$

**Definition.** Sei  $v \in T_x M$ , dann heißt

$$\|v\|_g := \sqrt{|g_x(v, v)|}$$

die Länge des Vektors  $v$  in  $(T_x M, g)$ .

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riem. MF. und  $\gamma : I_{\text{Intervall}} \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine glatte Kurve auf  $M$ . Dann heißt

$$l(\gamma) := \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt$$

Länge von  $\gamma$  in  $(M, g)$ .

**Bemerkungen:**

- Ist  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  eine UMF mit induzierter Metrik. Dann ist für eine glatte Kurve  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt$$

die aus der Analysis bekannte Länge.

- Für eine pseudo-Riem.-MF kann die Länge einer nicht konstanten Kurve auch Null sein, da für isotrope Kurven stets  $\|\dot{\gamma}\| \equiv 0$  gilt. (Das Licht bewegt sich in der Relativitätstheorie auf isotropen Kurven.)

**Eigenschaften der Länge**

1. Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine glatte Kurve und  $\tau : J \rightarrow I$  eine Parametertransformation (d.h.  $\tau$  ist ein Diffeomorphismus). Sei dann

$$\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau : J \rightarrow M \quad \text{Umparametrisierung von } \gamma$$

so gilt

$$l(\gamma) = l(\tilde{\gamma}),$$

da

$$\begin{aligned} l(\tilde{\gamma}) &= \int_J \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|_g dt \\ &= \int_J \|(\gamma \circ \tau)'(t)\|_g dt \\ &\stackrel{\text{Int.-Trafo}}{=} \int_{\tau(J)} \|(\gamma \circ \tau)'(\tau^{-1}(t))\|_g \left| \det(\tau^{-1})'(t) \right| dt \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} \int_I \|(\dot{\gamma} \circ \tau)(\tau^{-1}(t))\|_g |\tau'(t)| \frac{1}{|\tau'(t)|} dt \\ &= l(\gamma) \end{aligned}$$

2. Eine Kurve  $\gamma : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt nach Bogenlänge parametrisiert, falls

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g \equiv 1.$$

Für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\gamma$  gilt dann

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt \\ &= \int_I dt \\ &= b - a \end{aligned}$$

3. Eine Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt regulär, falls  $\dot{\gamma} \neq 0$  für alle  $t \in I$ .

*Behauptung:* Jede reguläre, nirgends isotrope Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  ist nach Bogenlänge parametrisierbar, d.h. es existiert eine Umparametrisierung  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$  mit  $\|\tilde{\gamma}'(t)\|_g \equiv 1$ .

*Beweis.* Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  regulär und nirgends isotrop. Wir betrachten die Abbildung

$$l : [a, b] \rightarrow M$$

$$t \mapsto l(\gamma|_{[a, t]}) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt$$

dann ist  $l'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|_g > 0$ . Wegen dieser strikten Monotonie existiert eine Umkehrabbildung

$$\tau := l^{-1} : [0, l(\gamma)] \rightarrow [a, b].$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \|(\gamma \circ \tau)'(t)\|_g &= \|\dot{\gamma}(\tau(t))\|_g |\tau'(t)| \\ &= \|\dot{\gamma}(\tau(t))\|_g \frac{1}{l'(\tau(t))} \\ &= 1 \end{aligned}$$

D.h.  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$  ist nach Bogenlänge parametrisiert. □

**Definition.** Eine Kurve  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow M$  heißt stückweise glatt, falls  $\gamma$  stetig ist und eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

existiert, sodass die

$$\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow M$$

für alle  $i = 0 \dots n$  glatte Kurven sind. Die Punkte  $\gamma(t_i)$  heißen Ecken von  $\gamma$ .



Dann ist die Länge von  $\gamma$  definiert durch

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^m l(\gamma_i).$$

Die Eigenschaften 1-3 bleiben erhalten.

### 3.2.2 Volumen in semi-Riem. Mannigfaltigkeiten

Im letzten Kapitel haben wir die Integration von  $k$ -Formen auf Mannigfaltigkeiten besprochen. Nun wollen wir dies auf den Begriff des Volumens ausdehnen. Wie man aber am Beispiel des  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$  sehen kann, ist der Volumenbegriff stark an die Metrik gebunden! Wir suchen nun eine spezielle, der Metrik  $g$  angepasste positive  $n$ -Form auf  $M^n$ .

**Definition.** Sei  $(M^n, g, O_M)$  eine orientierte semi-Riem. Mannigfaltigkeit und  $(v_1, \dots, v_n)$  eine positiv-orientierte Basis in  $T_x M$  mit dualer Basis  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  aus  $T_x^* M$ . Dann bezeichnen wir

$$dM_x := \sqrt{|\det(g_x(v_i, v_j))|} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n$$

**Bemerkungen:**

- $dM_x$  ist unabhängig von der gewählten Basis. Denn sei  $(a_1, \dots, a_n)$  eine weitere positiv-orientierte Basis mit dualer Basis  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  und Übergangsmatrix  $v_i = A_{ik} a_k$ , so ist nach Voraussetzung  $\det A > 0$ . Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} g_x(v_i, v_j) &= g_x(A_{ik} a_k, A_{jl} a_l) \\ &= A_{ik} A_{jl} g_x(a_k, a_l) \\ &= A_{ik} A_{lj}^T g_x(a_k, a_l) \\ &= \sum_k A_{ik} \sum_l g_x(a_k, a_l) A_{lj}^T. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise heißt das

$$\{g_x(v_i, v_j)\}_{ij} = A \cdot \{g_x(a_k, a_l)\}_{kl} \cdot A^T.$$

Andererseits ist

$$\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n = (\det A) \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n.$$

Für  $dM_x$  ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \sqrt{|\det(g_x(v_i, v_j))|} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_n &= \sqrt{|\det(A)^2 \cdot \det(g_x(a_k, a_l))|} (\det A)^{-1} \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n \\ &= \sqrt{|\det(g_x(a_k, a_l))|} \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n. \end{aligned}$$

- Die Abbildung  $x \mapsto dM_x$  ist ein glatter Schnitt in  $\Lambda^n M$ , denn sei  $(U, \varphi = x_1, \dots, x_n)$  eine positiv-orientierte Karte, so gilt für deren kanonische Basis

$$dM_x = \underbrace{\sqrt{\left| \det g_x \left( \frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right) \right|}}_{\in C^\infty(U)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

- Ist  $(e_1, \dots, e_n)$  eine positiv-orientierte ONB aus  $T_x M$  und  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  deren Dual, so gilt

$$dM_x(e_1, \dots, e_n) = 1 = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n(e_1, \dots, e_n),$$

d.h.

$$dM_x = \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_n.$$

**Definition.** Die  $n$ -Form  $dM_g \in \Omega^n(M)$  mit

$$dM_g : x \longmapsto dM_x \in \Lambda^n(T_x^* M)$$

heißt Volumenform von  $(M, g, O_M)$ .

Lokale Darstellung der Volumenform: Ist  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine positiv-orientierte Karte und  $g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right)$  seien die Koeffizienten der Metrik, dann ist

$$dM|_U = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

**Definition.** Sei  $(M^n, g, O_M)$  eine orientierte semi-Riem. Mannigfaltigkeit und  $A \subset M$  eine messbare Teilmenge, so heißt die Zahl

$$Vol_g(A) := \int_A dM_g$$

das Volumen von  $A$  in  $(M^n, g, O_M)$ . (Im Fall  $n = 2$  entspricht dies dem 'Flächeninhalt'.)

**Bemerkungen:**

- Für  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_{\mathbb{R}^n})$  ist  $Vol_g(A) = \lambda^n(A)$ , dem Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ .
- $Vol_g$  ist unabhängig von der gewählten Orientierung, denn für  $-M = (M, -O_M)$  ist

$$d(-M) = -dM$$

und damit

$$\int_{-A} d(-M) = - \int_{-A} dM = \int_A dM$$

- Man kann das Volumen auch für Teilmengen von nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten definieren:

Sei  $A \subset M$  messbar, so ist

$$A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \quad \text{wobei } A_{\alpha} \text{ paarweise disjunkt, und } A_{\alpha} \subset U_{\alpha} \text{ Karte}$$

Dann fixieren wir eine Orientierung auf  $U_{\alpha}$  womit

$$Vol_g(A_{\alpha}) = \int_{A_{\alpha}} dU_{\alpha}$$

und wir setzen

$$\text{Vol}_g(A) = \sum_{\alpha} \text{Vol}_g(A_{\alpha})$$

### Beispiel 3.6. Volumenberechnungen

#### • Oberflächen von Graphen

Sei  $h : U_{\text{offen}} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung. Für  $M^2 = \text{graph}(h) \subset \mathbb{R}^3$  mit induzierter Metrik gilt dann

$$\text{Vol}_g(M) = \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_2}\right)^2} du_1 du_2$$

denn in der inversen Karte  $f(u_1, u_2) = (u_1, u_2, h(u_1, u_2))$  mit  $f(u_1, u_2) = x$  hat man

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(x) = df_{(u_1, u_2)}(e_1) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2)\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(x) = df_{(u_1, u_2)}(e_2) = \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2) = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right).$$

Für die Koeffizienten der Metrik ergibt sich dann

$$\begin{aligned} (g_{ij}(x)) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}(x), \frac{\partial}{\partial u_j}(x) \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2)\right)^2 & \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2) \cdot \frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2) & 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es folgt

$$\det(g_{ij}(x)) = 1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right)^2.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Vol}_g(M) &= \int_M dM_g \\ &= \int_{f(U)} \sqrt{|\det(g_{ij}(x))|} du_1 \wedge du_2 \\ &= \int_{f^{-1}(f(U))} \sqrt{|\det(g_{ij}(f(u_1, u_2)))|} d\lambda^2 \\ &= \int_U \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1, u_2)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1, u_2)\right)^2} du_1 du_2. \end{aligned}$$

• **Oberflächen von Rotationsflächen**

Hier ist bekanntlich<sup>1</sup>

$$M^2 = \{f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v))\},$$

wobei  $\gamma_1 > 0$  und  $\dot{\gamma}(v) \neq 0$ . Für die Metrik-Koeffizienten ergibt sich mit  $x = f(u, v)$

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1^2(v) & 0 \\ 0 & \|\dot{\gamma}(v)\|^2 \end{pmatrix}$$

und daraus folgt

$$\det(g_{ij}(x)) = \gamma_1^2(v) \cdot \|\dot{\gamma}(v)\|^2.$$

Für das Volumen erhalten wir nun

$$Vol_g(M) = \int_0^{2\pi} \int_a^b \gamma_1(v) \cdot \|\dot{\gamma}(v)\| du dv$$

bzw.

$$Vol_g(M) = 2\pi \int_a^b \gamma_1(v) \cdot \|\dot{\gamma}(v)\| du dv$$

### 3.2.3 Der Schnittwinkel von Kurven in semi-Riem. Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei  $(M, g)$  eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit.

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt beliebiger Signatur kann man erklären was 'senkrecht' bedeutet, Winkel existieren aber nur im euklidischen Fall.

**Definition.** Seien  $v, w \in T_x M$ , dann heißt  $v$  orthogonal zu  $w$  ( $v \perp w$ ) falls

$$g_x(v, w) = 0$$

**Bemerkungen:**

1. Ist  $(M, g)$  eine *Riemannsche MF*, so kann man den Schnittwinkel beliebiger Tangentialvektoren  $u, v \in T_x M$  definieren. Für ein positiv-definites Skalarprodukt gilt bekanntlich die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|g_x(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

und daraus folgt dann

$$-1 \leq \frac{g_x(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \quad \text{für alle } u, v \neq 0.$$

---

<sup>1</sup>siehe Beispiel 3.1 auf Seite 115

Es existiert also ein eindeutig bestimmter Winkel  $\alpha \in [0, \pi]$  für den

$$\cos \alpha = \frac{g_x(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Dieser Winkel  $\alpha =: \angle(u, v)$  heißt Schnittwinkel von  $u$  und  $v$  in  $(M, g)$ .

2. Sei  $(M, g)$  eine *Lorentz-MF*.

a) Sind  $v, w \in T_x M$  *zeitartig*, so gilt

$$|g_x(v, w)| \geq \|v\| \cdot \|w\|.$$

*Beweis.* Es gelte

$$w = av + \tilde{w} \quad \text{wobei } \tilde{w} \perp v.$$

Damit folgt

$$g_x(w, w) = g_x(av + \tilde{w}, av + \tilde{w}) = a^2 g_x(v, v) + g_x(\tilde{w}, \tilde{w}). \quad (*)$$

Da  $v$  zeitartig ist und der Index von  $g$  nur 1, kann  $\tilde{w}$  nicht zeitartig sein, d.h. es gilt

$$g_x(\tilde{w}, \tilde{w}) \geq 0.$$

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned} g(v, w)^2 &= g(v, (av + \tilde{w}))^2 = a^2 (\|v\|^2)^2 \\ \|v\|^2 \|w\|^2 &= \|v\|^2 (a^2 \|v\|^2 + \|\tilde{w}\|^2) = a^2 (\|v\|^2)^2 + \|v\|^2 \|\tilde{w}\|^2, \end{aligned}$$

woraus die Ungleichung wegen  $\|v\|^2 \leq 0 \leq \|\tilde{w}\|^2$  folgt.

□

Damit gilt also

$$\frac{|g_x(v, w)|}{\|v\| \cdot \|w\|} \geq 1$$

und es existiert genau ein  $\alpha \in [0, \infty)$  für das

$$\cosh \alpha = \frac{|g_x(v, w)|}{\|v\| \cdot \|w\|}.$$

Dieses  $\alpha$  heißt hyperbolischer Winkel zwischen  $v$  und  $w$ .

b) Ist  $v \in T_x M$  isotrop, so gilt  $v \perp v$ .

**Definition.** Zwei reguläre glatte Kurven  $\gamma : I \rightarrow M$  und  $\delta : J \rightarrow M$  schneiden sich in  $x_0 \in M$  orthogonal, falls

$$x_0 = \gamma(t_0) = \delta(t_0) \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}(t_0) \perp \dot{\delta}(t_0)$$

Sei  $(M, g)$  *Riemannsch*.  $\gamma$  und  $\delta$  schneiden sich im Winkel  $\alpha \in [0, \pi]$ , falls

$$x_0 = \gamma(t_0) = \delta(t_0) \quad \text{und} \quad \alpha = \angle(\dot{\gamma}(t_0), \dot{\delta}(t_0)) =: \angle_{x_0}(\gamma, \delta).$$

### 3.3 Isometrien und konforme Abbildungen

**Definition.** Seien  $(M, g)$  und  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  semi-Riem. Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  heißt Isometrie, falls

1.  $f$  ist ein Diffeomorphismus.
2.  $f^*\tilde{g} = g$ .

In diesem Fall nennen wir  $(M^n, g)$  und  $(\tilde{M}^n, \tilde{g})$  isometrisch.

**Bemerkung.** Der Ausdruck  $f^*\tilde{g} = g$  heißt ausgeschrieben:

$$\tilde{g}_{f(x)}(df_x(v), df_x(w)) = g_x(v, w) \quad (*),$$

damit ist also  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \tilde{M}$  eine lineare Isometrie der Vektorräume.

**Definition.** Eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^n$  heißt lokale Isometrie, falls

$$f^*\tilde{g} = g.$$

Aus (\*) erkennt man unmittelbar, dass mit  $f^*\tilde{g} = g$  das Differential  $df$  injektiv sein muss und aus Dimensionsgründen demnach bijektiv. Der Satz über die Umkehrabbildung liefert dann eine lokale Diffeomorphie.

**Definition.** Eine  $C^\infty$ -Abbildung  $f : M^n \rightarrow \tilde{M}^n$  heißt konform, falls

$$f^*\tilde{g} = \sigma^2 g \quad \text{wobei } \sigma \in C^\infty(M), \sigma > 0.$$

Insbesondere ist  $f$  damit ein lokaler Diffeomorphismus.

#### Beispiel 3.7. Isometrien und konforme Abbildungen

- **Holomorphe Funktionen**

Sei  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und  $g = \langle, \rangle_{\mathbb{R}^2}$ .

*Behauptung:*  $f$  ist lokal konform auf  $\tilde{U} = \{z \in U \mid f'(z) \neq 0\}$  mit  $\sigma^2 = \det(Df)$ .

Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

- **Möbiustransformation**

Wir betrachten die 1-Punkt-Kompaktifizierung von  $\mathbb{C}$ :  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Sei weiterhin

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2; \mathbb{C}),$$

so definieren wir die Möbiustransformation

$$\begin{aligned} F_A : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \\ \infty &\longmapsto \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Mit

$$H^+ := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

und der Metrik

$$g_{H^+} = \frac{1}{y^2} (dx^2 + dy^2)$$

bezeichnen wir die Poincaré-Halbebene  $(H^+, g_{H^+})$ .

*Behauptung:* Sei  $A \in SL(2; \mathbb{R})$ , so ist

$$F_A : (H^+, g_{H^+}) \longrightarrow (H^+, g_{H^+})$$

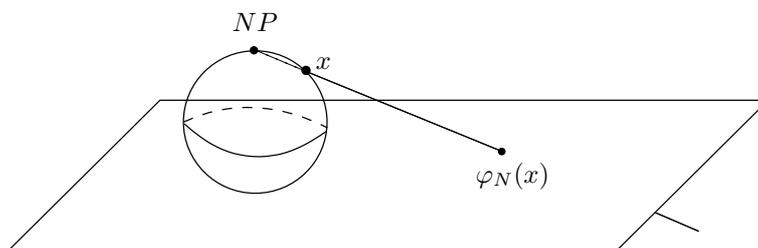
eine Isometrie.

Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

### • Stereographische Projektion

Wir betrachten die Kartenabbildung<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \varphi_N : S^n - \{NP\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \text{Schnittpunkt des Graphen durch NP} \\ &\quad \text{und } x \text{ mit } \mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}. \end{aligned}$$



*Behauptung:*  $\varphi_N$  ist ein konformer Diffeomorphismus mit

$$\varphi_N^* g_{\mathbb{R}^n} = \left( \frac{1 + \|\varphi_N(\cdot)\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2} \right)^2 \cdot \underbrace{g_{S^n}}_{\text{induz. riem. Metrik}}.$$

Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. Man berechne

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_1} (x_1, \dots, x_n)$$

und

$$\varphi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1).$$

<sup>2</sup>siehe auch Bsp. 1 auf Seite 20 von Kapitel 1

**Definition.** Ein Diffeomorphismus  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  zwischen zwei semi-Riem. Mannigfaltigkeiten heißt

- längentreu :  $\iff l_g(\gamma) = l_{\tilde{g}}(f(\gamma))$  für alle Kurven  $\gamma : I \rightarrow M$ ,
- volumentreu :  $\iff \text{Vol}_g(A) = \text{Vol}_{\tilde{g}}(f(A))$  für alle messbaren  $A \subset M$ ,
- orthogonalitätserhaltend :  $\iff \forall v, w \in T_x M$  mit  $v \perp w$  gilt  $df_x(v) \perp df_x(w)$ .

Seien  $g$  und  $\tilde{g}$  Riemannsch, so heißt  $f$

- winkeltreu :  $\iff \angle_x(\gamma, \delta) = \angle_{f(x)}(f(\gamma), f(\delta))$ .

Seien  $g$  und  $\tilde{g}$  pseudo-Riemannsch, so heißt  $f$

- typerhaltend :  $\iff \forall x \in T_x M$  zeitartig (raumartig) ist  $df_x(v)$  zeitartig (raumartig).

**Satz 3.8.** Sei  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  ein typerhaltender Diffeomorphismus zwischen semi-Riem. Mannigfaltigkeiten. Dann gilt

1.  $f$  ist eine Isometrie  $\iff f$  ist längentreu,
2.  $f$  ist konform  $\iff f$  ist orthogonalitätserhaltend,
3.  $f$  ist längentreu  $\iff f$  ist konform und volumenerhaltend.
4. Sind  $g$  und  $\tilde{g}$  Riemannsch, so gilt:  $f$  ist konform  $\iff f$  ist winkeltreu.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. ( $\implies$ ):

$$\begin{aligned}
 l_{\tilde{g}}(f(\gamma)) &= \int_a^b \|(f(\gamma))'(t)\|_{\tilde{g}} dt \\
 &= \int_a^b \|df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))\|_{\tilde{g}} dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{|\tilde{g}_{f(\gamma(t))}(df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)), df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)))|} dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{(f^*\tilde{g})_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\
 &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt \\
 &= l_g(\gamma).
 \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ): Sei  $f$  längentreu. Da  $g$  und  $f^*g$  symmetrische Bilinearformen sind, genügt es zu zeigen, dass

$$(f^*g)_x(v, v) = g_x(v, v) \quad \forall v \in T_x M$$

da

$$g_x(v, w) = \frac{1}{2}(g_x(v, v) + g_x(w, w) - g(v - w, v - w)).$$

Sei also  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = x$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Wir setzen

$$L(t) := l_g(\gamma|_{[-\varepsilon, t]}) = \int_{-\varepsilon}^t \|\dot{\gamma}(s)\|_g ds$$

und

$$\tilde{L}(t) := l_g(f(\gamma)|_{[-\varepsilon, t]}) = \int_{-\varepsilon}^t \|(f \circ \gamma)'(s)\|_g ds.$$

Nach Voraussetzung ist  $L(t) = \tilde{L}(t)$ . Differenziert man nun nach  $t$ , so folgt

$$\|\dot{\gamma}(t)\|_g = \|(f \circ \gamma)'(t)\|_g,$$

bzw. für  $t = 0$

$$|g_x(v, v)| = |(f^*g)_x(v, v)|.$$

Da  $f$  typerhaltend ist, folgt daraus die Behauptung.

2. ( $\Rightarrow$ ): Seien  $v, w \in T_x M$  mit  $v \perp w$ . Dann gilt

$$g_{f(x)}(df_x(v), df_x(w)) = (f^*g)_x(v, w) = \sigma^2 g_x(v, w) = 0.$$

( $\Leftarrow$ ): Sei  $f$  orthogonalitätserhaltend. Wir fixieren eine ONB  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $T_x M$ . Dann ist

$$\epsilon_i = g_x(e_i, e_i) = \begin{cases} -1 & \text{für } i = 1, \dots, p \\ 1 & \text{für } i = p + 1, \dots, n \end{cases}$$

und wir setzen

$$\begin{aligned} (f^* \tilde{g})_x(e_i, e_j) &= g_{f(x)}(df_x(e_i), df_x(e_j)) & (*) \\ &= \delta_{ij} \epsilon_i \sigma_i^2(x) \text{ mit } \sigma > 0. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$\sigma_1(x) = \dots = \sigma_n(x) =: \sigma(x).$$

Es gilt nämlich

$$g_x(e_i - e_j, \epsilon_j e_i + \epsilon_i e_j) = \epsilon_j \epsilon_i - \epsilon_i \epsilon_j = 0.$$

Demzufolge ist nach Voraussetzung auch

$$df_x(e_i - e_j) \perp df_x(\epsilon_j e_i + \epsilon_i e_j)$$

und damit

$$\begin{aligned}
0 &= (f^*\tilde{g})_x(e_i - e_j, \epsilon_j e_i + \epsilon_i e_j) \\
&= \tilde{g}_{f(x)}(df_x(e_i) - df_x(e_j), \epsilon_j df_x(e_i) + \epsilon_i df_x(e_j)) \\
&= \epsilon_j \epsilon_i \sigma_i^2(x) - \epsilon_i \epsilon_j \sigma_j^2(x) \\
&= \sigma_i^2(x) - \sigma_j^2(x).
\end{aligned}$$

Durch lineare Fortsetzung von (\*) folgt nun die Behauptung.

3.  $f$  längentreu  $\iff f$  ist konform und volumentreu.

a) Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine Karte von  $M$  mit der durch  $\varphi$  definierten Orientierung  $O_M$  und damit  $(\tilde{U} = f(U), \tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1} = (y_1, \dots, y_n))$  eine Karte auf  $\tilde{M}$  mit der durch  $\tilde{\varphi}$  definierten Orientierung. Dann ist  $f : U \rightarrow \tilde{U}$  ein *orientierungserhaltender* Diffeomorphismus. Nach Definition überführt  $df_x$  die kanonischen Basen ineinander, denn

$$\begin{aligned}
df_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right) &= df_x\left(d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}(e_i)\right) &= d(f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(e_i) \\
& & \stackrel{y=f(x)}{=} d(\varphi \circ f^{-1})_{\tilde{\varphi}(y)}^{-1}(e_i) \\
& &= \frac{\partial}{\partial y_i}(y).
\end{aligned}$$

Für die kanonischen  $n$ -Formen folgt dann

$$\begin{aligned}
1 &= dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \left( \frac{\partial}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(y) \right) \\
&= f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) \left( \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right).
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$f^*(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (3.1)$$

*Behauptung:*  $f$  ist volumentreu  $\iff \forall (U, \varphi) \quad f^*d\tilde{U} = dU$ .

Sei hier

$$\sqrt{\tilde{g}}(x) := \sqrt{\left| \det \left( \tilde{g}_x \left( \frac{\partial}{\partial y_i}(x), \frac{\partial}{\partial y_j}(x) \right) \right)_{ij} \right|}.$$

Sei  $A$  messbar und liege o.B.d.A. in einer Karte  $U$ . Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_A f^* d\tilde{U} &= \int_A f^* \left( \sqrt{\tilde{g}} \right) f^* (dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) \\
 &\stackrel{(3.1)}{=} \int_A \left( \sqrt{\tilde{g}} \circ f \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \int_{\varphi(A)} \left( \sqrt{\tilde{g}} \circ f \circ \varphi^{-1} \right) d\lambda^n \\
 &= \int_{\tilde{\varphi}(f(A))} \left( \sqrt{\tilde{g}} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \right) d\lambda^n \\
 &= \int_{f(A)} \sqrt{\tilde{g}} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\
 &= \int_{f(A)} d\tilde{U} = Vol_{\tilde{g}}(f(A)). \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

i. ( $\Leftarrow$ ):

$$\begin{aligned}
 Vol_g(A) &= \int_A dU \\
 &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \int_A f^* d\tilde{U} \\
 &\stackrel{(3.2)}{=} \int_{f(A)} d\tilde{U} = Vol_{\tilde{g}}(f(A)).
 \end{aligned}$$

ii. ( $\Rightarrow$ ): Für die  $n$ -Formen  $f^* d\tilde{U}$  und  $dU$  existiert ein  $\lambda \in C^\infty(M)$  mit

$$f^* d\tilde{U} = \lambda dU.$$

Für alle  $x \in M$  gilt nun aber nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\begin{aligned}
 \lambda(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{K_\varepsilon(x)} \lambda dU}{\int_{K_\varepsilon(x)} dU} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{K_\varepsilon(x)} f^* d\tilde{U}}{\int_{K_\varepsilon(x)} dU} \\
 &\stackrel{(3.2)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{K_\varepsilon(x)} d\tilde{U}}{\int_{K_\varepsilon(x)} dU} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Vol_{\tilde{g}}(f(K_\varepsilon(x)))}{Vol_g(K_\varepsilon(x))} \\
 &\stackrel{\text{Vor.}}{=} 1.
 \end{aligned}$$

b) Zum Beweis von 3. :

i. ( $\Rightarrow$ ) : Ist  $f$  längentreu, so gilt  $f^*\tilde{g} = g$  und somit ist  $f$  konform. Wählt man nun alle Karten wie in (a), so gilt mit  $y = f(x)$  auch

$$\begin{aligned}\sqrt{\tilde{g}}(f(x)) &= \sqrt{\det \left\{ \tilde{g}_{f(x)} \left( \frac{\partial}{\partial y_i}(y), \frac{\partial}{\partial y_j}(y) \right) \right\}_{ij}} \\ &= \sqrt{\det \left\{ \tilde{g}_{f(x)} \left( df_x \left( \frac{\partial}{\partial x_i}(x) \right), df_x \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(x) \right) \right) \right\}_{ij}} \\ &= \sqrt{\det \{ f^*\tilde{g} \}_{ij}} = \sqrt{\det \{ g \}_{ij}} \\ &= \sqrt{g}(x).\end{aligned}$$

Ist  $A$  messbar und liegt o.B.d.A. in einer Kartenumgebung  $U$ , so folgt

$$\begin{aligned}\int_{f(A)} d\tilde{U} &= \int_{f(A)} \sqrt{\tilde{g}} dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \int_{\tilde{\varphi}(f(A))} \sqrt{\tilde{g}} \circ \tilde{\varphi}^{-1} d\lambda^n \\ &= \int_{\varphi(A)} \left( \sqrt{\tilde{g}} \circ f \right) \circ \varphi^{-1} d\lambda^n \\ &= \int_A dU.\end{aligned}$$

Also ist  $f$  auch volumenerhaltend.

ii. ( $\Leftarrow$ ) : Sei  $f^*\tilde{g} = \sigma^2 \cdot g$  mit  $\sigma > 0$ . Sei weiterhin  $(e_1, \dots, e_n)$  eine positiv-orientierte ONB in  $T_xU$  bzgl.  $g_x$ . Dann ist

$$\left( \frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_1), \dots, \frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_n) \right)$$

eine positiv-orientierte ONB in  $T_{f(x)}\tilde{U}$  bzgl.  $\tilde{g}_{f(x)}$  und es folgt

$$\begin{aligned}\left( f^*d\tilde{U} \right)_x(e_1, \dots, e_n) &= d\tilde{U}_{f(x)}(df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)) \\ &= \sigma^n(x) \cdot d\tilde{U}_{f(x)} \left( \frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_1), \dots, \frac{1}{\sigma(x)} df_x(e_n) \right) \\ &= \sigma^n \cdot 1 \\ &= \sigma^n \cdot dU_x(e_1, \dots, e_n).\end{aligned}$$

Damit ist also

$$f^*d\tilde{U} = \sigma^n \cdot dU.$$

Nach (a) gilt jedoch  $f^*d\tilde{U} = dU$  für alle Karten  $(U, \varphi)$  und damit  $\sigma \equiv 1$ .

4. Analog zu 2. □

**Information: Satz von Nash.**<sup>3</sup> Sei  $(M^n, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  isometrisch zu einer UMF  $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^N$  mit induzierter Metrik.

**Definition.** Sei  $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$  ein  $(r, 0)$ -Tensorfeld und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld und  $\Phi_t : M \rightarrow M$  die durch den Fluss von  $X$  definierten lokalen Diffeomorphismen, dann heißt das  $(r, 0)$ -Tensorfeld

$$(L_X B)_x := \frac{d}{dt} (\Phi_t^* B)_x |_{t=0} \in T_x^{(r,0)} M$$

die Lie-Ableitung von  $B$  nach  $X$ .

Für  $B = g$  gibt es 2 wesentliche Fälle:

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}(M)$  heißt

- Killing-Vektorfeld :  $\iff L_X g = 0$
- konformes Vektorfeld :  $\iff L_X g = \lambda \cdot g$  für ein  $\lambda \in C^\infty(M)$ .

**Satz 3.9.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit und  $X \in \mathfrak{X}(M)$  mit Fluss  $\{\Phi_t\}$ , dann gilt

1.  $X$  ist ein Killingfeld.  $\iff \Phi_t : U_t \subset M \rightarrow \Phi_t(U_t) \subset M$  sind Isometrien.
2.  $X$  ist ein konformes Vektorfeld  $\iff \Phi_t : U_t \subset M \rightarrow \Phi_t(U_t) \subset M$  sind konforme Abbildungen.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1.  $(\Leftarrow)$  : Sei  $x \in M$ . Für alle  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  ist  $x \in U_t$ . Nach Voraussetzung ist dann

$$(\Phi_t^* g)_x = g_x \quad \forall |t| < \varepsilon$$

und damit

$$(L_X g)_x = \frac{d}{dt} (\Phi_t^* g)_x |_{t=0} = 0.$$

- $(\Rightarrow)$  : Sei  $x \in U_t$ . Zu zeigen ist  $(\Phi_t^* g)_x = g_x$ . Dazu nutzen wir die Eigenschaft

$$\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$$

und betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} (\Phi_t^*)_x : T_{\Phi_t(x)}^{(2,0)} M &\longrightarrow T_x^{(2,0)} M & (*) \\ B_{\Phi_t(x)} &\longmapsto (\Phi_t^* B)_x \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup>Ann. of Math 1956, 63, S.20-63

Nach Voraussetzung ist

$$0 = (L_X g)_{\Phi_t(x)} = \frac{d}{ds} \left( (\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)} \right) \Big|_{s=0}.$$

Wenden wir darauf (\*) an, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{d}{ds} \underbrace{\left( (\Phi_t^*)_x \circ (\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)} \right)}_{(\Phi_{t+s}^* g)_x} \Big|_{s=0} \\ &\stackrel{t+s=\tau}{=} \frac{d}{d\tau} (\Phi_\tau^* g)_x \Big|_{\tau=t} \end{aligned}$$

d.h.  $(\Phi_\tau^* g)_x$  ist konstant auf  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  und damit folgt

$$(\Phi_\tau^* g)_x = g_x.$$

2. ( $\Leftarrow$ ): Es ist  $(\Phi_t^* g)_x = \sigma_t^2(x) g_x$  für alle  $t$  für die  $\Phi_t$  definiert ist. Damit folgt

$$(L_X g)_x = \frac{d}{dt} (\Phi_t^* g)_x \Big|_{t=0} = \underbrace{\frac{d}{dt} (\sigma_t^2(x)) \Big|_{t=0}}_{\lambda(x)} \cdot g_x.$$

( $\Rightarrow$ ): Sei  $x$  im Definitionsbereich von  $\Phi_t$  und gelte

$$(L_X g)_{\Phi_t(x)} = \frac{d}{ds} (\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)} \Big|_{s=0} = \lambda(\Phi_t(x)) \cdot g_{\Phi_t(x)}.$$

Wir benutzen wieder die Abbildung von (\*):

$$\frac{d}{ds} \underbrace{\left( (\Phi_t^*)_x \circ (\Phi_s^* g)_{\Phi_t(x)} \right)}_{(\Phi_{t+s}^* g)_x} \Big|_{s=0} = \lambda(\Phi_t(x)) \cdot (\Phi_t^*)_x g_{\Phi_t(x)}.$$

Damit ist

$$\frac{d}{dt} ((\Phi_t^* g)_x) = \lambda(\Phi_t(x)) \cdot \underbrace{(\Phi_t^* g)_x}_{h(t)}.$$

Aus der DGL  $h'(t) = \lambda(t) h(t)$  folgt dann

$$(\Phi_t^* g)_x = \underbrace{e^{\int_0^t \lambda(\Phi_s(x)) ds}}_{:= \sigma_t^2(x)} \cdot \underbrace{(\Phi_0^* g)_x}_{g_x}$$

und somit ist  $\Phi_t$  konform. □

**Satz 3.10. Eigenschaften der Lie-Ableitung von Tensorfeldern.** Sind  $B_i, B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$  Tensorfelder,  $f \in C^\infty(M)$  und  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , so gilt

1.  $L_X(f \cdot B) = X(f) \cdot B + f \cdot L_X B$
2.  $L_X(B_1 \otimes B_2) = (L_X B_1) \otimes B_2 + B_1 \otimes (L_X B_2)$
3.  $(L_X B)(X_1, \dots, X_r) = X(B(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r B(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r)$
4.  $[L_X, L_Y] := L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}$ .

Den Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe.

**Folgerung.** Sind  $X, Y$  Killing-VF (konforme VF), so ist  $[X, Y]$  auch ein Killing-VF (konformes VF).

*Beweis.* Es sei  $L_X g = \lambda \cdot g$  und  $L_Y g = \mu \cdot g$ . Aus Satz 3.10 folgt dann

$$\begin{aligned}
 L_{[X, Y]} g &\stackrel{4.)}{=} [L_X, L_Y] g \\
 &= L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g) \\
 &= L_X(\mu \cdot g) - L_Y(\lambda \cdot g) \\
 &\stackrel{1.)}{=} X(\mu) \cdot g + \mu \cdot L_X g - Y(\lambda) \cdot g + \lambda \cdot L_Y g \\
 &= (X(\mu) + \mu \cdot \lambda - Y(\lambda) - \lambda \cdot \mu) \cdot g \\
 &= \underbrace{(X(\mu) - Y(\lambda))}_{\in C^\infty M} \cdot g.
 \end{aligned}$$

□

### Bemerkungen:

- $\mathfrak{Kil}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X \text{ ist Killing-Vektorfeld}\}$  ist eine Lie-Algebra.  
 $\text{Isom}(M, g) = \{f \in \text{Diff}(M) \mid f \text{ ist Isometrie}\}$  ist eine Liesche Gruppe mit Lie-Algebra

$$\mathfrak{Kil}_c(M, g) = \{X \in \mathfrak{Kil}(M, g) \mid X \text{ ist vollständig}\}.$$

- $\text{conf}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X \text{ ist ein konformes VF}\}$  ist eine Lie-Algebra  
 $\text{Conf}(M, g) = \{f \in \text{Diff}(M) \mid f \text{ ist konform}\}$  ist eine Liesche Gruppe mit Lie-Algebra

$$\text{conf}_c(M, g) = \{X \in \text{conf}(M, g) \mid X \text{ ist vollständig}\}.$$

Und es gilt

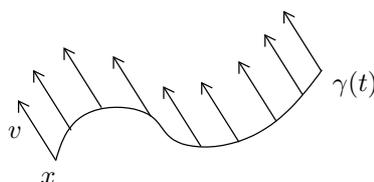
$$\dim \mathfrak{Kil}_c(M^n, g) \leq \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\dim \text{conf}_c(M^n, g) \leq \frac{1}{2} (n+1)(n+2).$$

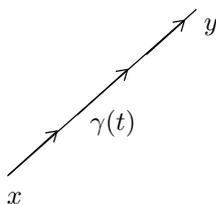
### 3.4 Kovariante Ableitungen und Levi-Civita-Zusammenhang

Im Euklidischen Raum weiß man, wie man Vektoren entlang von Kurven parallel verschieben kann. Wir wollen dies jetzt auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Dazu benötigt man ein Konzept, mit dem man erklären kann, was die Parallelverschiebung von Tangentialvektoren sein soll.

Betrachten wir dazu zunächst die Parallelverschiebung im  $\mathbb{R}^n$  nochmals genauer:



- $v(Z) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  Parallelverschiebung von  $v \in T_x\mathbb{R}^n$  entlang  $\gamma \iff v(t) \equiv v = \text{const.} \iff v'(t) = 0$



- $\gamma(t)$  kürzeste Kurve zwischen  $x$  und  $y$  im  $\mathbb{R}^n \iff \gamma'(t)$  parallel verschoben entlang  $\gamma(t)$ .

Wir müssen allgemein erklären, was die Ableitung von VF entlang Kurven ist. Dazu verallgemeinern wir zunächst die Richtungsableitung im  $\mathbb{R}^n$  und betrachten dazu die Menge der Vektorfelder  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \Gamma(T\mathbb{R}^n)$  mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n), \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y := X(Y) \end{aligned}$$

Richtungsableitung von  $Y : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$   
nach VF  $X$ .

Diese Abbildung ist

- additiv in  $Y$ ,

- erfüllt die Produktregel in  $Y$ , d.h.  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \cdot (\nabla_X Y)$ ,
- und sie ist tensoriell in  $X$ , d.h.  $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \cdot \nabla_{X_1} Y + g \cdot \nabla_{X_2} Y$  für alle  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  und  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Des Weiteren hat sie die Eigenschaften:

- $X(\langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}) = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}$
- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ .

**Definition.** Sei  $M^n$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Zuordnung

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

heißt kovariante Ableitung (=affiner Zusammenhang) von  $Y$  nach  $X$  (auf  $M$ ), falls

1.  $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$  (additiv in  $Y$ )
2.  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$  (Produktregel)
3.  $\nabla_X Y$  tensoriell in  $X$ , d.h.  $\nabla_{f \cdot X_1 + g \cdot X_2} Y = f \cdot \nabla_{X_1} Y + g \cdot \nabla_{X_2} Y$  für alle  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f, g \in C^\infty(M)$ .

**Beispiel 3.11. Kovariante Ableitungen**

1. Für  $\mathbb{R}^n = M^n$  ist wie oben gesehen  $\nabla_X Y = X(Y)$  eine kovariante Ableitung.
2. Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  eine UMF, dann ist  $(\nabla_X Y)(x) := \underbrace{\text{proj}_{T_x M} X(Y)(x)}_{\in \mathbb{R}^N}$  eine kov. Ableitung auf  $M$ . (Dabei ist  $\text{proj}_V$  die orthogonale Projektion des  $\mathbb{R}^N$  auf einen Untervektorraum  $V$ .)
3. Sei  $\nabla$  eine kov. Ableitung und  $B \in \mathfrak{X}^{(2,1)}(M)$ , dann ist  $\tilde{\nabla} = \nabla + B$  mit

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$$

ebenfalls eine kov. Ableitung.

Da eine glatte Mannigfaltigkeit  $M^n$  diffeomorph ist zu einer UMF  $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^N$ , existieren also immer  $\infty$  viele kov. Ableitungen.

**Lemma 3.12.** Sei  $\nabla$  eine kov. Ableitung,  $U \subset M$  offen und  $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $Y_1|_U \equiv Y_2|_U$ , so ist

$$\nabla_X Y_1 = \nabla_X Y_2$$

auf  $U$ .

*Beweis.* Sei  $x \in U$  fix und  $f \in C^\infty(M)$  mit  $f(x) = 1$  und  $\text{supp } f \subset U$ . Dann ist  $f \cdot (Y_1 - Y_2) \equiv 0$  auf  $M$  und mit der Produktregel folgt

$$0 = \nabla_X f \cdot (Y_1 - Y_2) = X(f)(Y_1 - Y_2) + f \cdot (\nabla_X Y_1 - \nabla_X Y_2)$$

Im Punkt  $x$  gilt nun aber  $f(x) = 1$  und  $Y_1(x) = Y_2(x)$ , sodass

$$0 = (\nabla_X Y_1)(x) - (\nabla_X Y_2)(x).$$

Daraus folgt aber die Behauptung. □

**Folgerungen:**

1.  $(\nabla_X Y)$  ist eindeutig durch  $X(x)$  und  $Y|_U$  bestimmt, und zwar für eine beliebig kleine offene Umgebung  $U(x) \subset M$ . Wir setzen damit

$$(\nabla_X Y)(x) := \nabla_{X(x)} Y.$$

2. Man kann die kov. Ableitung  $\nabla^M$  auf  $M$  zu einer kov. Ableitung auf offenen Teilmengen  $U \subset M$  einschränken:

$$\begin{aligned} \nabla^U : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) &\longrightarrow \mathfrak{X}(U) \\ (X, Y) &\longmapsto (\nabla_X^U Y)(x) := \left( \nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y} \right)(x) \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $\tilde{X}|_U = X$  und  $\tilde{Y}|_U = Y$ .

Wir bezeichnen im Folgenden  $\nabla^U$  und  $\nabla^M$  mit dem gleichen Symbol  $\nabla$ .

**Definition.** Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte auf  $M$ , dann heißen die Funktionen  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ , für die

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

lokale Koeffizienten von  $\nabla$  bzgl.  $(U, \varphi)$ .

Wegen der Eigenschaften 1.) - 3.) ist  $\nabla$  eindeutig bestimmt, wenn man die  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  für einen Atlas  $A_M$  kennt. Sei nämlich  $X = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i}$  und  $Y = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial x_j}$  für eine Karte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$ , so folgt dann

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \Gamma_{ij}^k + \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta^k) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

**Beispiel 3.13. Kovariante Ableitung im  $\mathbb{R}^n$** 

Sei  $M = \mathbb{R}^n$  und  $\nabla_X Y = X(Y)$ . Für die Karte  $(\mathbb{R}^n, \varphi = \text{id})$  mit  $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$  folgt

$$\nabla_{e_i} e_j = e_i(e_j) \equiv 0,$$

da  $e_j$  ein konstantes VF ist. Es gilt also  $\Gamma_{ij}^k = 0$ .

**Definition.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Kurve. Ein VF entlang  $\gamma$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} X : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto X(t) \in T_{\gamma(t)}M \end{aligned}$$

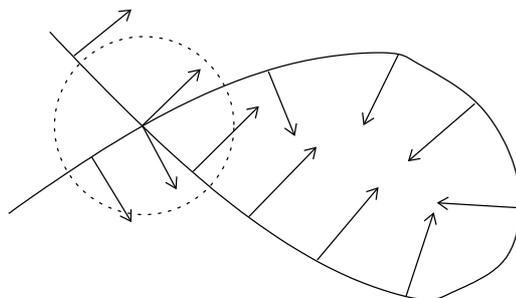
die 'glatt' ist, d.h. für jede Karte  $(U, \varphi)$  sind die Koeffizienten  $\xi^i(t)$  in der Basisdarstellung

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) \quad \forall t \text{ mit } \gamma(t) \in U$$

glatte Funktionen in  $t$ . Wir setzen

$$\mathfrak{X}_\gamma(M) := \text{Menge der Vektorfelder entlang } \gamma$$

**Bemerkung.**  $X(t)$  ist i.A. nicht zu einem VF auf  $M$  fortsetzbar.



*Behauptung:* Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  regulär und  $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ , dann existiert für alle  $t_0 \in I$  ein  $\varepsilon_{t_0} > 0$  und Vektorfeld  $\tilde{X}_{t_0} \in \mathfrak{X}(M)$  so dass

$$\tilde{X}_{t_0}(\gamma(t)) = X(t) \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I.$$

D.h. man kann  $X$  in diesem Fall lokal zu einem Vektorfeld auf  $M$  fortsetzen.

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $\gamma$  eine Immersion, und damit lokal eine Einbettung. Es existiert also eine Teilmenge  $\hat{I}_{t_0} \subset I$  so dass

$$\gamma : \hat{I}_{t_0} \simeq \gamma(\hat{I}_{t_0}) = K \subset M$$

ein Diffeomorphismus zur UMF  $K \subset M$  ist. Damit existiert auch eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  mit  $\varphi(K \cap U) = (x_1, 0, \dots, 0)$  und wir setzen

$$\tilde{X}(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) := \left( d\varphi_{(x_1, \dots, x_n)}^{-1} \circ d\varphi_{\varphi^{-1}(x_1, 0, \dots, 0)} \circ X \circ \varphi^{-1} \right) (x_1, 0, \dots, 0).$$

□

**Satz 3.14.** Sei  $(M, \nabla)$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung und  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Kurve in  $M$ . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Zuordnung

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} : \mathfrak{X}_\gamma(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}_\gamma(M) \\ X &\longmapsto \frac{\nabla X}{dt} \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\frac{\nabla}{dt}(X_1 + X_2) = \frac{\nabla X_1}{dt} + \frac{\nabla X_2}{dt}$
2.  $\frac{\nabla}{dt}(f \cdot X) = f'X + f \cdot \frac{\nabla X}{dt}$  für alle  $f \in C^\infty(I)$ .
3. Ist  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $\tilde{X}(\gamma(t)) = X(t) \quad \forall t \in \tilde{I} \subset I$  dann ist

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \tilde{X} \quad \forall t \in \tilde{I}.$$

$\frac{\nabla X}{dt} \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  heißt kovariante Ableitung von  $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  entlang  $\gamma$ .

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. *Eindeutigkeit:* Angenommen  $\frac{\nabla}{dt}$  und 1.) - 3.) sind gegeben. Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  zulässige Karte mit  $U \cap \gamma(I) \neq \emptyset$ , und  $\tilde{I} \subset I$  ein Teilintervall mit  $\gamma(\tilde{I}) \subset U$ , dann ist

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))}_{=: X_i(t)} \quad t \in \tilde{I}$$

Aus 1.) und 2.) folgt nun

$$\frac{\nabla X}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \xi_i' \cdot X_i + \xi_i \frac{\nabla X_i}{dt} \right).$$

und mit 3.) folgt weiter

$$\frac{\nabla X_i}{dt}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \forall t \in \tilde{I}$$

Setzen wir nun  $\varphi \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  auf  $\tilde{I}$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \sum_{j=1}^n \gamma_j'(t) \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma(t)) \\ \Rightarrow \frac{\nabla X_i}{dt}(t) &= \sum_{j,k=1}^n \gamma_j'(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)) \quad t \in \tilde{I} \\ \Rightarrow \frac{\nabla X}{dt}(t) &= \sum_{k=1}^n \left( \xi_k'(t) + \sum_{i,j} \xi_i(t) \gamma_j'(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)) \quad \forall t \in \tilde{I} \quad (*) \end{aligned}$$

und damit ist  $\frac{\nabla X}{dt}$  ist eindeutig durch die lokalen Koeffizienten  $\{\Gamma_{ji}^k\}$  von  $\nabla$  bestimmt.

2. *Existenz:* Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine Karte. Wir definieren  $\frac{\nabla X}{dt}(t)$  auf  $I \cap \gamma^{-1}(U)$  durch (\*)

$$\frac{\nabla X}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \left( \xi'_k(t) + \sum_{i,j} \gamma'_i(t) \xi_j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)).$$

Direktes Nachrechnen zeigt, dass  $\frac{\nabla X}{dt}(t)$  die Eigenschaften 1.) - 3.) erfüllt. (\*) ist damit auch die Lokale Darstellung von  $\frac{\nabla X}{dt}(t)$ .

□

**Beispiel 3.15. Kovariante Ableitung entlang Kurven im  $\mathbb{R}^n$  und in Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$**

1. Sei  $M = \mathbb{R}^n$  und  $\nabla_X Y = X(Y)$ . Für  $X \in \mathfrak{X}_\gamma(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) e_i$$

und damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\nabla X}{dt}(t) &= \sum_{k=1}^n \xi'_k(t) e_k \quad (\text{da } \Gamma_{ij}^k \equiv 0) \\ &= X'(t). \end{aligned}$$

2. Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine UMF mit kanonischer kovarianter Ableitung  $\nabla_X Y = \text{proj}_{TM} X(Y)$  und  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve. Dann gilt:

$$\frac{\nabla Z}{dt} = \text{proj}_{TM} Z'.$$

*Beweis.* Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  Karte mit  $\gamma(t) \in U$ , dann ist in einer Umgebung von  $\gamma(t)$

$$Z(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla Z}{dt}(t) &= \sum_i \xi'_i(t) \frac{\partial}{\partial x}(\gamma(t)) + \xi_i(t) \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \xi'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \xi_i(t) \text{proj}_{T_{\gamma(t)}M} \left( \dot{\gamma}(t) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \\
&= \text{proj}_{T_{\gamma(t)}M} \left( \sum_i \xi'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) + \xi_i(t) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma(t) \right) \right) \\
&= \text{proj}_{T_{\gamma(t)}M} \left( \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_i \xi_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t)) \right)}_{Z(t)} \right) \\
&= \text{proj}_{T_{\gamma(t)}M} Z'(t).
\end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $(M, \nabla)$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung und  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine glatte Kurve. Ein VF  $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  heißt parallel verschoben entlang  $\gamma$ , falls

$$\frac{\nabla X}{dt} \equiv 0.$$

**Bemerkung.** In lokalen Koordinaten ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\left( \xi'_k + \sum_{i,j} \gamma'_i \xi_j \left( \Gamma_{ij}^k \circ \gamma \right) \right) \equiv 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n.$$

**Beispiel 3.16. Parallelverschiebung in Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$**  (im  $\mathbb{R}^n$ )

Sei  $M \subset \mathbb{R}^N$  eine UMF ( $M = \mathbb{R}^n$ ) mit kanonischer kovarianter Ableitung  $\nabla_X Y = \text{proj}_{T_M} X(Y)$  (bzw.  $X(Y)$ , denn im  $\mathbb{R}^n$  ist  $\text{proj}_{T_M} = \text{id}$ ) und  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve.  $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  ist genau dann parallel verschoben, falls

$$\frac{\nabla Z}{dt} = \text{proj}_{T_M} Z' = 0 \iff Z'(t) \in N_{\gamma(t)} M^n \quad \forall t \in I,$$

(bzw. falls  $\frac{\nabla Z}{dt} = Z'(t) = 0 \iff Z(t) = \text{const.}$ )

**Satz 3.17.** Sei  $(M, \nabla)$  eine glatte Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung und  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine glatte Kurve, dann gilt

1. Ist  $v \in T_{\gamma(a)}M$ , so existiert genau ein entlang  $\gamma$  parallel-verschobenes VF  $X_v \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $X_v(a) = v$ .

## 2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma^\nabla : T_{\gamma(a)}M &\longrightarrow T_{\gamma(b)}M \\ v &\longmapsto X_v(b) \end{aligned}$$

heißt Parallelverschiebung entlang  $\gamma$ , ist ein linearer Isomorphismus der Tangentialräume und unabhängig von der Parametrisierung von  $\gamma$ .

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Die DGL  $\frac{\nabla X}{dt} \equiv 0$  hat in lokalen Koordinaten die Form

$$\xi'(t) = B(t) \cdot \xi(t),$$

wobei  $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))^T$  und  $B(t) \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ . Sei  $\xi(a)$  vorgegeben, dann existiert (lokal) genau eine Lösung des AWP auf dem ganzen Definitionsbereich von  $B$ .<sup>4</sup> Überdeckt man durch Karten  $\gamma([a, b])$ , so erhält man sukzessive die Lösung des AWP auf den Teilintervallen. Und damit folgt die Behauptung.

2.  $\mathcal{P}_\gamma^\nabla$  ist

- *linear*, da DGL linear:

$$X_{\alpha v + \beta w}(t) = \alpha X_v(t) + \beta X_w(t)$$

erfüllt DGL und AWP

- *bijektiv*: Wir lassen  $\gamma$  rückwärts durchlaufen:

$$\gamma^-(t) = \gamma(b - t(b - a)) \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist  $X^-(t) := X(b - t(b - a))$  parallel verschoben entlang  $\gamma^-$  und es gilt

$$X^-(1) = X(a) \quad \text{und} \quad X^-(0) = X(b)$$

sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\gamma^\nabla \cdot \mathcal{P}_{\gamma^-}^\nabla &= \text{id}_{T_{\gamma(b)}M} \\ \mathcal{P}_{\gamma^-}^\nabla \circ \mathcal{P}_\gamma^\nabla &= \text{id}_{T_{\gamma(a)}M}. \end{aligned}$$

- Mit

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tau(s)) \quad \tau(s_0) = a, \quad \tau(s_1) = b$$

ist  $\tilde{X}(s) := X(\tau(s))$  Parallelverschiebung von  $v \in T_{\gamma(a)}M$  entlang  $\tilde{\gamma}$ .

□

<sup>4</sup>siehe Analysis 3: Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

**Beispiel 3.18. Parallelverschiebung auf der  $S^2$** 

Betrachten  $S^2$  mit kanonischer kov. Ableitung  $\nabla_X Y = \text{proj}_{TS^2} X(Y)$ . Wir betrachten die halben Großkreise. Für  $t \in [0, \pi]$  sei

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \cos(t) e_3 + \sin(t) e_1 \\ \gamma_2(t) &= \cos(t) e_3 + \sin(t) e_2\end{aligned}$$

Für die Parallelverschiebungen  $\mathcal{P}_{\gamma_i}^\nabla : T_{e_3} S^2 \rightarrow T_{-\gamma_i} S^2$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , folgt dann

$$\mathcal{P}_{\gamma_1}^\nabla(v) = -\mathcal{P}_{\gamma_2}^\nabla(v) \quad \text{mit } v \in T_\xi S^2$$

wobei  $T_\xi S^2 = \text{span}(e_1, e_2)$ . Denn es gilt

- $\gamma_1'(t) = -\sin(t) e_3 + \cos(t) e_1$  ist parallel entlang  $\gamma_1$  mit  $\gamma_1'(0) = e_1$ , da  $\gamma_1''(t) = -\gamma_1(t) \perp T_{\gamma_1(t)} S^2$
- $\gamma_2'(t) = -\sin(t) e_3 + \cos(t) e_2$  ist parallel entlang  $\gamma_2$  mit  $\gamma_2'(0) = e_2$ .
- $X_1(t) \equiv e_2$  ist  $\parallel$  VF entlang  $\gamma_1$  und  $X_1(0) = e_2$ , da  $X_1(t) \perp \gamma_1(t)$  und  $X_1'(t) \equiv 0$ .
- $X_2(t) \equiv e_1$  ist  $\parallel$  VF entlang  $\gamma_2$  mit  $X_2(0) = e_1$ .

Sei dann  $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 \in T_\xi S^2$ , so folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\gamma_1}^\nabla(v) &= v_1 \mathcal{P}_{\gamma_1}^\nabla(e_1) + v_2 \mathcal{P}_{\gamma_1}^\nabla(e_2) \\ &= -v_1 e_1 + v_2 e_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\gamma_2}^\nabla(v) &= v_1 \mathcal{P}_{\gamma_2}^\nabla(e_1) + v_2 \mathcal{P}_{\gamma_2}^\nabla(e_2) \\ &= v_1 e_1 - v_2 e_2\end{aligned}$$

Hierbei hängt die Parallelverschiebung also vom Weg ab!

**Bemerkung.** Der Begriff der kov. Ableitung und der  $\parallel$ -Verschiebung sind äquivalent: Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\gamma$  Integralkurve von  $X$  durch  $x$ , sodass

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

Dann ist

$$(\nabla_X Y)(x) = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\left( \mathcal{P}_{\gamma|_{[0,t]}}^\nabla \right)^{-1} (Y(\gamma(t)))}_{\in T_x M} \right) \Big|_{t=0}.$$

Sei  $(M^n, g)$  semi-Riemannsche MF, dann existieren verschiedene kov. Ableitungen. Wir wollen solche kov. Ableitung  $\nabla$  finden, für die die Parallelverschiebungen

$$\mathcal{P}_\gamma^\nabla : T_{\gamma(a)} M^n \rightarrow T_{\gamma(b)} M^n$$

(pseudo)-orthogonale Abbildungen sind, d.h. Längen und Winkel von Vektoren bleiben invariant.

**Satz 3.19. Fundamentallemma der Riemannschen Geometrie.** Sei  $(M^n, g)$  semi-Riemannsche MF. Dann existiert genau eine kov. Ableitung  $\nabla$  auf  $M^n$  mit

1.  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$  (metrisch)
2.  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  (torsionsfrei).

Diese kov. Ableitung  $\nabla$  heißt Levi-Civita-Zusammenhang von  $(M^n, g)$  und ist gegeben durch die Koszul-Formel:

$$(*) \quad 2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X).$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. *Existenz:* Die Formel  $(*)$  definiert eine metrische und torsionsfreie kov. Ableitung. ÜA.
2. *Eindeutigkeit:* Sei  $\nabla$  metrisch und torsionsfrei, dann gilt

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &\stackrel{\text{metr.}}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(X, Z)) &\stackrel{\text{metr.}}{=} g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z) \\ &\stackrel{\text{tor.}}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g([Y, X], Z) + g(X, \nabla_Y Z) \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\ &\stackrel{\text{tor.}}{=} g(\nabla_X Z, Y) + g([Z, X], Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

Daraus folgt dann aber die *Koszul-Formel*  $(*)$ . □

**Satz 3.20.** Sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang einer semi-Riemannschen MF  $(M^n, g)$  und seien  $\{\Gamma_{ij}^k\}$  die lokalen Koeffizienten von  $\nabla$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Dann gilt:  $\Gamma_{ij}^k$  ist symmetrisch in  $(i, j)$  und

$$(**) \quad \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{j\ell}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{i\ell}) - \frac{\partial}{\partial x_\ell} (g_{ij}) \right),$$

wobei  $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$  die lokalen Koeffizienten der Metrik sind und  $g^{k\ell}$  die inverse Matrix zu  $g_{ij}$ .

*Beweis.* Wir setzen  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$  in die *Koszul-Formel* (\*) ein und benutzen  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0$ . Dann ist

$$2g \left( \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_p}}_{\sum_{k=1}^n 2\Gamma_{ij}^k g_{kp}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{ip}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ip}) - \frac{\partial}{\partial x_p} (g_{ij}).$$

Multiplizieren wir dies mit  $g^{p\ell}$  und summieren über  $p$ , so folgt

$$2\Gamma_{ij}^\ell = \sum_p g^{\ell p} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{jp}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ip}) - \frac{\partial}{\partial x_p} (g_{ij}) \right).$$

□

**Definition.** Die  $\left\{ \Gamma_{ij}^k \right\}$  aus (\*\*) heißen Christoffel-Symbole von  $(M^n, g)$ .

**Satz 3.21.** Sei  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang der semi-Riemannschen MF  $(M^n, g)$ ,  $\gamma : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow M$  eine glatte Kurve und  $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  parallel verschobene VF entlang  $\gamma$ , dann gilt

$$g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t)) \equiv g_{\gamma(a)}(X(a), Y(a)) \quad \forall t \in [a, b].$$

Insbesondere ist  $\mathcal{P}_\gamma^\nabla : T_{\gamma(a)}M \rightarrow T_{\gamma(b)}M$  eine (pseudo)-orthogonale Abbildung, d.h. Längen und Winkel von Vektoren bleiben invariant.

*Beweis.*  $\nabla$  ist eine metrische kov. Ableitung, und mit der Definition von  $\frac{\nabla X}{dt}$  folgt

$$\frac{d}{dt} (g_{\gamma(t)}(X(t), Y(t))) = g_{\gamma(t)} \left( \frac{\nabla X}{dt}(t), Y(t) \right) + g_{\gamma(t)} \left( X(t), \frac{\nabla Y}{dt}(t) \right) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M).$$

Da nach Voraussetzung  $X$  und  $Y$  parallele Vektorfelder sind, verschwindet die rechte Seite der Gleichung. □

**Satz 3.22.** Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  eine UMF mit induzierter Riemannscher Metrik  $g$ . Der Levi-Civita-Zusammenhang von  $M^n$  ist dann gegeben durch

$$\nabla_X Y = \text{proj}_{TM} X(Y).$$

*Beweis.* Die Richtungsableitung im  $\mathbb{R}^n$  ist bekanntlich metrisch und torsionsfrei. Für  $Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$  mit  $X(Y) = \text{proj}_{TM} X(Y) + \text{proj}_{NM} X(Y)$  folgt dann aber aus  $TM \perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}} NM$

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= \langle \text{proj}_{TM} X(Y), Z \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle Y, \text{proj}_{TM} X(Z) \rangle \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\nabla_X Y - \nabla_Y X &= \text{proj}_{TM}(X(Y) - Y(X)) \\ &= \text{proj}_{TM}\left(\underbrace{[X, Y]}_{\text{tangential}}\right) \\ &= [X, Y].\end{aligned}$$

□

Eine kovariante Ableitung  $\nabla$  auf  $M$  kann man auch auf Tensorfelder fortsetzen.

**Definition.** Sei  $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$  ein  $(r,0)$ -Tensorfeld und  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Das Tensorfeld  $\nabla_X B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$  mit

$$(\nabla_X B)(X_1, \dots, X_r) := X(B(X_1, \dots, X_r)) - \sum_{i=1}^r B(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_r)$$

heißt kovariante Ableitung von  $B$  nach  $X$ .

Damit ergeben sich folgende Eigenschaften:

1.  $\nabla_X (B_1 + B_2) = \nabla_X B_1 + \nabla_X B_2$
2.  $\nabla_X (fB) = X(f)B + f \cdot \nabla_X B$
3.  $\nabla_X (B_1 \otimes B_2) = \nabla_X B_1 \otimes B_2 + B_1 \otimes \nabla_X B_2$ .

**Satz 3.23.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit, dann gilt:

1.  $\nabla$  ist ein metrische kovariante Ableitung auf  $M \iff \nabla_g = 0$
2. Ist  $\nabla$  torsionsfreie kov. Ableitung auf  $M$ , dann gilt

$$(L_X g)(Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$$

3. Ist  $\nabla^{LC}$  der Levi-Civita-Zusammenhang auf  $(M, g)$ , so folgt

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y^{LC} X, Z) + g(Y, \nabla_Z^{LC} X).$$

Insbesondere gilt:

$$X \text{ ist Killing-VF} \iff g(\nabla_Y^{LC} X, Z) + g(Y, \nabla_Z^{LC} X) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

und

$$X \text{ ist ein konformes VF} \iff \exists \lambda \in C^\infty(M) \quad g(\nabla_Y^{LC} X, Z) + g(Y, \nabla_Z^{LC} X) = \lambda \cdot g(Y, Z) \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

*Beweis.* Nachrechnen mit Definition von  $\nabla_g$  und ÜA über Lie-Ableitung. □

### 3.5 Krümmungen von Kurven im $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$

Ziel: Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^\infty$ -Kurve. Wir suchen  $n - 1$  Funktionen, die  $\gamma$  bis auf Euklidische Bewegung eindeutig bestimmen (Invarianten) und außerdem die „Krümmung“ beschreiben, d.h. Abweichungen von  $\gamma$  von Geraden, Ebenen,...

$$\gamma \rightsquigarrow k_1, \dots, k_{n-1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } k_1, \dots, k_{n-1} \text{ sind } C^\infty$$

**Definition.** Eine  $C^\infty$ -Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Frenet-Kurve (oder allgemein gekrümmt), wenn  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  linear unabhängig sind für alle  $t \in I$ . Insbesondere gilt dann:  $\gamma$  ist regulär und  $\text{Im}(\gamma)$  liegt nicht in einer  $(n - 2)$ -dimensionalen Ebene des  $\mathbb{R}^n$ .

Wir betrachten für  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein begleitendes Euklidisches Koordinatensystem

$$\gamma(t), \underbrace{e_1(t), \dots, e_n(t)}_{\substack{\text{positiv-orientierte} \\ \text{ONB des } \mathbb{R}^n}}$$

Dazu benutzen wir das Erhard-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren:

$$\begin{aligned} e_1(t) &:= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} && \underline{\text{Tangentialvektor}} \text{ von } \gamma \text{ in } t \in I \\ e_j(t) &:= \left( \gamma^{(j)}(t) - \sum_{l=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(t), e_l(t) \rangle e_l(t) \right) \cdot \left\| \gamma^{(j)}(t) - \sum_{l=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(t), e_l(t) \rangle e_l(t) \right\|^{-1} \\ e_n(t) &:= e_1(t) \times \dots \times e_{n-1}(t) \end{aligned}$$

[Dabei gilt  $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n \mapsto a_1 \times \dots \times a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  ist definiert durch  $\langle a_1 \times \dots \times a_{n-1}, b \rangle_{\mathbb{R}^n} = \det(a_1, \dots, a_{n-1}, b) \forall b \in \mathbb{R}^n$ ]

Damit gilt:

- $\text{span}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t)) = \text{span}(e_1(t), \dots, e_j(t))$
- $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t))$  und  $e_1(t), \dots, e_j(t)$  sind gleich orientiert:

$$e_k(t) = \sum_{l=1}^j M_{kl}(t) \gamma^{(l)}(t) \quad k = 1, \dots, j$$

$$M_{kl}(t) = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) > 0$$

Die letzte Implikation folgt, da alle Diagonaleinträge positiv sind (siehe oben).

- $e_1(t), \dots, e_n(t)$  ist eine positiv orientierte ONB des  $\mathbb{R}^n$

d)  $e_j : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist für jedes  $j = 1, \dots, n$  eine  $C^\infty$ -Funktion

Bezeichnung: Das begleitende Koordinatensystem  $(\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$  heißt Frenetsches KS der Frenet-Kurve  $\gamma$ . Es ist durch a)-c) eindeutig bestimmt.

Im weiteren beschäftigen wir uns mit den „Krümmungen“ von  $\gamma$ . Diese zeigen sich in der Veränderung des Frenetschen KS  $(\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$ . Dazu beschreiben wir  $e'_j(t)$  in der Basis  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$

$$e'_j(t) = \sum_{k=1}^n w_{jk}(t) e_k(t) \quad t \in I$$

Insbesondere:  $w_{jk}(t) = \langle e'_j(t), e_k(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}$

Wir haben damit  $n^2$  Funktionen, welche die Veränderung beschreiben. Wir zeigen nun, dass nur  $n - 1$  Funktionen nötig sind.

**Satz 3.24.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Frenetkurve mit Frenetschen KS  $(\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ e'_2(t) \\ \vdots \\ e'_{n-1}(t) \\ e'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12}(t) & & & 0 \\ -w_{12}(t) & 0 & w_{23}(t) & & \\ & -w_{23}(t) & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & w_{n-1,n}(t) \\ 0 & & & -w_{n-1,n}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_{n-1}(t) \\ e_n(t) \end{pmatrix}$$

d.h.  $w_{jk}(t) = -w_{kj}(t)$  und  $w_{jk} = 0 \quad \forall k > j + 1$ .

*Beweis.*

1) Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle e_j(t), e_k(t) \rangle &= \delta_{jk} \quad \forall t \in I \\ \Rightarrow 0 &= \langle e'_j(t), e_k(t) \rangle + \langle e_j(t), e'_k(t) \rangle \\ &= w_{jk}(t) + w_{kj}(t) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

2) Es gilt

$$\begin{aligned} e_j(t) &\in \text{span}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t)) \\ \Rightarrow e'_j(t) &\in \text{span}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j+1)}(t)) = \text{span}(e_1(t), \dots, e_{j+1}(t)) \\ \Rightarrow \langle e'_j(t), e_k(t) \rangle &= 0 \quad \forall k > j + 1 \end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Frenetkurve. Dann heißen  $k_j : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$k_j(t) := \frac{w_{j,j+1}(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad j = 1, \dots, n - 1$$

Krümmungen von  $\gamma$ .  $k_j$  heißt die  $j$ -te Krümmung. (Man teilt durch den Betrag um Unabhängigkeit von der Parametrisierung zu erreichen.)

Dann gelten für das Frenetsche KS

$$\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ e'_2(t) \\ \vdots \\ e'_{n-1}(t) \\ e'_n(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & & & \\ -k_1(t) & 0 & k_2(t) & & \\ & -k_2(t) & 0 & & \\ & & & \ddots & k_{n-1}(t) \\ & & & -k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_{n-1}(t) \\ e_n(t) \end{pmatrix}$$

die Frenetschen Formeln für  $\gamma$ .

**Satz 3.25.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Frenet-Kurve und  $k_1^\gamma, \dots, k_{n-1}^\gamma$  ihre Krümmungen. Dann gilt

- 1)  $k_1^\gamma, \dots, k_{n-2}^\gamma > 0$
- 2) Sei  $\tau : J \rightarrow I$  eine orientierungserhaltende Parameter-Transformation (d.h.  $\tau' > 0$ ) und  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau$  die Umparametrisierung von  $\gamma$   
 $\Rightarrow k^{\tilde{\gamma}}(s) = k^\gamma(\tau(s)) \quad \forall s \in J$
- 3) Sei  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine eigentliche Euklidische Bewegung, d.h.  $B(x) = Ax + x_0$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in SO(n) \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für  $\tilde{\gamma} := B \circ \gamma$   
 $k^{\tilde{\gamma}}(t) = k^\gamma(t) \quad \forall t \in I, j = 1, \dots, n-1$

*Beweis.* Übungsaufgabe (Def. von  $k_j(t)$  und Kettenregel) □

**Satz 3.26. Hauptsatz der Kurventheorie**

Seien  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -Funktionen mit  $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$ . Dann existiert eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit den Krümmungen  $k_1, \dots, k_{n-1}$ . Ist  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere Frenet-Kurve mit den Krümmungen  $k_1, \dots, k_{n-1}$ , dann existiert eine eigentliche Euklidische Bewegung  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\tilde{\gamma} = B \circ \gamma$ .

*Beweis.* Seien  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$ -Funktionen gegeben mit  $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$ . Sei  $t_0 \in I$  und  $a_1, \dots, a_n$  positiv-orientierte ONB im  $\mathbb{R}^n$ . Betrachte ein lineares DGL-System für Funktionen  $e_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$   $j = 1, \dots, n$ :

$$\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ e'_2(t) \\ \vdots \\ e'_{n-1}(t) \\ e'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & & & \\ -k_1(t) & 0 & k_2(t) & & \\ & -k_2(t) & 0 & & \\ & & & \ddots & k_{n-1}(t) \\ & & & -k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_{n-1}(t) \\ e_n(t) \end{pmatrix} \quad (*)$$

mit Anfangsbedingungen  $e_j(t_0) = a_j$   $j = 1, \dots, n$ . Dann existiert genau eine  $C^\infty$ -Lösung  $(e_1, \dots, e_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$  von (\*). (Analysis III)

Behauptung:

- 1)  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist positiv-orientierte ONB für alle  $t \in I$
  - 2) Suche Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf BL parametrisiert mit dem Frenetschen KS  $(\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$ , dann sind  $k_1, \dots, k_{n-1}$  die Krümmungen von  $\gamma$  nach den Frenetschen Formeln
  - 3) Eindeutigkeit von  $\gamma$  modulo eigentliche Euklidische Bewegungen
- zu 1) Setze  $f_{ij}(t) = \langle e_i(t), e_j(t) \rangle$  mit  $i, j = 1, \dots, n$  dann gilt

$$\begin{aligned} f'_{ij}(t) &= \langle e'_i(t), e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), e'_j(t) \rangle \\ &\stackrel{(*)}{=} -k_{i-1}(t) \langle e_{i-1}(t), e_j(t) \rangle + k_i(t) \langle e_{i+1}(t), e_j(t) \rangle \\ &\quad -k_{j-1}(t) \langle e_i(t), e_{j-1}(t) \rangle + k_j(t) \langle e_i(t), e_{j+1}(t) \rangle \\ \Rightarrow f'_{ij}(t) &= -k_{i-1}(t) f_{i-1,j}(t) + k_i(t) f_{i+1,j}(t) - k_{j-1}(t) f_{i,j-1}(t) + k_j(t) f_{i,j+1}(t) \quad (**) \end{aligned}$$

(\*\*) ist ein lineares DGL-System für  $f_{ij}$  mit AB  $f_{ij}(t_0) = \langle e_i(t_0), e_j(t_0) \rangle = \langle a_i, a_j \rangle$ . Es existiert genau eine  $C^\infty$ -Lösung dieses AWP. Diese ist

$$f_{ij}(t) = \delta_{ij} \quad \forall t \in I$$

(verifizieren durch einsetzen in (\*\*))

$\Rightarrow (e_1(t), \dots, e_n(t))$  sind ON-Basis im  $\mathbb{R}^n$  für alle  $t \in I$

$(e_1(t), \dots, e_n(t))$  sind positiv-orientiert im  $\mathbb{R}^n$ :

$$\det(e_1(t), \dots, e_n(t)) > 0 \Leftrightarrow (e_1(t), \dots, e_n(t)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$$

Nach den AB gilt:

$$\det(e_1(t_0), \dots, e_n(t_0)) = \det(a_1, \dots, a_n) > 0$$

$I \subset \mathbb{R}$  ist zusammenhängend:  $\det(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist auf  $I$  stetig und ungleich 0.

zu 2) Sei  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  fixiert und  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$\gamma(t) := y_0 + \int_{t_0}^t e_1(s) ds$$

Dann ist  $\gamma$  eine  $C^\infty$ -Funktion und  $\gamma'(t) = e_1(t) \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \|e_1(t)\| = 1$ . D.h.  $\gamma$  ist auf BL parametrisiert.

Behauptung:  $(\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist das Frenetsche KS von  $\gamma$  (d.h.  $k_1, \dots, k_{n-1}$  sind die Krümmungen von  $\gamma$ ).

Wir zeigen:  $\gamma^{(j)}(t) = e_j(t) \cdot \prod_{l=1}^{j-1} k_l(t) \pmod{\text{span}(e_1, \dots, e_{j-1})}$   $j = 1, \dots, n-1$

Hierbei bedeutet  $\pmod$ , dass noch eine Linearkombination dieser Vektoren hinzukommt.

Beweis durch Induktion:

- $\gamma''(t) = (\gamma'(t))' = e_1'(t) \stackrel{(*)}{=} k_1 \cdot e_2$
- $j \mapsto j+1$  :

$$\begin{aligned}
 \gamma^{(j+1)} &= \left( \gamma^{(j)} \right)' \stackrel{IV}{=} \left( e_j \cdot \prod_{l=1}^{j-1} k_l + \sum_{l=1}^{j-1} a_l \cdot e_l \right)' \\
 &= e_j' \cdot \prod_{l=1}^{j-1} k_l + e_j \cdot \left( \prod_{l=1}^{j-1} k_l \right)' + \left( \sum_{l=1}^{j-1} a_l \cdot e_l \right)' \\
 &= e_{j+1} \cdot \prod_{l=1}^j k_l + e_{j-1} \cdot (*) + \left( \sum_{l=1}^{j-1} a_l \cdot e_l \right)' \\
 &= e_{j+1} \cdot \prod_{l=1}^j k_l \quad \text{mod } \text{span}(e_1, \dots, e_j)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t))$  sind linear unabhängig

\*  $\text{span}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t)) = \text{span}(e_1(t), \dots, e_j(t))$

\*  $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t))$  und  $(e_1(t), \dots, e_j(t))$  sind gleich orientiert, da die Transformationsmatrix die Form hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & k_1 & & & \\ & & k_1 \cdot k_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & k_1 \cdot \dots \cdot k_{j-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det > 0, \text{ da } k_1, \dots, k_{n-1} > 0$$

\*  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  sind positiv orientierte ONB  $\forall t \in I$

$\Rightarrow (\gamma(t), e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist das Frenet-KS von  $\gamma$  (siehe oben)

zu 3) Sei  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  weitere auf BL parametrisierte Frenet-Kurve mit den Krümmungen  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gelten die Frenetschen Formeln für  $\tilde{\gamma}$ . Für das Frenetsche KS  $(\tilde{\gamma}(t), \tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t))$  gilt:

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1'(t) \\ \tilde{e}_2'(t) \\ \vdots \\ \tilde{e}_{n-1}'(t) \\ \tilde{e}_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & & & \\ -k_1(t) & 0 & k_2(t) & & \\ & -k_2(t) & 0 & & \\ & & & \ddots & k_{n-1}(t) \\ & & & -k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1(t) \\ \tilde{e}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{e}_{n-1}(t) \\ \tilde{e}_n(t) \end{pmatrix} \quad (***)$$

Da  $\tilde{e}_1(t_0), \dots, \tilde{e}_n(t_0)$  eine positiv orientierte ONB ist, existiert eine Matrix  $A \in SO(n)$  mit  $\tilde{e}_j(t_0) = Ae_j(t_0)$  für  $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$  Die Funktionen  $\tilde{e}_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $Ae_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  erfüllen (\*\*\*) mit der gleichen AB  $\tilde{e}_j(t_0) = Ae_j(t_0)$  ( $j = 1, \dots, n$ )

$\Rightarrow Ae_j = \tilde{e}_j$  (Eindeutigkeit von AWP für lin. DGL-Systeme)

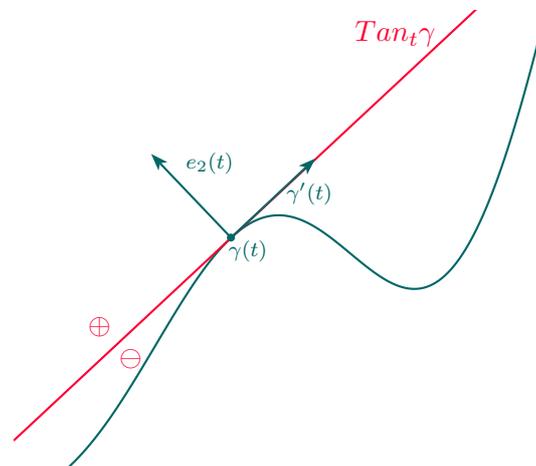
$$\begin{aligned} j = 1 &\Rightarrow A\gamma'(t) \stackrel{A \text{ konstant}}{=} (A\gamma)'(t) = \tilde{\gamma}'(t) \quad \forall t \in I \\ &\Rightarrow \text{es existiert } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \tilde{\gamma}(t) = A\gamma(t) + x_0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

□

### 3.5.1 Spezialfälle

#### 3.5.1.1 Ebene Kurven

Sei im weiteren  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  glatt und regulär (d.h. Frenet-Kurve). Wir bezeichnen



- mit  $Tan_t \gamma := \gamma(t) + \mathbb{R}\gamma'(t)$  die Tangente an  $\gamma$  in  $t \in I$
- mit  $e_1(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$  den Tangentenvektor von  $\gamma$  in  $t \in I$
- mit  $e_2(t) := D_{\frac{\pi}{2}}(e_1(t))$  den Normalenvektor von  $\gamma$  in  $t \in I$   
(hier bezeichnet  $D_{\frac{\pi}{2}}$  die Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  in positiver Richtung)
- Die Frenetschen Formeln (kurz: FF) haben die Form

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) \\ -k(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$$

mit  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  Krümmung von  $\gamma$

**Satz 3.27.** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  regulär mit Krümmung  $k^\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- 1) Sei  $v_0$  ein fixierter Einheitsvektor und

$$w(t) := \langle^{or}(v_0, \gamma'(t))$$

der orientierte Winkel zwischen  $v_0$  und  $\gamma'(t)$ . Dann gilt:

$$k^\gamma(t) = \frac{w'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \forall t \in I$$

(geometrische Interpretation der Krümmung: Tangente dreht sich)

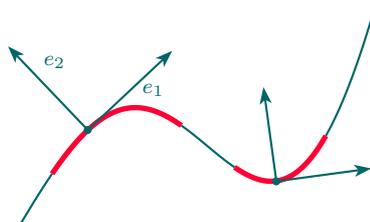
$$2) \quad k^\gamma(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \forall t \in I \quad (\text{Berechnung von } k^\gamma)$$

Ist insbesondere  $\gamma$  auf BL parametrisiert, dann gilt

$$\gamma''(t) = k^\gamma(t) \cdot e_2(t)$$

3)  $k^\gamma(t) > 0 \Leftrightarrow$  ex.  $I_\epsilon = (t - \epsilon, t + \epsilon)$  sodass  $\gamma|_{I_\epsilon}$  im  $\oplus$ -Halbraum liegt

$k^\gamma(t) < 0 \Leftrightarrow$  ex.  $I_\epsilon = (t - \epsilon, t + \epsilon)$  sodass  $\gamma|_{I_\epsilon}$  im  $\ominus$ -Halbraum liegt



*Beweis.*

1) Sei  $(v_0, v_1)$  positiv orientierte ONB des  $\mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Rightarrow e_1(t) &= \cos(w(t)) \cdot v_0 + \sin(w(t)) \cdot v_1 \\ e_2(t) &= \cos\left(w(t) + \frac{\pi}{2}\right) \cdot v_0 + \sin\left(w(t) + \frac{\pi}{2}\right) \cdot v_1 \\ &= -\sin(w(t)) \cdot v_0 + \cos(w(t)) \cdot v_1 \quad (*) \\ \Rightarrow e_1'(t) &= -w'(t) \sin(w(t)) \cdot v_0 + w'(t) \cos(w(t)) \cdot v_1 \\ &\stackrel{(*)}{=} w'(t) \cdot e_2(t) \\ &\stackrel{FF}{=} \|\gamma'(t)\| k^\gamma(t) e_2(t) \\ \Rightarrow w'(t) &= \|\gamma'(t)\| k^\gamma(t) \\ \Rightarrow k^\gamma(t) &= \frac{w'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \end{aligned}$$

2) Es gilt

$$\begin{aligned}
 \gamma'(t) &= e_1(t) \|\gamma'(t)\| \\
 \Rightarrow \gamma''(t) &= e_1'(t) \|\gamma'(t)\| + e_1(t) \|\gamma'(t)\|' \\
 &\stackrel{FF}{=} \|\gamma'(t)\|^2 \cdot k^\gamma(t) e_2(t) + e_1(t) \|\gamma'(t)\|' \\
 \Rightarrow \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) &= \det(e_1(t) \|\gamma'(t)\|, \|\gamma'(t)\|^2 \cdot k^\gamma(t) e_2(t)) \\
 &= \|\gamma'(t)\|^3 \cdot k^\gamma(t) \cdot \underbrace{\det(e_1(t), e_2(t))}_{=1} \\
 \Rightarrow k^\gamma(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}
 \end{aligned}$$

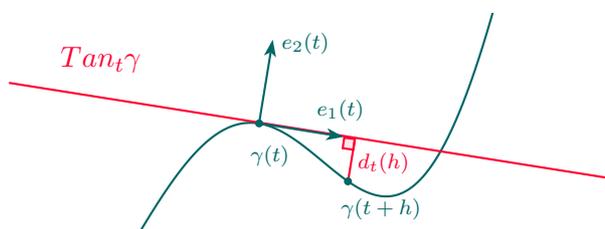
Sei nun  $\gamma$  auf BL parametrisiert  $\Rightarrow \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle &= 0 \Rightarrow \gamma'(t) \perp \gamma''(t) \\
 \Rightarrow \gamma''(t) &= \alpha(t) \cdot e_2(t)
 \end{aligned}$$

Da  $k^\gamma(t) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t))$  gilt

$$\begin{aligned}
 k^\gamma(t) &= \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) = \det(e_1(t), \alpha(t) \cdot e_2(t)) \\
 &= \alpha(t) \cdot \underbrace{\det(e_1(t), e_2(t))}_{=1}
 \end{aligned}$$

3) Sei o.B.d.A.  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf BL parametrisiert. Sei  $t \in I$  fix.



$$\begin{aligned}
 d_t(h) &:= \text{dist}^{or}(\gamma(t+h), \text{Tan}_t \gamma) := \langle \gamma(t+h) - \gamma(t), e_2(t) \rangle \\
 \Rightarrow d_t(0) &= 0 \\
 d_t'(0) &= \langle \gamma'(t), e_2(t) \rangle = 0 \\
 d_t''(0) &= \langle \gamma''(t), e_2(t) \rangle = k^\gamma(t)
 \end{aligned}$$

falls  $k^\gamma(t) > 0 \Leftrightarrow d_t$  hat in  $k=0$  striktes lokales Minimum

$$\Rightarrow d_t(h) > 0 \quad \forall 0 < |h| < \epsilon$$

falls  $k^\gamma(t) < 0 \Leftrightarrow d_t$  hat in  $k=0$  striktes lokales Maximum

$$\Rightarrow d_t(h) < 0 \quad \forall 0 < |h| < \epsilon$$

□

**Beispiel 3.28.**

- 1)  $k^\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(\gamma)$  liegt auf einer Geraden
- 2)  $k^\gamma(t) = r \Leftrightarrow \text{Im}(\gamma)$  liegt auf einer Kreislinie vom Radius  $\frac{1}{|r|}$

Beide Aussagen folgen nach dem Hauptsatz der Kurventheorie.

**3.5.1.2 Kurven im  $\mathbb{R}^3$** 

Sei im weiteren  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  Frenet-Kurve, d.h. regulär und  $(\gamma'(t), \gamma''(t))$  linear unabhängig für alle  $t \in I$ . Das Frenetsche Koordinatensystem beschreibt sich dann wie folgt

$$e_1(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \text{ heißt der } \underline{\text{Tangentenvektor}} \text{ von } \gamma \text{ in } t \in I$$

$$e_2(t) := \left( \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} \right) \cdot \frac{1}{\left\| \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|^2} \right\|} \text{ heißt}$$

der Hauptnormalenvektor von  $\gamma$  in  $t \in I$

$$e_3(t) := e_1(t) \times e_2(t) = \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|} \text{ heißt der } \underline{\text{Binormalenvektor}} \text{ von } \gamma \text{ in } t \in I$$

Für die Frenetschen Formeln gilt

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix}$$

$k : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Krümmung von  $\gamma$  ( $k > 0$ )

$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Windung von  $\gamma$

Formeln zur Berechnung von  $k$  und  $\tau$ 

Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf BL parametrisiert. Dann gilt  $\gamma'(t) \perp \gamma''(t)$ ,  $e_1(t) = \gamma'(t)$  für alle  $t \in I$ . Damit folgt

- $e_1(t) = \gamma'(t)$
- $e_2(t) = \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$
- $e_3(t) = (\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \frac{1}{\|\gamma''(t)\|}$

Damit und mit den Frenetschen Formeln gilt

$$\begin{aligned}\Rightarrow e_1'(t) &= \gamma''(t) \stackrel{FF}{=} k(t)e_2(t) = k(t) \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|} \\ \Rightarrow k(t) &= \|\gamma''(t)\|\end{aligned}$$

weiter gilt

$$\begin{aligned}e_2'(t) &= -k(t)e_1(t) + \tau(t)e_3(t) \\ \Rightarrow \tau(t) &= \langle e_2'(t), e_3(t) \rangle = \left\langle \frac{\gamma'''(t)}{k(t)} + \gamma''(t) \left( \frac{1}{k(t)} \right)', \frac{1}{k(t)} (\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{k(t)^2} \langle \gamma'''(t), \gamma'(t) \times \gamma''(t) \rangle = \frac{1}{k(t)^2} \det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) \\ \Rightarrow \tau(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma''(t)\|^2}\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- 1) Ist  $\gamma$  auf BL parametrisiert, so heißt  $\gamma''$  Krümmungsvektor von  $\gamma$  in  $t \in I$ . (wegen  $k(t) = \|\gamma''(t)\|$ . Falls  $\gamma''(t_0) = 0$ , dann setzt man  $k^\gamma(t_0) := 0$ )
- 2) Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine ebene Kurve und  $\tilde{\gamma} = (\gamma, 0) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Dann gilt:

$$\underbrace{k^\gamma(t)}_{\text{2-dim. Krümmung}} = \underbrace{k^{\tilde{\gamma}}(t)}_{\text{3-dim. Krümmung}}$$

für alle  $t \in I$ .

**Satz 3.29.** Für die Krümmung und Windung einer beliebigen Frenet-Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt:

$$\begin{aligned}1) \quad k^\gamma(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \sqrt{\det \begin{pmatrix} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle & \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \\ \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle & \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle \end{pmatrix}} \\ 2) \quad \tau^\gamma(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} \stackrel{1)}{=} \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{k^\gamma(t)^2 \|\gamma'(t)\|^6}\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir parametrisieren  $\gamma$  auf BL: fixieren  $t_0 \in I$

$$\begin{aligned}l(t) &:= \int_{t_0}^t \|\gamma'(s)\| ds \Rightarrow l'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0 \\ \Rightarrow \quad l : I &\rightarrow J = l(I) \text{ ist eine orient.-erhaltende Parametertransformation}\end{aligned}$$

Für die Umparametrisierung  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ l^{-1}$  auf BL gilt dann mit Satz 3.25:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(l(t)) &= \gamma(t) \quad \forall t \in I \\ \stackrel{\text{Satz 3.25}}{\Rightarrow} \quad k^{\tilde{\gamma}}(l(t)) &= k^\gamma(t), \tau^{\tilde{\gamma}}(l(t)) = \tau^\gamma(t) \quad \forall t \in I\end{aligned}$$

zu 1) Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \tilde{\gamma}'(l(t)) \cdot l'(t) \\ \gamma''(t) &= \tilde{\gamma}''(l(t)) \cdot l'(t)^2 + \tilde{\gamma}'(l(t)) \cdot l''(t) \\ \gamma'''(t) &= \tilde{\gamma}'(l(t)) \cdot l'(t)^3 + \tilde{\gamma}''(l(t)) \cdot 3l'(t) \cdot l''(t) + \tilde{\gamma}'(l(t)) \cdot l'''(t)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} &= \frac{\|l'(t) \cdot \tilde{\gamma}'(l(t)) \times l'(t)^2 \cdot \tilde{\gamma}''(l(t))\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ &= \frac{\overbrace{\|l'(t)\|^3}^{\|\gamma'(t)\|^3} \|\tilde{\gamma}'(l(t)) \times \tilde{\gamma}''(l(t))\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \\ &= \|\tilde{\gamma}'(l(t)) \times \tilde{\gamma}''(l(t))\| \\ \stackrel{\tilde{\gamma} \text{ auf BL}}{=} \|\tilde{\gamma}''(l(t))\| &= k^{\tilde{\gamma}}(l(t)) \\ &= k^{\gamma}(t)\end{aligned}$$

zu 2) Nach den Definitionen von  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  sowie den Bemerkungen zur Berechnung von  $\tau$  und  $k$  gilt

$$\begin{aligned}\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) &= l'(t)^6 \cdot \det(\tilde{\gamma}'(l(t)), \tilde{\gamma}''(l(t)), \tilde{\gamma}'''(l(t))) \\ &= l'(t)^6 \cdot \underbrace{\tau^{\tilde{\gamma}}(l(t))}_{=\tau^{\gamma}(t)} \cdot \underbrace{k^{\tilde{\gamma}}(l(t))^2}_{=k^{\gamma}(t)^2} \\ \Rightarrow \tau^{\gamma}(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{k^{\gamma}(t)^2 \cdot \|\gamma'(t)\|^6}\end{aligned}$$

□

### Geometrische Bedeutung von Krümmung und Windung

**Krümmung** Die Krümmung misst die Abweichung von  $\gamma$  von einer Geraden. Sei hierzu o.B.d.A.  $\gamma$  auf BL parametrisiert. Es gilt

$$\begin{aligned}k^{\gamma}(t) \equiv 0 &\Leftrightarrow \text{Im } \gamma \text{ liegt auf einer Geraden, denn:} \\ k^{\gamma}(t) \equiv 0 &\Leftrightarrow \gamma''(t) = 0 \forall t \in I \Leftrightarrow \gamma(t) = at + b \forall t \in I\end{aligned}$$

**Satz 3.30.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regulär,  $t \in I$  fix. Sei

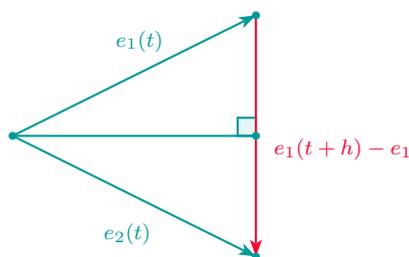
$$v_t(h) := \sphericalangle(\gamma'(t+h), \gamma'(t)) \in [0, \pi]$$

der nicht orientierte Winkel zwischen  $\gamma'(t)$  und  $\gamma'(t+h)$ . Dann gilt

$$k^{\gamma}(t) = \frac{v_t'(0)}{\|\gamma'(t)\|}$$

*Beweis.* Es gilt

$$v_t(h) = \sphericalangle(e_1(t+h), e_1(t))$$



Und nach elementargeometrischen Überlegungen zum Sinus im rechtwinkligen Dreieck weiter

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin\left(\frac{v_t(h)}{2}\right) &= \frac{\|e_1(t+h) - e_1(t)\|}{2} \quad (*) \\ \Rightarrow v'_t(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_t(h) - v_t(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_t(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|e_1(t+h) - e_1(t)\|}{h} \cdot \underbrace{\frac{v_t(h)}{2 \sin\left(\frac{v_t(h)}{2}\right)}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \\ &= \|e'_1(t)\| \\ &\stackrel{FF}{=} \|\|\gamma'(t)\|k^\gamma(t) \cdot e_2(t)\| = \|\gamma'(t)\|k^\gamma(t) \\ \Rightarrow k^\gamma(t) &= \frac{v'_t(0)}{\|\gamma'(t)\|} \end{aligned}$$

□

**Windung** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve. Die Windung misst die Abweichung von  $\gamma$  von einer Ebene, d.h.

$$\tau \equiv 0 \Leftrightarrow \text{Im } \gamma \text{ liegt in einer Ebene}$$

*Beweis.*

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\gamma(t) \in P + \text{span}(a_1, a_2) \quad \forall t \in I$ . Dann gilt  $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t) \in \text{span}(a_1, a_2)$ , also sind  $\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)$  linear abhängig. Mit Satz 3.29 gilt  $\tau^\gamma(t) = 0$ . (Determinante linear abhängiger Vektoren ist 0.)

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $\tau^\gamma \equiv 0$ . Mit den Frenetschen Formeln gilt für alle  $t \in I$ :

$$\begin{aligned} e_3'(t) &= -\|\gamma'(t)\| \cdot \tau^\gamma(t) \cdot e_2(t) = 0 \\ \Rightarrow e_3(t) &= a = \textit{konstant} \\ \Rightarrow \langle \gamma'(t), e_3(t) \rangle &= 0 \quad \forall t \in I \\ \Rightarrow \langle \gamma'(t), a \rangle &= \langle \gamma(t), a \rangle' = 0 \\ \Rightarrow \langle \gamma(t), a \rangle &= \textit{konstant} = c \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma(t) \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, a \rangle = c\} =: \textit{Ebene} \quad \forall t \in I$$

□

**Satz 3.31.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve,  $t \in I$  und sei

$$\eta_t(h) := \sphericalangle(e_3(t+h), e_3(t)) \in [0, \pi]$$

der nicht orientierte Winkel zwischen den benachbarten Binormalenvektoren  $e_3(t+h)$  und  $e_3(t)$ . Dann gilt

$$|\tau^\gamma(t)| = \frac{\eta_t'(0)}{\|\gamma'(t)\|}$$

*Beweis.* analog zu Satz 3.30

□

**Definition.** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Frenet-Kurve,  $t \in I$ , dann heißt

$$E_s(t) := \gamma(t) + \text{span}(\gamma'(t), \gamma''(t))$$

die Schmiegeebene von  $\gamma$  in  $t \in I$ .

### Vorzeichen der Torsion:

Behauptung:

- $\tau^\gamma(t) > 0 \Leftrightarrow \gamma$  durchstößt die Schmiegeebene  $E_s(t)$  in  $t \in I$  von  $\ominus$  nach  $\oplus$
- $\tau^\gamma(t) < 0 \Leftrightarrow \gamma$  durchstößt die Schmiegeebene  $E_s(t)$  in  $t \in I$  von  $\oplus$  nach  $\ominus$

*Beweis.* Es gilt

$$\bullet \gamma(t+h) - \gamma(t) = x(h)e_1(t) + y(h)e_2(t) + z(h)e_3(t)$$

Die Taylorformel für  $\gamma(t+h)$  in  $h=0$  führt zu:

$$\bullet \quad \gamma(t+h) - \gamma(t) = \gamma'(t)h + \frac{1}{2}\gamma''(t)h^2 + \frac{1}{6}\gamma'''(t)h^3 + O(h^4)$$

Sei nun  $\gamma$  o.B.d.A. auf BL parametrisiert. Mit den Frenetschen Formeln gilt

$$\begin{aligned} \gamma'''(t) &= k'(t)e_2(t) + k(t)e_2'(t) \\ &\stackrel{FF}{=} k'(t)e_2(t) + k(t)(-k(t)e_1(t) + \tau(t)e_3(t)) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt zu einer Formel für  $z(h)$

$$\begin{aligned} z(h) &= \frac{1}{6}h^3k(t)\tau(t) + O(h^4) \\ &= h^3 \left( \underbrace{\frac{1}{6}k(t)}_{>0} \tau(t) + O(h) \right) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

### 3.6 Krümmungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$

Zunächst werden wir einige Bezeichnungen einführen. In diesem Kapitel sei stets  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine 2-dimensionale, orientierte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  mit induzierter riemannscher Metrik. Wir bezeichnen dann  $M$  als Fläche.

**Definition.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine Fläche. Die Abbildung

$$\begin{aligned} n : M &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto n(x) \end{aligned}$$

mit

- 1)  $\|n(x)\| = 1$
- 2)  $n(x) \perp T_x M$
- 3)  $(v_1, v_2, n(x)) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^3} \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathcal{O}_{T_x M}$

heißt die gaußsche Normalenabbildung von  $M$ .

Weiter sei für  $x \in M$  und  $v \in T_x M$  mit  $E_v := x + \text{span}(v, n(x))$  die Ebene durch  $x$  bezeichnet, die von  $v$  und  $n(x)$  aufgespannt wird. Wir wollen die Kurve  $\Gamma_v = M \cap E_v$  in  $E_v$  nutzen um die Krümmung von  $M$ , d.h. die „Abweichung von  $M$  von  $T_x M$  in  $x$ “ zu messen. Hierfür wollen wir Eigenschaften der gaußschen Normalenabbildung ausnutzen.

**Satz 3.32.** Sei  $n : M \rightarrow S^2$  die gaußsche Normalenabbildung von  $M$ . Dann gilt

- 1)  $T_x M = T_{n(x)} S^2 \quad \forall x \in M$   
 2)  $dn_x : T_x M \rightarrow T_x M (\stackrel{1)}{=} T_{n(x)} S^2)$  ist selbstadjungiert bzgl.  $g_x := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3|_{T_x M \times T_x M}}$  d.h.  

$$\langle dn_x(v), w \rangle_{\mathbb{R}^3} = \langle v, dn_x(w) \rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \forall v, w \in T_x M$$

*Beweis.*

zu 1)  $T_{n(x)} S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 | \langle v, n(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0\} = T_x M$  da  $n(x)$  Normalenvektor an  $T_x M$ .

zu 2)  $dn_x : T_x M \rightarrow T_x M$  ist eine lineare Abb. von  $T_x M$  nach  $T_x M$ . Sei  $(U, \varphi = (u_1, u_2))$  Karte von  $M$  um  $x \in M$ . Wegen der Linearität genügt es die Behauptung auf einer Basis von  $T_x M$  zu zeigen. D.h. es genügt zu zeigen

$$\left\langle dn_x \left( \frac{\partial}{\partial u_i}(x) \right), \frac{\partial}{\partial u_j}(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}(x), dn_x \left( \frac{\partial}{\partial u_j}(x) \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \quad i, j = 1, 2$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \left\langle dn_x \left( \frac{\partial}{\partial u_i}(x) \right), \frac{\partial}{\partial u_j}(x) \right\rangle &= \left\langle \underbrace{dn_x \left( \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_i}(\varphi(x)) \right)}_{= \frac{\partial}{\partial u_i} (n \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}(\varphi(x)) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{\partial}{\partial u_i} \underbrace{\left\langle \underbrace{n \circ \varphi^{-1}}_{\text{normal}}, \underbrace{\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial u_j}}_{\text{tangential}} \right\rangle}_{=0}(\varphi(x)) \\ &= - \left\langle n(x), \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial u_i \partial u_j}(\varphi(x)) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Lemma von Schwarz}}{=} - \left\langle n(x), \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial u_j \partial u_i}(\varphi(x)) \right\rangle \\ &\stackrel{\text{rückwärts}}{=} \left\langle dn_x \left( \frac{\partial}{\partial u_j}(x) \right), \frac{\partial}{\partial u_i}(x) \right\rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow dn_x$  ist selbstadjungiert auf  $(T_x M, g_x)$ . □

Bemerkung: Es gilt  $\left\langle dn_x \left( \frac{\partial}{\partial u_i}(x) \right), \frac{\partial}{\partial u_j}(x) \right\rangle = - \left\langle n(x), \frac{\partial^2 \varphi^{-1}}{\partial u_i \partial u_j}(\varphi(x)) \right\rangle$ . Damit haben wir auf  $T_x M$  zwei symmetrische Bilinearformen:

1. Fundamentalform:

$$I_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto g_x(v, w) = \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Die erste Fundamentalform beschreibt die „innere“ Geometrie auf  $M$ , d.h. Längen, Winkel und Flächeninhalte. ( $I$  entspricht der induzierten Riemannschen Metrik)

2. Fundamentalform:

$$II_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto II_x(v, w) = \langle -dn_x(v), w \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

Die 2. Fundamentalform soll die „Krümmung“ kodieren.

**Satz 3.33.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  orientierte Fläche mit gaußscher Normalenabbildung  $n$  und 2. Fundamentalform  $II$

1) Sei  $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$  auf  $BL$  parametrisierte Kurve, dann gilt

$$II_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle n(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle_{\mathbb{R}^3}$$

2) Sei  $x \in M, v \in T_x M$  mit  $\|v\| = 1$ , sei weiter  $E_v := x + \text{span}(v, n(x)), \Gamma_v := M \cap E_v$  und  $\delta : I \rightarrow M$  eine auf  $BL$  parametrisierte Kurve mit  $\text{Im } \delta = \Gamma_v$  (lokal um  $x$ ). Also  $\delta(t_0) = x, \delta'(t_0) = v$  für ein  $t_0 \in I$  (d.h.  $\delta$  parametrisiert  $\Gamma_v$  auf  $BL$ ). Dann ist  $\delta$  eine Kurve in der Ebene  $E_v$ . Identifiziere  $E_v$  mit  $\mathbb{R}^2$  durch das Koordinatensystem  $(x, v, n(x))$ . Dann gilt:

$$II_x(v, v) = k^\delta(t_0) \text{ (Krümmung der Ebenen Kurve } \delta)$$

*Beweis.*

1) Es gilt

$$II_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \stackrel{Def.}{=} \langle -dn_x(\gamma'(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$\stackrel{KR}{=} -\langle (n \circ \gamma)'(t), \gamma'(t) \rangle$$

$$\stackrel{PR}{=} -\frac{d}{dt} \left( \underbrace{\langle (n \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle}_{\substack{\text{normal} \quad \text{tangential}}} \right) + \langle n(\gamma(t)), \gamma''(t) \rangle$$

$$\qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$$

2) Sei  $\delta$  wie beschrieben gegeben. Wir betrachten  $\delta$  als ebene Kurve. Für das Frenet-sche KS von  $\delta$  gilt

$$e_1^\delta(t_0) = \delta'(t_0) = v$$

$$e_2^\delta(t_0) = D_{\frac{\pi}{2}}(e_1^\delta(t_0)) = D_{\frac{\pi}{2}}(v) = n(x)$$

Da  $\delta$  auf BL parametr. ist, gilt für ihre Krümmung:

$$\begin{aligned} \delta''(t) &= k^\delta(t) \cdot e_2^\delta(t) \\ \Rightarrow \delta''(t_0) &= k^\delta(t_0) \cdot n(\delta(t_0)) \\ \stackrel{1)}{\Rightarrow} II_x(v, v) &= II_{\delta(t_0)}(\delta'(t_0), \delta'(t_0)) \stackrel{1)}{=} \langle n(\delta(t_0)), \delta''(t_0) \rangle \\ &= \langle n(\delta(t_0)), k^\delta(t_0) \cdot n(\delta(t_0)) \rangle \\ &= k^\delta(t_0) \end{aligned}$$

□

Bemerkung:  $II_x(v, v)$  misst die Krümmung der Schnittkurve  $\Gamma_v \subset E_v$ , d.h. die Abweichung von  $\Gamma_v$  von  $T_xM$ .

**Definition.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  orient. Fläche,  $x \in M, v \in T_xM, \|v\| = 1$ . Dann heißt

$$k_n(v) := II_x(v, v)$$

Normalen-Krümmung von  $M$  im Punkt  $x$  in Richtung  $v$ .

Folgerung: Für  $v \in T_xM$  mit  $\|v\| = 1$  gilt

$$\begin{aligned} k_n(v) > 0 &\Leftrightarrow \Gamma_v = M \cap E_v \text{ liegt nahe } x \text{ in } \oplus\text{-Seite der Tangentialebene bzgl. } n(x) \\ k_n(v) < 0 &\Leftrightarrow \Gamma_v = M \cap E_v \text{ liegt nahe } x \text{ in } \ominus\text{-Seite der Tangentialebene bzgl. } n(x) \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass  $k_n : \underbrace{\{v \in T_xM \mid \|v\| = 1\}}_{\text{kompakt in } T_xM} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, da  $II$  bilinear ist.

$\Rightarrow$   $k_n$  nimmt auf  $\{v \in T_xM \mid \|v\| = 1\}$  ein Minimum und ein Maximum an:

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &:= \min\{k_n(v) \mid v \in T_xM, \|v\| = 1\} \\ \lambda_2(x) &:= \max\{k_n(v) \mid v \in T_xM, \|v\| = 1\} \end{aligned}$$

$\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  heißen Hauptkrümmungen von  $M$  in  $x \in M$ . Ein Vektor  $v \in T_xM$  mit  $\|v\| = 1$  und  $k_n(v) = \lambda_i(x), i = 1, 2$  heißt Hauptkrümmungsvektor. Die Geraden  $\mathbb{R}v$  dazu heißen Hauptkrümmungsrichtungen.

**Satz 3.34.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine orientierte Fläche,  $I_x, II_x$  die 1. und 2. Fundamentalform von  $M$  in  $x$ . Sei  $v_1, v_2$  eine ONB von  $(T_xM, I_x)$ , sodass

$$(II_x(v_i, v_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad \mu_1 \leq \mu_2 \quad (\text{Hauptachsentransformation})$$

- 1) Dann sind  $v_1, v_2$  Hauptkrümmungsvektoren von  $M$  in  $x \in M$  und  $\mu_i = \lambda_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ .
- 2) Es gilt die Eulersche Formel: Sei  $v(\theta) \in T_x M$  ein Einheitsvektor mit  $\theta = \angle^{or}(v_1, v(\theta))$  bei der Orientierung  $(v_1, v_2) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ . Dann gilt:

$$k_n(v(\theta)) = \cos^2 \theta \cdot \lambda_1(x) + \sin^2 \theta \cdot \lambda_2(x)$$

*Beweis.* Sei  $(v_1, v_2)$  wie gefordert gegeben. Sei weiter

$$v(\theta) := \cos \theta \cdot v_1 + \sin \theta \cdot v_2 \in T_x M$$

ein Einheitsvektor, d.h.  $\theta = \angle^{or}(v_1, v(\theta))$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} II_x(v(\theta), v(\theta)) &= \underbrace{k_n(v(\theta))}_{=: k(\theta)} = II_x(\cos \theta \cdot v_1 + \sin \theta \cdot v_2, \cos \theta \cdot v_1 + \sin \theta \cdot v_2) \\ &= \cos^2 \theta \cdot \mu_1 + \sin^2 \theta \cdot \mu_2 \quad (*) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Maxima und Minima von  $k(\theta)$ :

$$\begin{aligned} k'(\theta) &= 2 \cdot \underbrace{\cos \theta \cdot \sin \theta}_{=\sin(2\theta)} \underbrace{(\mu_2 - \mu_1)}_{\geq 0} \\ &\stackrel{!}{=} 0, \text{ falls } \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 \text{ und } \theta \text{ beliebig} \\ \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Weiter gilt  $k''(\theta) = 4 \cos(2\theta)(\mu_2 - \mu_1)$ . Dann gilt für den Fall  $\mu_2 > \mu_1$ :

$$\begin{aligned} k''(\theta) > 0 &\Leftrightarrow \theta = 0, \pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow k(\theta) \text{ hat lok. (glob.) Minimum} \\ k''(\theta) < 0 &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow k(\theta) \text{ hat lok. (glob.) Maximum} \end{aligned}$$

Damit folgt, dass  $v_1$  und  $v_2$  Hauptkrümmungsvektoren von  $M$  im Punkt  $x$  sind und

$$\begin{aligned} k_n(v_1) = \lambda_1(x) = \mu_1 & \quad \text{im Fall } \theta = 0, \pi, \\ k_n(v_2) = \lambda_2(x) = \mu_2 & \quad \text{im Fall } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Damit ist 1) bewiesen, die Eulersche Formel folgt direkt aus (\*). □

Folgerung: Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine orientierbare Fläche und  $n : M \rightarrow S^2$  ihre gaußsche Normalenabbildung. Dann sind die Hauptkrümmungen  $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$  die Eigenwerte der selbstadjungierten linearen Abbildung  $-dn_x : T_x M \rightarrow T_x M$  und die Hauptkrümmungsvektoren sind die zugehörigen Eigenvektoren.

*Beweis.* Seien  $(v_1, v_2)$  die Hauptkrümmungsvektoren

$$\begin{aligned} (II_x(v_i, v_j))_{i,j} &= \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow II_x(v_i, v_j) &= \langle -dn_x(v_i), v_j \rangle_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ij} \lambda_i(x) \\ &= \langle \lambda_i(x) v_i, v_j \rangle \\ \Rightarrow I_x(-dn_x(v_i), v_j) &= I_x(\lambda_i(x) v_i, v_j) \end{aligned}$$

Und da  $I_x$  nicht ausgeartet ist folgt

$$-dn_x(v_i) = \lambda_i(x) v_i$$

für  $i = 1, 2$  und damit die Behauptung.  $\square$

**Definition.**

- Die Zahl  $K(x) := \lambda_1(x) \cdot \lambda_2(x)$  heißt Gauß-Krümmung von  $M$  in  $x \in M$
- Die Zahl  $H(x) := \frac{1}{2}(\lambda_1(x) + \lambda_2(x))$  heißt mittlere Krümmung von  $M$  in  $x \in M$

Zur Berechnung von  $K(x)$ ,  $H(x)$ ,  $\lambda_1(x)$ ,  $\lambda_2(x)$  in lokalen Koordinaten: Sei

$$f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $x \in M$  (d.h.  $(f(U), f^{-1})$  ist eine UMF-Karte von  $M$ ). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i}(f(u)) &= \frac{\partial f}{\partial u_i}(u) \\ T_{f(u)}M &= \text{span} \left( \frac{\partial f}{\partial u_1}(u), \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \right) \end{aligned}$$

Die Normalenabbildung  $n$  beschreibt sich auf  $f(U)$  durch

$$n(f(u)) = \left( \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \right) \cdot \left\| \frac{\partial f}{\partial u_1}(u) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u) \right\|^{-1}$$

Sei weiter:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &:= I_{f(u)} \left( \frac{\partial f}{\partial u_i}(u), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \right) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \\ h_{ij}(u) &:= II_{f(u)} \left( \frac{\partial f}{\partial u_i}(u), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \right) = \left\langle n(f(u)), \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Im folgenden werden die Bezeichnungen  $(g_{ij}(u))$  und  $(h_{ij}(u))$  für die Matrizen mit den Einträgen  $g_{ij}(u)$  beziehungsweise  $h_{ij}(u)$  verwendet.

**Satz 3.35.** Für die Krümmungen gilt auf  $f(U) \subset M$ :

- 1)  $K(f(u)) = \frac{\det(h_{ij}(u))}{\det(g_{ij}(u))} \quad u = (u_1, u_2)$
- 2)  $H(f(u)) = \frac{1}{2} \cdot \text{Spur}((g_{ij}(u))^{-1} \circ (h_{ij}(u)))$
- 3)  $\lambda_1(f(u)), \lambda_2(f(u))$  sind Nullstellen des Polynoms

$$\lambda^2 - 2H(f(u))\lambda + K(f(u)) = 0 \quad \text{d.h.}$$

$$\lambda_{1,2}(f(u)) = H(f(u)) \pm \sqrt{H(f(u))^2 - K(f(u))}$$

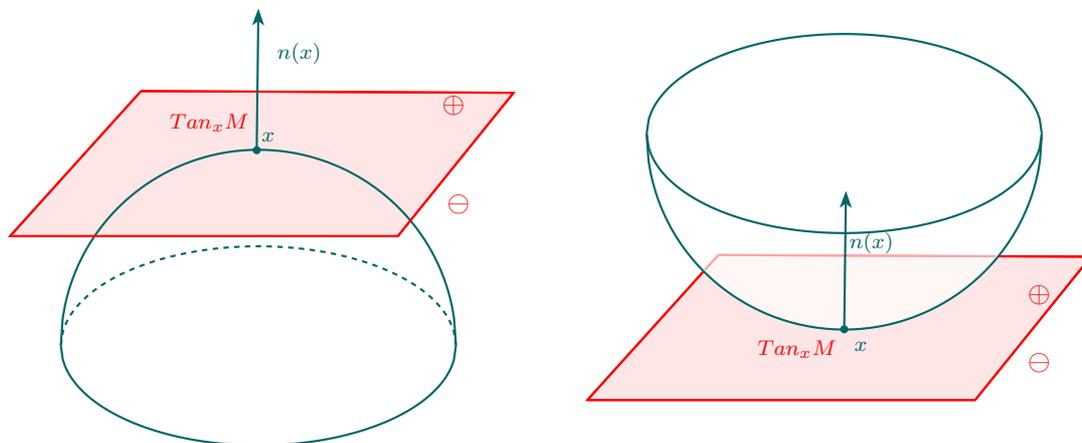
Insbesondere sind  $K, H \in C^\infty(M)$ .

*Beweis.* Seien  $v_1, v_2$  Krümmungsvektoren von  $M$  in  $f(u)$ , die eine ONB in  $T_x M$  sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_i} &= \sum_{k=1}^2 A_{ki}(u) \cdot v_k \\ \Rightarrow (g_{ij}(u)) &= \left( I_{f(u)} \left( \frac{\partial f}{\partial u_i}, \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \right)_{ij} = A^t(u) \circ \underbrace{(I_{f(u)}(v_k, v_l))_{ij}}_{=E} \circ A(u) \\ &= A(u)^t \circ A(u) \quad \text{und analog} \\ (h_{ij}(u)) &= A(u)^t \circ \begin{pmatrix} \lambda_1(u) & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) \end{pmatrix} \circ A(u) \\ \Rightarrow (g_{ij}(u))^{-1} \circ (h_{ij}(u)) &= A(u)^{-1} \circ (A(u)^t)^{-1} \circ A(u)^t \circ \begin{pmatrix} \lambda_1(u) & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) \end{pmatrix} \circ A(u) \\ &= A(u)^{-1} \circ \begin{pmatrix} \lambda_1(u) & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) \end{pmatrix} \circ A(u) \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln für Determinante und Spur folgt hieraus 1) und 2). 3) folgt aus dem Vietaschen Wurzelsatz.  $\square$

### 3.6.1 Geometrische Eigenschaften von $H, K$



1.) Das Vorzeichen der Gaußkrümmung:  $K(x)$  beschreibt die lokale Lage der Fläche bzgl.  $Tan_x M$ :

- Wir bemerken: liegt  $M$  auf der  $\ominus$ -Seite von  $Tan_x M$  so gilt  $K(x) > 0$  da  $k_n(v) < 0 \forall v \in T_x M$

$$\Rightarrow \lambda_1(x), \lambda_2(x) < 0$$

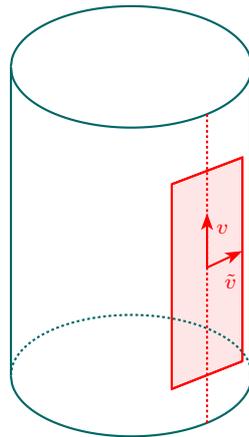
$$\Rightarrow K(x) > 0$$

Es gilt:

$$K(x) > 0 \Leftrightarrow M \text{ liegt in einer Umgebung von } x \in M \text{ vollständig in } \oplus \text{ oder } \ominus\text{-Seite von } Tan_x M$$

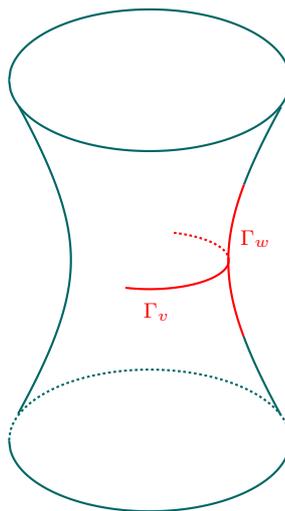
$x \in M$  mit  $K(x) > 0$  heißt elliptischer Punkt

- Zylinder  $\rightsquigarrow K(x) = 0 \forall x \in M$ , denn  $k_n(v) = 0$ ,  $k_n(\tilde{v}) < 0 \forall \tilde{v}$ . Folglich gilt  $K(x) = 0$ .



$x \in M$  mit  $K(x) = 0$  heißt parabolischer Punkt.

- Hyperboloid  $\rightsquigarrow$  Es existiert  $v$  mit  $k_n(v) < 0$  und  $w$  mit  $k_n(w) > 0$ . Also gilt für die Hauptkrümmungen  $\lambda_1(x) < 0$  und  $\lambda_2(x) > 0$  und damit  $K(x) < 0$ .



$x \in M$  mit  $K(x) < 0$  heißt hyperbolischer Punkt.

## 2.) Zur mittleren Krümmung

**Definition.** Eine Fläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  heißt Minimalfläche, wenn  $H \equiv 0$

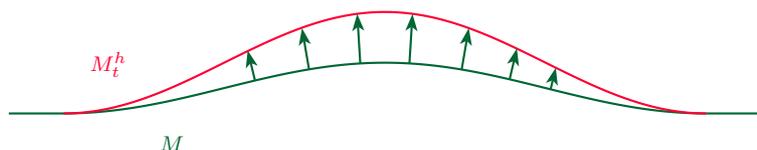
Beispiel: Katenoid, Wendelfläche

Bemerkung: Solche Flächen lassen sich lokal vollständig beschreiben durch holomorphe und meromorphe Funktionen (Weierstraß-Darstellung)

Bemerkung: Minimalflächen sind diejenigen Flächen, die kritische Punkte des Flächenfunktional sind:

**Definition.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  Fläche mit gaußscher Normalenabbildung  $n : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Eine kompakte Variation von  $M$  ist eine Schar von Flächen  $\{M_t^h\}_{|t|<\varepsilon}$ , wobei  $h \in C^\infty(M)$  mit  $\text{supp}(h)$  kompakt ist, und  $M_t^h$  gegeben ist durch

$$M_t^h := \{x + th(x)n(x) | x \in M\}.$$



Dann gilt für das Flächenfunktional *Area*:

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Area}(M_t^h)}_{=: A_h(t)} &= \int_M (1 - 2th \cdot H + \mathcal{O}(t^2)) \underbrace{dM}_{\text{Volumenform}} \\ \Rightarrow A'_h(0) &= -2 \int_M h \cdot H dM \\ \Rightarrow A'_h(0) &= 0 \quad \forall h \in C^\infty(M) \Leftrightarrow H \equiv 0 \end{aligned}$$

### 3.) Zur Gauß-Krümmung

Die Gauß-Krümmung ist eine Isometrie-Invariante. Dies gilt nicht für  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  oder  $H$ .

Beispiel: Zylinder  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, z \in (a, b)\}$ . Betrachte

$$\begin{aligned} Z \setminus L &\xrightarrow{\phi} E \\ (\cos \theta, \sin \theta, z) &\mapsto (\theta, z) \end{aligned}$$

$\phi$  ist eine Isometrie, doch  $H$  ist nicht invariant unter  $\phi$ . Im Gegensatz dazu ist  $K$  eine Größe der inneren Geometrie der Fläche (hängt nur von  $g = I_x$  ab, nicht von der Einbettung im Raum, d.h. von  $II_x$ ). Dies ist die Aussage des folgenden Satzes:

**Satz 3.36.** (*Theorema egregium von C.F. Gauß*)

Seien  $M, N \subset \mathbb{R}^3$  Flächen mit induzierter Riemannscher Metrik und  $F : M \rightarrow N$  eine Isometrie zwischen diesen Flächen. Dann gilt

$$K^N(F(x)) = K^M(x) \quad \forall x \in M.$$

*Beweis.* Dazu muss man  $K$  lediglich durch die induzierte Metrik  $g$  ausdrücken können. Wir geben eine Formel an, die  $K^M$  nur mittels der Metrik  $g$  ausdrückt. Wir betrachten dazu den LC-Zusammenhang von  $M$  für UMF:

$$\begin{aligned}\nabla_X^M &= \text{proj}_{TM} X(Y) \\ &= X(Y) - \langle X(Y), n \rangle n \\ &= X(Y) - \underbrace{X(\langle Y, n \rangle)}_{=0} n + \underbrace{\langle Y, dn(X) \rangle}_{II(Y,X)} n \\ \Rightarrow \nabla_X^M Y &= X(Y) - II(X, Y)n \\ \nabla_Z^M \nabla_X^M Y &= Z(X(Y) - II(X, Y)n) - II(Z, \nabla_X^M Y)n \\ &= Z(X(Y)) - II(X, Y)dn(Z) + (*)n\end{aligned}$$

Wir betrachten das  $(3, 1)$  Tensorfeld:

$$\begin{aligned}R(Z, X)Y &= \nabla_Z^M \nabla_X^M Y - \nabla_X^M \nabla_Z^M Y - \nabla_{[Z, X]}^M Y \\ &= Z(X(Y)) - II(X, Y)dn(Z) - X(Z(Y)) \\ &\quad + II(Z, Y)dn(X) - [Z, X](Y) + II([X, Z], Y)n + (*)n \\ \Rightarrow R(Z, X)Y &= -II(X, Y)dn(Z) + II(Z, Y)dn(X) + (*)n \\ \Rightarrow g(R(Z, X)Y, W) &= II(X, Y) \underbrace{g(-dn(Z), W)}_{=II(Z, W)} - II(Z, Y) \underbrace{g(-dn(X), W)}_{II(X, W)} \\ \Rightarrow \underbrace{g(R(Z, X)Y, Z)}_{\text{hängt nur von } g=I \text{ ab}} &= \underbrace{II(X, Y)II(Z, W) - II(Z, W)II(X, W)}_{\text{hängt nur von } II \text{ ab}} (*)\end{aligned}$$

Sei nun  $x \in M$  und  $v_1, v_2$  ONB aus Hauptkrümmungsvektoren von  $M$  in  $x \in M$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}g_x(R_x(v_1, v_2)v_2, v_1) &= II_x(v_2, v_2)II_x(v_1, v_1) - II_x(v_1, v_2)II_x(v_2, v_1) \\ &= \lambda_2(x)\lambda_1(x) = K(x)\end{aligned}$$

Da  $(*)$  schiefssymmetrisch in  $(Z, X)$  und schiefssymmetrisch in  $(Y, W)$  ist, gilt Folgendes: Für eine beliebige ONB  $a_1, a_2$  in  $T_x M, g_x$  gilt dann:

$$g_x(R_x(a_1, a_2)a_2, a_1) = K(x)$$

d.h.  $K(x)$  kann allein durch  $g$  ausgedrückt werden.

Wir zeigen nun die Aussage  $K^M(x) = K^N(F(x)) \forall x \in M$ . Sei dazu  $F : M \rightarrow N$  eine Isometrie zwischen Flächen mit induzierten Riemannschen Metriken. Dann gehen ONB unter  $dF_x$  in ONB über. Das heißt für eine beliebige ONB  $(a_1, a_2)$  in  $T_x M$  ist  $(dF_x(a_1), dF_x(a_2))$  eine ONB in  $T_{F(x)} N$ .

Wenn  $F : M \rightarrow N$  eine Isometrie ist, so gilt für den LC-Zsh.:

$$dF(\nabla_X^M Y) = \nabla_{dF(X)}^N dF(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (\text{Übungsaufgabe})$$

Und damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & g^N(R^N(dF(X), dF(Y))dF(Z), dF(W)) \\ = & g^N(\nabla_{dF(X)}^N \underbrace{\nabla_{dF(Y)}^N dF(Z)}_{=dF(\nabla_Y^M Z)} - \nabla_{dF(Y)}^N \nabla_{dF(X)}^N dF(Z), dF(W)) \\ & + g^N(-\nabla_{\underbrace{[dF(X), dF(Y)]}_{dF([X, Y])}}^N dF(Z), dF(W)) \\ = & g^N(\underbrace{dF(\nabla_X^M \nabla_Y^M Z - \nabla_Y^M \nabla_X^M Z - \nabla_{[X, Y]}^M Z)}_{R^M(X, Y)Z}, dF(W)) \\ = & (F^* g^N)(R^M(X, Y)Z, W) \\ = & g^M(R^M(X, Y)Z, W) \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M) \\ \Rightarrow K^N(F(x)) = & g_{F(x)}^N(R_{F(x)}^N(dF_x(a_1), dF_x(a_2))dF_x(a_2), dF_x(a_1)) \\ = & g_x^M(R_x^M(a_1, a_2)a_2, a_1) \\ = & K^M(x) \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

□

### 3.7 Krümmungen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den Krümmungsgrößen einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit befassen. Dazu führen wir im ersten Teilabschnitt die grundlegenden Definitionen ein. Danach wollen wir uns mit zwei speziellen Klassen von Mannigfaltigkeiten beschäftigen, den Mannigfaltigkeiten mit konstanter *Schnittkrümmung* und danach mit den sogenannten *Einstein-Mannigfaltigkeiten*. Am Ende dieses Teilabschnitts wollen wir dann eine kleine Einführung in das mathematische Modell der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) geben.

### 3.7.1 Definitionen

**Definition.** Sei  $M^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit kov. Ableitung  $\nabla$ .

- Das (2,1)-Tensorfeld  $T^\nabla \in \mathfrak{X}^{(2,1)}(M)$

$$T^\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

heißt Torsion von  $\nabla$ .

- Das (3,1)-Tensorfeld  $\mathcal{R}^\nabla \in \mathfrak{X}^{(3,1)}(M)$

$$\mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

heißt Krümmung von  $\nabla$ .

- Die Abbildung  $\mathcal{R}^\nabla(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  heißt Krümmungsendomorphismus.

**Bemerkungen:**

1. Die tensoriellen Eigenschaften rechnet man leicht nach (aus jeder Komponente kann man Funktionen herausziehen).
2.  $T^\nabla$  und  $\mathcal{R}^\nabla(\cdot, \cdot)Z$  sind schiefsymmetrisch.
3. Ist  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit, dann ist  $T^\nabla = 0$  (torsionsfrei).

**Definition.** Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche MF,  $\nabla$  Levi-Civita-Zsh. Der Krümmungstensor von  $(M^n, g)$  ist das (4,0)-Tensorfeld  $\mathcal{R} \in \mathfrak{X}^{(4,0)}(M)$ :

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) := g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W).$$

Später werden wir feststellen, dass  $\mathcal{R}$  ein Maß für die Abweichung von der Geometrie des  $\mathbb{R}^n$  ist.

**Satz 3.37.** *Der Krümmungstensor einer semi-Riem. MF hat folgende Eigenschaften:*

1.  $\mathcal{R}$  ist schiefsymmetrisch in der 1. und 2. und in der 3. und 4. Komponente:

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{R}(Y, X, Z, W) = -\mathcal{R}(X, Y, W, Z)$$

2.  $\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = \mathcal{R}(Z, W, X, Y)$

3. Es gilt die 1. Bianchi-Identität:

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) + \mathcal{R}(Y, Z, X, W) + \mathcal{R}(Z, X, Y, W) = 0$$

4. und die 2. Bianchi-Identität:

$$(\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z, U, V) + (\nabla_Y \mathcal{R})(Z, X, U, V) + (\nabla_Z \mathcal{R})(X, Y, U, V) = 0.$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Die Schiefsymmetrie in der 1. und 2. Komponente ergibt sich aus der Def., da  $\mathcal{R}^\nabla(X, Y)$  schiefsymmetrisch ist.

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = -\mathcal{R}(X, Y, W, Z) \iff \forall Z \in \mathfrak{X}(M) \quad \mathcal{R}(X, Y, Z, Z) = 0$$

$$(\text{da } b(z, w) + b(w, z) = \frac{1}{2}(b(z+w, z+w) - b(z-w, z-w)).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &\stackrel{\nabla \text{ metr.}}{=} X(g(\nabla_Y Z, Z)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y(g(\nabla_X Z, Z)) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\ &\quad - [X, Y](g(Z, Z)) + g(Z, \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= XY(g(Z, Z)) - X(g(Z, \nabla_Y Z) - YX(g(Z, Z))) \\ &\quad + Y(g(Z, \nabla_X Z)) - [X, Y](g(Z, Z)) + g(Z, \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= -g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y Z) \\ &\quad + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X Z) + g(Z, \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= -\mathcal{R}(X, Y, Z, Z) \quad (\Rightarrow 1). \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = \mathcal{R}(Z, W, X, Y) \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ : Wir benutzen Schiefsymmetrie und 1. Bianchi-Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y, Z, W) + \mathcal{R}(Y, Z, X, W) + \mathcal{R}(Z, X, Y, W) &= 0 \\ \mathcal{R}(Y, Z, W, X) + \mathcal{R}(Z, W, Y, X) + \mathcal{R}(W, Y, Z, X) &= 0 \\ \mathcal{R}(Z, W, X, Y) + \mathcal{R}(W, X, Z, Y) + \mathcal{R}(X, Z, W, Y) &= 0 \\ \mathcal{R}(W, X, Y, Z) + \mathcal{R}(X, Y, W, Z) + \mathcal{R}(Y, W, X, Z) &= 0. \end{aligned}$$

Summiert man diese Gleichungen, dann folgt

$$2(\mathcal{R}(X, Z, W, Y) + \mathcal{R}(W, Y, Z, X)) = 0 \implies \mathcal{R}(X, Z, W, Y) = \mathcal{R}(W, Y, X, Z).$$

3. 1. *Bianchi-Identität*:

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z + \mathcal{R}^\nabla(Y, Z)X + \mathcal{R}^\nabla(Z, X)Y \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &\stackrel{T^\nabla=0}{=} \nabla_X([Y, Z]) - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Y - Y[Z, X] - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &\quad + \nabla_Z([X, Y]) - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\stackrel{T^\nabla=0}{=} [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Jacobi-Identität für den Kommutator von VF  $\nearrow$  Satz 2.13, Kapitel 2).

4. 2. *Bianchi-Identität*: ÜA. (direkte Rechnung, Tipp:  $x$ -synchrone VF benutzen)

□

Sei nun  $(M^n, g)$  eine semi-Riem. MF,  $x \in M$  und  $v, w \in T_x M$  linear unabhängig, dann definieren wir

$$\begin{aligned} Q_x(v, w) &:= g_x(v, v)g_x(w, w) - g_x(v, w)^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} g_x(v, v) & g_x(v, w) \\ g_x(w, v) & g_x(w, w) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

1. Sei  $\nu = (v_1, v_2), \omega = (w_1, w_2)$  eine Basis eines 2-dim UR  $E \subset T_x M$  und  $M = \{\mathcal{M}\}_{\nu, \omega}$ , dann ist

$$(*) \quad Q_x(v_1, v_2) = \text{Det}(M)^2 Q_x(w_1, w_2).$$

(Traformations-Formel für BLF)

2.  $E \subset T_x M$  ist bzgl.  $g_x$  nicht ausgearteter 2-dim UR  $\iff Q_x(v_1, v_2) \neq 0 \quad \forall$  Basen  $(v_1, v_2)$  von  $E$ .

**Definition.** Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche MF,  $\mathcal{R} \in \mathfrak{X}^{(k,0)}(M)$  Krümmungstensor von  $(M, g)$ ,  $x \in M$  und  $E \subset T_x M$  ein nicht ausgearteter, 2-dim. UR mit Basis  $\{v, w\}$ . Dann heißt

$$K_E(x) := \frac{\mathcal{R}_x(v, w, w, v)}{Q_x(v, w)}$$

Schnittkrümmung von  $(M, g)$  in  $x \in M$  in Richtung  $E \subset T_x M$ .

**Bemerkungen:**

1.  $K_E(x)$  ist korrekt definiert (d.h. unabhängig von Wahl der Basis  $(v, w)$  von  $E$ )  
Dies folgt aus (\*) und da  $\mathcal{R}$  in (1,2) und (3,4) schiefsymmetrisch ist, d.h. Zähler und Nenner transformieren sich mit  $\det(M^2)$ .
2. Ist  $(e_1, e_2)$  ONB von  $(E, g_x)$  und  $g_x(e_i, e_j) = \delta_{ij}\epsilon_i = \pm 1$ , dann ist

$$K_E(x) = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1).$$

**Satz 3.38.** Für ein  $p \in M$  ist  $R := \mathcal{R}_p$  durch die  $K_E(p)$  für alle 2-dimensionalen Unterräume  $E \subset T_p M := V$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Betrachte  $L := \hat{R} - R$ . Es ist  $L$  dann auch ein in (1,2) und (3,4) schiefsymmetrischer (4,0)-Tensor, der die 1. Bianchi-Identität und für alle linear unabhängigen  $x, y \in V$  mit nicht ausgeartetem  $\text{span}(x, y)$   $L(x, y, y, x) = 0$  erfüllt. Zu zeigen ist dann  $L = 0$ .

1. Behauptung:  $\forall x, y \in V \quad L(x, y, y, x) = 0$

- a) Sind  $x$  und  $y$  linear abhängig, d.h. es gibt  $z \in V, a, e \in \mathbb{R}$  mit  $x = az, y = ez$ , so folgt aus der Schiefsymmetrie  $L(x, y, y, x) = aeL(x, y, z, z) = 0$ .
- b) Sind  $x$  und  $y$  linear unabhängig, aber  $\text{span}(x, y) := E$  ausgeartet, so gibt es linear unabhängige  $v, w \in E$  mit  $g(v, w) = g(w, w) = 0$  und weil  $R(x, y, y, x) = \det(M)^2 R(v, w, w, v)$  für die Übergangsmatrix  $M$ , genügt es,  $R(v, w, w, v) = 0$  nachzuweisen.

Dazu soll die Stetigkeit von  $L$  benutzt werden. Behauptung: Es gibt eine Folge  $(v_i) \rightarrow v$ , sodass  $\text{span}(v_i, w)$  für alle  $i$  *nicht* ausgeartet ist. Dies ist gleichbedeutend mit  $0 \neq Q_x(v_i, w) = g_x(v_i, w)^2$ . Gibt es eine solche Folge, folgt mit der Stetigkeit sofort  $L(v, w, w, v) = \lim_{i \rightarrow \infty} L(v_i, w, w, v_i) = 0$ .

Gäbe es *keine* solche Folge, so hätte  $v$  eine Umgebung  $U$ , sodass  $\forall f \in U \ g_x(f, w) = 0$ . Damit hätte  $0$  eine Umgebung  $U - w$ , in der  $\forall f - w \in U - w \ g_x(f - w, w) = g_x(f, w) - g_x(w, w) = 0$  gilt, woraus per Linearität  $g(\cdot, w) = 0$  folgt, was der Nichtausgeartetheit von  $g$  oder der linearen Unabhängigkeit von  $v$  und  $w$  widerspräche.

2. Aus 1. folgt  $\forall x, y, z \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= L(x + z, y, y, x + z) \\ &= L(x, y, y, x) + L(x, y, y, z) + L(z, y, y, x) + L(z, y, y, z) \\ &= L(x, y, y, z) + L(z, y, y, x) \\ &= 2L(x, y, y, z). \end{aligned}$$

3. Aus 2. folgt  $\forall x_1, x_2, x_3, z \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= L(x_1, x_2 + x_3, x_2 + x_3, z) \\ &= L(x_1, x_2, x_2, z) + L(x_1, x_2, x_3, z) + L(x_1, x_3, x_2, z) + L(x_1, x_3, x_3, z) \\ &= L(x_1, x_2, x_3, z) + L(x_1, x_3, x_2, z). \end{aligned}$$

Um die 1. Bianchi-Identität anwenden zu können, formen wir mithilfe der Schiefsymmetrie die Terme so um, dass im Argument von  $L$  das  $z$  immer an letzter Stelle steht und die Indizes der  $x_i$  ausschließlich gerade Permutationen bilden. Die eben gewonnene Gleichung wird also noch umgeformt zu

$$L(x_1, x_2, x_3, z) - L(x_3, x_1, x_2, z) = 0. \quad (1)$$

Sei hier  $L_1 := L(x_1, x_2, x_3, z), L_2 := L(x_2, x_3, x_1, z), L_3 := L(x_3, x_1, x_2, z)$ . Durch zyklisches Vertauschen von  $x_1, x_2, x_3$  erhält man analog zum eben gewonnenen (1):  $L_1 - L_3 = 0$  dann (2) :  $L_2 - L_1 = 0$  und die Bianchi-Identität lautet (3) :  $L_1 + L_2 + L_3 = 0$ .

$$(1) - (2) + (3) = 3L(x_1, x_2, x_3, z) = 0.$$

□

Sei  $F : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  eine Isometrie zwischen semi-Riem. MF,  $\nabla, \tilde{\nabla}$  Levi-Civita-Zsh. von  $(M, g)$  bzw.  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  und  $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$  die Krümmungstensoren, dann gilt:

1.  $\tilde{\nabla}_{F_*X} F_*Y = F_*(\nabla_X Y) \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
2.  $F^*\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$
3. Für die Schnittkrümmungen auf  $M$  bzw.  $\tilde{M}$  gilt:  $E \subset T_x M$  nicht ausgeartet 2-dim. gilt

$$\tilde{K}_{dF(E)}(F(x)) = K_E(x).$$

Den Beweis überlassen wir als ÜA.

### 3.7.2 Räume mit konstanter Schnittkrümmung

In der Riem. Geometrie spielen MF mit konstanter Schnittkrümmung eine besondere Rolle.

**Definition.** Eine semi-Riem. MF  $(M^n, g)$  heißt MF konstanter Schnittkrümmung  $K_0 \in \mathbb{R} \iff$

$$\begin{aligned} K_E(x) &\equiv K_0 & \forall x \in M \\ & & \forall E \subset T_x M \text{ nicht ausgeartet, } \dim E = 2. \end{aligned}$$

**Satz 3.39.** Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche MF. Dann gilt

$$(M, g) \text{ hat konst. Schnittkrümmung } K_0 \iff \mathcal{R}(X, Y, Z, W) = K_0 (g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)).$$

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ): Sei  $E \subset T_x M$  nicht ausgeartet mit  $\dim E = 2$  und  $(e_1, e_2)$  ONB von  $E$  mit  $g(e_i, e_i) = \epsilon_i = \pm 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} K_E(x) &= \epsilon_1 \epsilon_2 \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1) \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{=} \epsilon_1 \epsilon_2 K_0 = K_0. \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ): Sei  $K_E(x) \equiv K_0 \quad \forall x \in M, E^2 \subset T_x M$  nicht ausgeartet. Wir betrachten den (4,0)-Tensor

$$\hat{R}(X, Y, Z, W) = K_0 (g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)).$$

Dann ist  $\hat{R}_x \in S^2(\lambda^2 T_x^* M) \quad \forall x \in M$  und erfüllt die 1. Bianchi-Identität (Nachrechnen). Für die zu  $\hat{R}$  gehörende Schnittkrümmung gilt

$$\begin{aligned} \hat{K}_E(x) &= \epsilon_1 \epsilon_2 \hat{R}(e_1, e_2, e_2, e_1) \quad (e_1, e_2) \text{ ONB in } E \\ &= K_0. \end{aligned}$$

Satz 3.38 liefert dann  $R = \hat{R}$ . □

**Beispiel 3.40.** *Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung*

### 1. Der $\mathbb{R}^n$ mit Euklidischem Skalarprodukt

*Behauptung:*  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$  hat konst. Schnittkrümmung  $K_0 = 0$ .

*Beweis.* Nach Satz 3.39 ist  $\mathcal{R} = 0$  zu zeigen. Der Levi-Civita-Zsh. ist hier  $\nabla_X Y = X(Y)$  und für den Krümmungsendomorphismus folgt dann

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= X(Y(Z)) - Y(X(Z)) - [X, Y](Z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann  $\mathcal{R} \equiv 0$  bzw.  $K_0 = 0$ . □

### 2. Die Sphäre $S_r^n$ mit induzierter Metrik

Wir betrachten die Sphäre  $S_r^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$S_r^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = r^2\}$$

mit induzierter Riem. Metrik  $g$ .

*Behauptung:*  $(S_r^n, g)$  hat konstante Schnittkrümmung  $K_0 = \frac{1}{r^2}$ .

*Beweis.* Für den Levi-Civita-Zsh. ergibt sich aus Satz 3.22:

$$\nabla_X Y = \text{proj}_{T_x S_r^n} X(Y).$$

Da  $T_x S_r^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, x \rangle = 0\}$ , ist

$$\begin{aligned} M: S_r^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} && \text{Einheitsnormalenfeld von } S_r^n \\ x &\longmapsto \frac{1}{r} \cdot x. \end{aligned}$$

Sei  $Z \in \mathbb{R}^{n+1}$ , dann folgt

$$\text{proj}_{T_x S_r^n} Z = Z - \underbrace{\langle Z, n(x) \rangle n(x)}_{\text{Normalenkomp. von } Z}$$

bzw.

$$\nabla_X Y = X(Y) - \langle X(Y), n \rangle n \quad X, Y \in \mathfrak{X}(S_r^n).$$

Aus der Produktregel für  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle X(Y), n \rangle &= X \underbrace{\langle Y, n \rangle}_{Y \perp n} - \langle Y, \underbrace{X(n)}_{dn(x) = \frac{1}{r} X} \rangle \\ &= -\frac{1}{r} \langle Y, X \rangle. \end{aligned}$$

Für den LC-Zsh. auf  $S_r^n$  gilt also

$$\nabla_X Y = X(Y) + \frac{1}{r} \langle X, Y \rangle n \quad X, Y \in \mathfrak{X}(S_r^n)$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= X(\nabla_Y Z) - \frac{1}{r} \langle X, \nabla_Y Z \rangle n \\
&\quad - Y(\nabla_X Z) - \frac{1}{r} \langle Y, \nabla_X Z \rangle n \\
&\quad - [X, Y](Z) - \frac{1}{r} \langle [X, Y], Z \rangle n \\
&= X(Y(Z)) + \frac{1}{r} X(\langle Y, Z \rangle n) + \frac{1}{r} \langle X, \nabla_Y Z \rangle n \\
&\quad - Y(X(Z)) - \frac{1}{r} Y(\langle X, Z \rangle n) - \frac{1}{r} \langle Y, \nabla_X Z \rangle n \\
&\quad - [X, Y](Z) - \frac{1}{r} \langle \nabla_X Y, Z \rangle n + \frac{1}{r} \langle \nabla_Y X, Z \rangle n \\
&= \frac{1}{r} \{ \langle Y, Z \rangle X(n) - \langle X, Z \rangle Y(n) \} \\
&= \frac{1}{r^2} \{ \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y \}.
\end{aligned}$$

Für den Krümmungstensor ergibt sich dann:

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, W) = \frac{1}{r^2} \{ \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle \}.$$

Aus Satz 3.39 folgt nun  $K_0 \equiv \frac{1}{r^2}$ . □

### 3. Der obere Halbraum mit hyperbolischer Metrik

Wir betrachten den oberen Halbraum

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

mit hyperbolischer Metrik

$$g_r := \frac{r^2}{x_n^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2) \quad r > 0$$

und setzen

$$H_r^n := (H^n, g_r).$$

*Behauptung:* Die RMF  $(H_r^n, g_r)$  hat konst. Schnittkrümmung  $-\frac{1}{r^2}$ .

*Beweis.* Wir berechnen zunächst den Krümmungstensor ganz allgemein in lokalen Koordinaten bzgl. einer Karte: Sei  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  eine zulässige Karte,  $\{\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j} \mid j = 1 \dots n\}$  deren kanonische Basis und  $\{g_{ij}\}$  die Koeffizientenmatrix der Metrik mit Inverser  $\{g^{ij}\}$ . Für die Christoffel-Symbole von  $(M, g)$  gilt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n g^{k\ell} (\partial_i(g_{j\ell}) + \partial_j(g_{i\ell}) - \partial_\ell(g_{ij})),$$

für den Krümmungsendomorphismus

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^\nabla(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k - \underbrace{\nabla_{[\partial_i, \partial_j]}\partial_k}_0 \\ &= \partial_i(\Gamma_{jk}^p)\partial_p + \Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^r\partial_r \\ &\quad - \partial_j(\Gamma_{ik}^p)\partial_p - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^r\partial_r.\end{aligned}$$

und für den Krümmungstensor

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= R_{ijkl}dx_i \otimes dx_j \otimes dx_k \otimes dx_\ell, \text{ wobei} \\ (*) \quad R_{ijkl} &= \mathcal{R}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_\ell) \\ &= \left( \partial_i(\Gamma_{jk}^r) - \partial_j(\Gamma_{ik}^r) + \Gamma_{jk}^p\Gamma_{ip}^r - \Gamma_{ik}^p\Gamma_{jp}^r \right) g_{r\ell}.\end{aligned}$$

(In allen Fällen gilt die Summenkonvention: Über gleiche Indizes wird summiert.)  
Nun leiten wir daraus die Formel für den Krümmungstensor für  $H_r^n$  ab: Für  $H_r^n$  betrachten wir die Karte  $(H_r^n, \varphi(x) = Id = (x_1, \dots, x_n))$ . Dann ist  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \equiv e_j$  und

$$\{g_{ij}(x)\} = \frac{r^2}{x_n^2}E \quad \text{bzw.} \quad \{g^{ij}(x)\} = \frac{x_n^2}{r^2}E.$$

Für die Christoffel-Symbole folgt

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \frac{x_n^2}{r^2} (\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ik}) - \partial_k(g_{ij})) \implies \Gamma_{ij}^k = 0,$$

außer für die Indizes:

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii}^n &= \frac{1}{x_n} \quad i < n \\ \Gamma_{nn}^n &= -\frac{1}{x_n} = \Gamma_{in}^i = \Gamma_{ni}^i.\end{aligned}$$

Setzt man dies in (\*) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= -\frac{r^2}{x_n^4} (\partial_{i\ell}\partial_{jk} - \partial_{ik}\partial_{j\ell}) \\ &= -\frac{1}{r^2} (g_{H_r^n}(\partial_i, \partial_\ell)g_{H_r^n}(\partial_j, \partial_k) - g_{H_r^n}(\partial_i, \partial_k)g_{H_r^n}(\partial_j, \partial_\ell)).\end{aligned}$$

Aus Satz 3.39 folgt nun wieder  $K_0 \equiv -\frac{1}{r^2}$ . □

**Information.** Für Modellräume mit Riemannscher Metrik gilt:<sup>5</sup>

<sup>5</sup>siehe Kapitel 4 Satz 4.11 und J.A. Wolf: Spaces of constant curvature

- Sei  $(M^n, g)$  zsh., *vollständige* Riem. MF mit konst. Schnittkrümmung  $K_0$ , dann ist  $(M^n, g)$  isometrisch zu einer der folgenden Riem. MF

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n|_{\Gamma} & \text{ für } K_0 = 0 \\ S_r^n|_{\Gamma} & \text{ für } K_0 = \frac{1}{r^2} > 0 \\ H_r^n|_{\Gamma} & \text{ für } K_0 = -\frac{1}{r^2} < 0 \end{aligned}$$

wobei  $\Gamma$  eine diskrete UG der Isometriegruppe von  $\mathbb{R}^n, S_r^n$  bzw.  $H_r^n$  ist, die eigentlich diskontinuierlich wirkt.

- Ist die universelle Riem. Überlagerung von  $(M^n, g)$  gleich  $\mathbb{R}^n, S_r^n$  bzw.  $H_r^n$ , dann ist  $(M^n, g)$  lokal isometrisch zu  $\mathbb{R}^n, S_r^n$  bzw.  $H_r^n$ .

Analoge Eigenschaften gelten auch im pseudo-Riem. Fall für Modellräume konstanter Schnittkrümmung für Metriken vom Index  $k$ :<sup>6</sup>

1. Für  $\mathbb{R}^{n,k} = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_{n,k} = -dx_1^2 - \dots - dx_k^2 + dx_{k+1}^2 + \dots + dx_n^2)$  ist  $\mathcal{R} = 0$  und damit auch

$$K_0 = 0.$$

2. Sei  $S_k^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1,k} \mid \langle x, x \rangle_{n+1,k} = r^2\}$  mit der durch  $\langle, \rangle_{n+1,k}$  induzierten Metrik die 'Pseudosphäre vom Radius  $r$ '.

$S_k^n(r)$  hat Dimension  $n$ , Index  $k$  und konstante Schnittkrümmung

$$K_0 = \frac{1}{r^2}.$$

( $S_k^n(r)$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}$ .)

3. Sei  $H_k^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1,k+1} \mid \langle x, x \rangle_{n+1,k+1} = -r^2\}$  mit der durch  $\langle, \rangle_{n+1,k+1}$  induzierten Metrik "Pseudohyperbolischer Raum".

$H_k^n(r)$  hat Dimension  $n$ , Index  $k$  und konstante Schnittkrümmung

$$K_0 = -\frac{1}{r^2}.$$

( $H_k^n(r)$  ist diffeomorph  $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .)

Es gilt allgemeiner: Ist  $(M^{n,k}, g)$  zsh. *geodätisch vollständige*<sup>7</sup> pseudo-Riem. MF vom Index  $k$  ( $1 \leq k \leq n-1$ ) mit konst. Schnittkrümmung  $K_0$ , so ist  $(M^{n,k}, g)$  isometrisch zu

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n,k}|_{\Gamma} & \text{ für } K_0 = 0 \\ \widetilde{S}_k^n(r)|_{\Gamma} & \text{ für } K_0 = \frac{1}{r^2} > 0 \\ \widetilde{H}_k^n(r)|_{\Gamma} & \text{ für } K_0 = -\frac{1}{r^2} < 0 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>siehe O'Neill: Semi-Riemannsche Geometrie, S. 110 ff

<sup>7</sup>siehe Definition auf Seite 202

wobei

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_k^n(r) &= \text{univ. Überlagerung von } S_k^n(r) \quad k = n - 1 \\ \widetilde{H}_k^n(r) &= \text{univ. Überlagerung von } H_k^n(r) \quad k = n - 1\end{aligned}$$

und  $\Gamma$  eine diskrete UG der Isometriegruppe der Totalräume, die eigentlich diskontinuierlich wirkt.

Insbesondere gilt:

- Seien  $(M, g), (\tilde{M}, \tilde{g})$  semi-Riem. MF, vollständig, gleiche Dimension und gleicher Index. Wenn  $(M, g)$  und  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  gleiche konst. Schnittkrümmung haben, so sind sie lokal isometrisch.<sup>8</sup>
- $\mathcal{R} \equiv 0$  für vollst. zsh. semi-Riem. MF  $(M, g) \iff (M, g)$  lokal isometrisch zu  $\mathbb{R}^{n,k}$ .

**Definition.**  $(M^n, g)$  semi-Riem. MF mit Krümmungstensor  $\mathcal{R}$  und ONB  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $T_x M$  in jedem Punkt  $x \in M$ . Das  $(2,0)$ -Tensorfeld  $\text{Ric} \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$

$$\begin{aligned}\text{Ric}(X, Y)(x) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathcal{R}_x(X(x), e_i, e_i, Y(x)) \text{ mit } \epsilon_i = g_x(e_i, e_i) \\ &= \text{Tr}_{g_x}(\mathcal{R}^\nabla(\cdot, X(x))Y(x))\end{aligned}$$

heißt Ricci-Krümmung von  $(M, g)$ .

Die Funktion  $R \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}R(x) &= \sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j \mathcal{R}_x(e_i, e_j, e_j, e_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \epsilon_j \text{Ric}_x(e_j, e_j)\end{aligned}$$

heißt Skalarkrümmung von  $(M, g)$ .

**Bemerkung:**

- Beide Krümmungen sind korrekt definiert, dh. unabhängig von Wahl der ONB.
- 'Ric' ist ein symmetrischer  $(2,0)$ -Tensor.
- $R(x) = 2 \sum_{i < j} K_{E_{ij}}(x)$ , dabei sei  $K_{E_{ij}}$  die Schnittkrümmung auf  $E_{ij} = \text{span}(e_i, e_j) \subset T_x M$ .

**Satz 3.41.** Sei  $(M^n, g)$   $n$ -dim. semi-Riem. MF konst. Schnittkrümmung  $K_0$ , so gilt

$$\begin{aligned}\text{Ric} &= (n-1)K_0 \cdot g \\ R &= n(n-1) \cdot K_0.\end{aligned}$$

<sup>8</sup>siehe Folgerung von Satz 4.7 aus Kapitel 4

*Beweis.* Aus Satz 3.39 folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x(v, e_i, e_i, w) &= K_0(g(v, w)g(e_i, e_i) - g(v, e_i)g(e_i, w)) \\ &= K_0(\epsilon_i g(v, w) - g(v, e_i)g(e_i, w)),\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}\text{Ric}_x(v, w) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \mathcal{R}_x(v, e_i, e_i, w) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\epsilon_i \epsilon_i}_1 K_0 g(v, w) - K_0 \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(v, e_i)g(e_i, w) \\ &= n \cdot K_0 g(v, w) - K_0 g(v, \underbrace{\sum_{i=1}^n \epsilon_i g(e_i, w) e_i}_w) \\ &= (n-1) \cdot K_0 g(v, w)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}R(x) &= \sum_{j=1}^n \epsilon_j \text{Ric}_x(e_j, e_j) \\ &= (n-1)K_0 \sum_{j=1}^n \epsilon_j \cdot g(e_j, e_j) \\ &= (n-1) \cdot n \cdot K_0.\end{aligned}$$

□

### 3.7.3 Einstein-Mannigfaltigkeiten

**Definition.** Eine semi-Riemannsche MF  $(M, g)$  heißt Einstein-MF:  $\iff$  es existiert Funktion  $f \in C^\infty(M)$  so dass  $\text{Ric} = f \cdot g$ .

**Beispiel 3.42.** *Einstein-Mannigfaltigkeiten*

- Jede MF konst. Schnittkrümmung ist Einstein (Satz 3.41).
- Jede 2-dim. MF ist Einstein:

$$T_x M = \text{span}(e_1, e_2) \quad \text{für eine ONB } (e_1, e_2).$$

Aus der Schiefsymmetrie von  $\mathcal{R}$  folgt zunächst für  $i \neq j$

$$\text{Ric}_x(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^2 \epsilon_k \mathcal{R}_x(e_i, e_k, e_k, e_j) = 0.$$

Für die anderen Möglichkeiten erhält man

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}_x(e_1, e_1) &= \epsilon_2 \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1) \\ &= \epsilon_1 \cdot K(x) \\ &= g(e_1, e_1) \cdot K(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Ric}_x(e_2, e_2) &= \epsilon_1 \mathcal{R}_x(e_2, e_1, e_1, e_2) = \epsilon_1 \mathcal{R}_x(e_1, e_2, e_2, e_1) \\ &= \epsilon_2 \cdot K(x) \\ &= g(e_2, e_2) \cdot K(x).\end{aligned}$$

wobei  $K(x) = K_{T_x M}(x)$  Schnittkrümmung von  $M^2$ . Und damit gilt  $\operatorname{Ric} = K \cdot g$ .

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Einstein-Räumen behandeln. Zunächst jedoch eine Definition:

**Definition.** Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riem. mit LC-Zsh.  $\nabla$  und  $(e_1, \dots, e_n) \in T_x M$  eine ONB.

- Für ein  $(r, 0)$ - Tensorfeld  $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$  bezeichne  $\delta B \in \mathfrak{X}^{(r-1,0)}(M)$  das Tensorfeld

$$\delta B(X_1, \dots, X_{r-1}) := - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} B)(e_i, X_1, \dots, X_{r-1})$$

$\delta B$  heißt Divergenz von  $B$ .

- Seien  $B$  und  $S$  aus  $\mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ . Wir definieren  $\langle B, S \rangle_g \in C^\infty(M)$  durch

$$\langle B, S \rangle_g(x) := \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_r} B(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \cdot S(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}).$$

$\langle B, S \rangle_g$  heißt Skalarprodukt von  $B$  und  $S$  bzw. Bündelmetrik auf  $T^{(r,0)}M$ .

- Sei  $B \in \mathfrak{X}^{(r,0)}(M)$ . Dann heißt

$$\operatorname{Tr}_g B_{(k,l)} := \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot B\left(\dots, \overset{k. \text{ Stelle}}{e_i}, \dots, \overset{l. \text{ Stelle}}{e_i}, \dots\right)$$

die Spur von  $B$  in der  $(k, l)$ -ten Komponente.

**Bemerkungen:**

1.  $\delta g = 0$ ,  $\operatorname{Tr}_g g = n$  und  $\operatorname{Tr}_g \operatorname{Ric} = R$ .
2. Ist  $B$  symmetrisch (schiefsymmetrisch), so auch  $\delta B$ .
3. Ist  $B \in \mathfrak{X}^{(2,0)}(M)$ , dann gilt  $\langle g, B \rangle_g = \operatorname{Tr}_g B$ .

4. Ist  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Vektorfeld, dann ist  $\operatorname{div}(X) \in C^\infty(M)$  mit

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

die Divergenz von  $X$ . Ist weiterhin  $\omega_X$  die zu  $X$  duale 1-Form, d.h. es gilt

$$\omega_X(Y) = g(X, Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M),$$

so folgt

$$\delta\omega_X = -\operatorname{div}(X)$$

(denn

$$\begin{aligned} \delta\omega &= -\sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \omega)(e_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n \epsilon_i (\omega(e_i) - \omega(\nabla_{e_i} e_i)) e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \epsilon_i (g(e_i, X) - g(\nabla_{e_i} e_i, X)) e_i \\ &= -\sum_{i=1}^n \epsilon_i g(e_i, \nabla_{e_i} X) \\ &= -\operatorname{div}(X) \quad ). \end{aligned}$$

5. Sei  $f \in C^\infty(M)$  und  $\operatorname{Hess} f \in S^{(2,0)}(M)$  die Hessische Form von  $f$  :

$$\operatorname{Hess} f := (\nabla_X (df))(Y) := XY(f) - df(\nabla_X Y).$$

Dann wird durch

$$\operatorname{Tr}_g(\operatorname{Hess} f) = -\delta df = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) =: -\Delta_g f$$

der Laplace-Operator von  $f$  definiert.

### Eine Methode um Tensorrechnung zu vereinfachen: $x$ -synchrone Vektorfelder

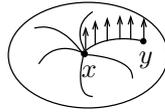
Sei  $x \in M$  fixiert. Dann existiert eine Umgebung  $U(x)$  mit den folgenden Eigenschaften:  
Zu jedem  $y \in U(x)$  existiert<sup>9</sup> eine *eindeutig* bestimmte Kurve

$$\gamma_{xy} : [0, 1] \longrightarrow U(x)$$

mit  $\gamma_{xy}(0) = x$ ,  $\gamma_{xy}(1) = y$  und  $\frac{\nabla \gamma_{xy}}{dt} \equiv 0$ . Dabei heißt  $U(x)$  Normalenumgebung von  $x$  und  $\gamma_{xy}$  radiale Geodäte.

---

<sup>9</sup>Beweis im nächsten Abschnitt



Dann kann man jedem Tangentialvektor  $v \in T_x M$  durch Parallelverschiebung von  $v$  entlang  $\gamma_{xy}$  zu einem Vektorfeld  $V$  auf  $U(x)$  fortsetzen:

$$V(y) := \mathcal{P}_{\gamma_{xy}}^{\nabla}(v) \in T_y M.$$

Ein solches VF  $V \in \mathfrak{X}(M)$  heißt synchron bzgl.  $x$  und erfüllt

$$\nabla V(x) \equiv 0$$

d.h. im Punkt  $x$  gilt  $(\nabla_Y V)(x) = 0$  für alle  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Insbesondere erfüllen alle  $x$ -synchronen Vektorfelder  $V, W$  die Eigenschaften

1.  $\nabla V(x) = 0$
2.  $[V, W](x) = 0$
3.  $(\operatorname{div} V)(x) = 0$ .

Wenn man die Gleichheit von Tensoren überprüfen will, so geht man wie folgt vor:

$$\text{Z.z.: } \forall x (B_1)_x = (B_2)_x.$$

Dazu wählen wir uns  $v_1, \dots, v_r$  aus  $T_x M$ , setzen diese  $x$ -synchron zu  $V_1, \dots, V_r$  fort und zeigen

$$\begin{aligned} (B_1)_x(v_1, \dots, v_r) &= B_1(V_1, \dots, V_r)(x) \\ &= B_2(V_1, \dots, V_r)(x) \\ &= (B_2)_x(v_1, \dots, v_r) \end{aligned}$$

und verwenden dabei die Eigenschaften 1.-3.

**Satz 3.43.** Für den Ricci-Tensor einer semi-Riem. MF.  $(M, g)$  gilt:

$$\delta Ric = -\frac{1}{2}dR.$$

Dabei ist  $R$  die Skalarkrümmung.

*Beweis.* Sei  $x \in M$ ,  $v \in T_x M$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  eine ONB von  $(T_x M, g_x)$  und  $V, (E_1, \dots, E_n)$   $x$ -synchron Fortsetzungen von  $v$  und  $(e_1, \dots, e_n)$ . Aus der 2. Bianchi-Identität für  $\mathcal{R}$  folgt dann

$$0 = (\nabla_V \mathcal{R})(E_i, E_j, E_j, E_i) + (\nabla_{E_i} \mathcal{R})(E_j, V, E_j, E_i) + (\nabla_{E_j} \mathcal{R})(V, E_i, E_j, E_i)$$

auf  $U(x)$ . Und im Punkt  $x$  gilt nun speziell wegen der  $x$ -Synchronität

$$0 = v(\mathcal{R}(E_i, E_j, E_j, E_i)) + e_i(\mathcal{R}(E_j, V, E_j, E_i)) + e_j(\mathcal{R}(V, E_i, E_j, E_i)).$$

Jetzt summieren wir dies über  $\sum_{i,j=1}^n \epsilon_i \epsilon_j$  und erhalten in  $x$ :

$$0 = v(R) - 2 \sum_{i=1}^n \epsilon_i e_i(\text{Ric}(V, E_i))$$

und daraus folgt

$$2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \text{Ric})_x(v, e_i)}_{-(\delta \text{Ric})_x(v)} = dR_x(v)$$

und damit auch die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.44.** *Es gilt:*

1. Ist  $(M^n, g)$  ein Einstein-Raum, so gilt  $\text{Ric} = \frac{R}{n} \cdot g$ .
2. Sei  $(M^n, g)$  ein zsh. Einstein-Raum der Dimension  $n \geq 3$ . Dann ist die Skalar­krümmung konstant.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Sei  $\text{Ric} = f \cdot g$  und seien  $(e_1, \dots, e_n)$  eine ONB in  $T_x M$ , dann folgt

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \text{Ric}_x(e_i, e_i) = f(x) \sum_i \epsilon_i \underbrace{g(e_i, e_i)}_{\epsilon_i} \\ &= n \cdot f(x). \end{aligned}$$

2. Sei  $\text{Ric} = f \cdot g$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \delta \text{Ric} &= \delta(f \cdot g) = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \nabla_{e_i}(f \cdot g)(e_i, \cdot) \\ &= - \sum_i \epsilon_i e_i(f) \cdot g(e_i, \cdot) + f \cdot \underbrace{(\nabla_{e_i} g)}_{=0}(e_i, \cdot) \\ &= -g \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n \epsilon_i e_i(f) e_i}_{\text{grad } f}, \cdot \right) \\ &= -df \stackrel{1.}{=} -\frac{1}{n} dR \\ &\stackrel{\text{Satz 3.43}}{=} -\frac{1}{2} dR. \end{aligned}$$

Damit ist also

$$dR \cdot \left( \frac{2-n}{2n} \right) = 0$$

und für  $n \geq 3$  die Aussage bewiesen.

□

Man erhält also folgende Inklusionen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MF. konst.} \\ \text{Schnittkrümmung} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} \text{Einstein-} \\ \text{Räume} \end{array} \right\} \stackrel{n \geq 3}{\subset} \left\{ \begin{array}{l} \text{MF. konst.} \\ \text{Skalarkrümmung} \end{array} \right\}.$$

### Beispiele für Einstein-Räume<sup>10</sup>

- $\mathbb{R}^{3,1}$  mit Schwarzschild-Metrik
- Sei  $G$  eine halbeinfache Lie-Gruppe, mit der durch die Killingform erzeugten Metrik  $g$ , dann ist  $(G, g)$  ein Einstein-Raum.
- $\mathbb{C}P^n$  mit der 'Fubini-Studi-Metrik'

### 3.7.4 Mathematische Modelle der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART)

Die Idee dieser Theorie ist die Beschreibung der Gravitation durch eine Krümmungen des Raumes. Bevor wir uns jedoch genauer mit diesem Thema beschäftigen, müssen wir noch etwas auf den sogenannten *Lagrange-Formalismus* eingehen.

#### Der Lagrange-Formalismus in der Klassischen Mechanik

Der Lagrange-Formalismus dient i.A. zur Beschreibung eines physikalischen Systems. Ähnlich wie in der Newton-Mechanik, bei der die Bewegung eines Teilchens  $q$  beschrieben wird durch dessen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{q} - F(q) = 0,$$

gibt es beim Lagrange-Formalismus Bewegungsgleichungen, deren Lösung die Bewegung eines Teilchens darstellen, das sich in diesem System mit gewissen Anfangsbedingungen bewegt.

**Definition.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Lagrange-Funktion ist eine glatte Abbildung

$$L : TM \longrightarrow \mathbb{R}.$$

<sup>10</sup> ↗ A.Besse: Einstein-manifolds, Springer 87

Das Paar  $(TM, L)$  heißt Lagrange-System mit *Konfigurationsraum*  $M$  und *Phasenraum*  $TM$ . Das Integral

$$S(\gamma) := \int_{\gamma} L(\dot{\gamma}(t)) dt \quad \text{mit } \gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

nennt man Wirkung.

Wie die Lagrange-Funktion im speziellen aussieht, hängt vom System ab.

**Beispiel 3.45.** [Natürliche Systeme]

Angenommen eine Punktmasse  $q$  bewegt sich im 'leeren' Raum  $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$ , in dem keine äußeren Kräfte wirken, dann hat die Lagrange-Funktion die Gestalt

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|^2}_{\text{kinetische Energie}}. \quad (3.3)$$

Fügt man dem System jedoch einen massiven Körper hinzu, so wirkt zusätzlich auf  $q$  ein Gravitationspotential  $U$ . Für das Lagrange-Funktional ergibt sich dann

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|^2}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{U(q(t))}_{\text{potentielle Energie}}. \quad (3.4)$$

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riem. Mannigfaltigkeit. Ein Lagrange-System  $(TM, L)$  heißt natürliches System, falls die Lagrange-Funktion die Gestalt

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

hat. Dabei ist  $U \in C^\infty(M)$  und heißt *Potential*.  $T$  hat die Form

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_q(\dot{q}, \dot{q}).$$

Wir kommen nun zu den Bewegungen in einem Lagrange-System.

**Definition.** Sei  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$  eine glatte Kurve. Unter einer Variation von  $\gamma$  verstehen wir eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma : [a, b] \times (-1, 1) &\longrightarrow M \\ (t, \varepsilon) &\longmapsto \Gamma(t, \varepsilon) =: \gamma_\varepsilon(t) \end{aligned}$$

mit  $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ ,  $\Gamma(a, \varepsilon) = \gamma(a)$  und  $\Gamma(b, \varepsilon) = \gamma(b)$  für alle  $\varepsilon \in (-1, 1)$ .

Sei  $(TM, L)$  ein Lagrange-System. Eine Bewegung in  $(TM, L)$  ist eine Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ , für die die Wirkung

$$S(\gamma) = \int_{\gamma} L(\dot{\gamma}) dt$$

stationär wird, d.h.

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma_\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

für alle Variationen  $\gamma_\varepsilon$  von  $\gamma$ .

**Bemerkung.** Sei  $(TM, L)$  ein natürliches Lagrange-System mit Funktional

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_q(\dot{q}, \dot{q})$$

so folgt für dessen Wirkung  $S$  offensichtlich

$$S(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{2} g_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt = \frac{1}{2} \int_\gamma \|\dot{\gamma}\|_g dt = \frac{1}{2} l(\gamma).$$

Es gilt nun folgende Aussage:

**Satz 3.46.** *Sei  $(TM, L)$  ein Lagrange-System. Eine Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$  ist genau dann eine Bewegung, wenn  $\gamma$  für alle Karten die Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial q}$$

erfüllt. Dabei ist

$$\hat{L}(q, \dot{q}) := L(d\varphi_q^{-1}(\dot{q})) = \left( (\varphi^{-1})^* L \right)(q, \dot{q})$$

für eine Karte  $(U, \varphi = (q_1, \dots, q_n))$ . Diese Gleichungen werden deshalb auch Bewegungsgleichungen des Systems genannt.

Für den Beweis dieses Satzes sei auf M. Schottenloher 'Geometrie und Symmetrie in der Physik', Vieweg 1995, S. 119, verwiesen.

### Die Einstein-Gleichung der ART

In der Newtonschen Physik betrachtet man lediglich Koordinatensysteme, in denen sich "unbeeinflusste" Teilchen auf euklidischen Geraden mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die durch die Gravitation hervorgerufene Beeinflussung führt dann bei einem frei fallenden Teilchen zu einer krummlinigen und beschleunigten Bewegung. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird diese Ablenkung als eine Krümmung des Raumes interpretiert. Ein frei fallendes Teilchen bewegt sich hier auf einer Geodäte.

Die Beziehung zwischen Gravitation und Krümmung wird durch die so genannte Einstein-Gleichung

$$G(g) =: \text{Ric}(g) - \frac{R}{2}g = 8\pi T$$

ausgedrückt. Dabei ist  $G$  der Einstein-Tensor einer 4-dimensionalen Lorentzmannigfaltigkeit  $(M, g)$  und  $T$  der Energie-Impuls-Tensor mit

$$T \in T^2M \quad \text{und} \quad \delta T = 0.$$

Letzterer beschreibt die Energie-Verteilung der Materie auf der Mannigfaltigkeit, welche man als die Ursache der Gravitation auffassen kann.

### Die Einstein-Gleichungen im Vakuum als Variationsproblem

Vakuum bedeutet  $T = 0$ , d.h. für die Einstein-Gleichung ergibt sich

$$G = \text{Ric} - \frac{R}{2} \text{id} = 0. \quad (*)$$

Wir wollen nun ein Lagrange-Funktional  $\mathcal{L}$  finden, dessen kritische Punkte, und damit meinen wir die *stationären* Punkte der Wirkung von  $\mathcal{L}$ , gerade die Lösungen von (\*) sind. Dazu sei erwähnt, dass es sich hierbei nicht um ein klassisches Lagrange-Funktional aus dem vorletzten Abschnitt handelt, da (\*) eine Gleichung für eine Metrik ist. Das Funktional  $\mathcal{L}$  muss dadurch auf den symmetrischen  $(2,0)$ -Tensorfeldern mit der Signatur  $(p, q)$  der Mannigfaltigkeit definiert sein. Solche Lagrange-Funktionale, die auf Feldern definiert sind, bezeichnet man auch als Lagrange-Dichten.

Sei

$$\mathcal{M}_{p,q}(M) := \left\{ g \mid g \text{ Metrik der Sign. } (p, q) \text{ und } \int_M R_g dM_g < \infty \right\}.$$

Dann setzen wir als Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{M}_{p,q}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ g &\longmapsto R_g. \end{aligned}$$

Die Wirkung ergibt sich daraus als

$$\begin{aligned} S : \mathcal{M}_{p,q}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \int_M \mathcal{L}(g) dM_g = \int_M R_g dM_g. \end{aligned}$$

Dieses Funktional heißt Einstein-Hilbert-Funktional.

Für die Variation betrachten wir nun ein  $g \in \mathcal{M}_{p,q}(M)$  und ein  $h \in S_0^{(2,0)}(M)$ . Dies sind die symmetrischen  $(2,0)$ -Tensorfelder mit *kompaktem* Träger. Dann ist

$$g + th \in \mathcal{M}_{p,q}(M) \quad \text{für } |t| < \varepsilon.$$

$g \in \mathcal{M}_{p,q}(M)$  heißt nun kritischer (oder stationärer) Punkt von  $S$ , falls

$$\frac{d}{dt} (S(g + th)) \Big|_{t=0} = 0 \quad \forall h \in S_0^{(2,0)}(M).$$

**Satz 3.47.** *Eine Metrik  $g$  auf  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $g$  ist kritischer Punkt des Einstein-Hilbert-Funktional.
2.  $\text{Ric}(g) - \frac{R}{2}g = 0$ .

Zum Beweis benutzen wir folgende Variationsformeln für die Krümmungstensoren:

**Lemma 3.48.** *Sei  $g$  eine Metrik,  $h \in S_0^{(2,0)}(M)$ , dann gelten die folgenden Variationsformeln*

1. Für die Volumenform:

$$\begin{aligned} d\dot{M} &:= \frac{d}{dt} (dM_{g+th})|_{t=0} = \frac{1}{2} \langle g, h \rangle_g dM_g \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}_g(h) dM_g. \end{aligned}$$

2. Für den Levi-Civita-Zsh:

$$\nabla := \frac{d}{dt} (\nabla^{g+th})|_{t=0}$$

ist ein  $(2, 1)$ -Tensorfeld und

$$g(\dot{\nabla}(X, Y), Z) = \frac{1}{2} ((\nabla_Y^g h)(Y, Z) + (\nabla_Y^g h)(X, Z) - (\nabla_Z^g h)(X, Y)).$$

3. Für den  $(3, 1)$ -Krümmungstensor:

Sei  $\mathcal{R} := \frac{d}{dt} (\mathcal{R}^{\nabla^{g+th}})|_{t=0}$ , dann ist

$$\dot{\mathcal{R}}(X, Y)Z = \nabla_X^g(\dot{\nabla})(Y, Z) - \nabla_Y^g(\dot{\nabla})(X, Z)$$

4. Für den Ricci-Tensor:

Sei  $\dot{Ric} := \frac{d}{dt} (Ric_{g+th})|_{t=0}$ , dann ist

$$\dot{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \left[ g(\nabla_{e_j}(\dot{\nabla})(X, Y), e_i) - g(\nabla_X(\dot{\nabla})(e_i, Y), e_i) \right]$$

5. Für die Skalarkrümmung:

$$\dot{R} = \frac{d}{dt} (R_{g+th})|_{t=0} = \Delta_g(\text{tr}_g(h)) + \delta_g(\delta_g h) - \langle Ric, h \rangle_g$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Nach Definition ist  $dM_g = \sqrt{|\det(g(a_i, a_j))|} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$  für eine Basis  $(a_1, \dots, a_n)$  und deren Dualbasis  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ . Sei nun  $(a_1, \dots, a_n)$  eine ONB für  $g$  mit Index  $p$ . Dann ist

$$|\det(g(a_i, a_j))| = |(-1)^p| = 1$$

und damit

$$dM_g = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} dM_{g+th} &= \sqrt{(-1)^p \det((g+th)(a_i, a_j))} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n \\ &= \sqrt{(-1)^p \det(A+tB)} \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n \end{aligned}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & 0 \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = (h(a_i, a_j)).$$

*Behauptung:*

$$\frac{d}{dt} ((-1)^p \det(A + tB))|_{t=0} = \det A \cdot \text{Tr}(A^{-1}B)$$

Es gilt  $\det(e^{sX}) = e^{\text{Tr} sX}$ , dies rechnet man mithilfe der Jordanform aus. Nun entwickeln wir dies für  $s$ :

$$\det(E + sX) = 1 + s \text{Tr} X + O(s^2)$$

und daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \det(A + sB) &= \det(A^{-1})(E + sA^{-1}B) \\ &= \det(A^{-1})(1 + s \cdot \text{Tr}(A^{-1}B) + O(s^2)) \end{aligned}$$

und das heißt dass

$$\frac{d}{ds} (\det(A + sB)) = \det(A^{-1}) \cdot \text{Tr}(A^{-1}B).$$

Mit dieser Tatsache ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (dM_{g+th})|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|1|}} (-1)^p \cdot \det(A) \cdot \text{Tr}(A^{-1}B) \cdot \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & 0 \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \circ (h(a_i, a_j)) \right) \cdot \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \epsilon_j h(a_i, a_j) dM_g \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}_g h \cdot dM_g = \frac{1}{2} \langle g, h \rangle_g dM_g \end{aligned}$$

2. Hier benutzen wir die Koszul-Formel für den LC-Zsh. Aus

$$\begin{aligned} 2(g+th) \left( \nabla_X^{g+th} Y, Z \right) &= X((g+th)(Y, Z)) + Y((g+th)(X, Z)) \\ &\quad - Z((g+th)(X, Y)) + (g+th)([X, Y], Z) \\ &\quad + (g+th)([Z, X], Y) + (g+th)([Z, Y], X) \end{aligned}$$

mit  $\frac{d}{dt}|_{t=0}$  folgt

$$\begin{aligned}
2 \cdot g\left(\dot{\nabla}(X, Y), Z\right) + 2h\left(\nabla_X^g Y, Z\right) &= X(h(Y, Z)) + Y(h(X, Z)) - Z(h(X, Y)) \\
&\quad + h([X, Y], Z) + h([Z, X], Y) + h([Z, Y], X) \\
&= (\nabla_X h)(Y, Z) + (\nabla_Y h)(X, Z) - (\nabla_Z h)(X, Y) \\
&\quad + h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z) + h(\nabla_Y X, Z) \\
&\quad + h(X, \nabla_Y Z) - h(\nabla_Z X, Y) - h(X, \nabla_Z Y) \\
&\quad + h(\nabla_X Y, Z) - h(\nabla_Y X, Z) + h(\nabla_Z X, Y) \\
&\quad - h(\nabla_X Z, Y) + h(\nabla_Z Y, X) - h(\nabla_Y Z, X)
\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich dann

$$g\left(\dot{\nabla}(X, Y), Z\right) = \frac{1}{2}\left((\nabla_X h)(Y, Z) + (\nabla_Y h)(X, Z) - (\nabla_Z h)(Z, Y)\right)$$

3. Hierbei sei nochmals auf die Definition der kovarianten Ableitung für Tensorfelder verwiesen. Mit der Produktregel folgt dann

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{R}}(X, Y)Z &= \dot{\nabla}(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X\left(\dot{\nabla}(Y, Z)\right) - \dot{\nabla}(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_Y\left(\dot{\nabla}(X, Z)\right) - \dot{\nabla}([X, Y], Z) \\
&\stackrel{Def.}{=} \nabla_X\left(\dot{\nabla}\right)(Y, Z) - \nabla_Y\left(\dot{\nabla}\right)(X, Z)
\end{aligned}$$

4. Da die Spur einer lin. Abbildung und die Ableitung nach  $t$  vertauschbar sind, folgt

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(X, Y) &= \frac{d}{dt}(\text{Ric}_{g+th}(X, Y))|_{t=0} \\
&= \text{Tr}\left(Z \mapsto \dot{\mathcal{R}}(X, Y)Z\right)
\end{aligned}$$

und daraus ergibt sich

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \left( g\left(\nabla_{e_i}\left(\dot{\nabla}\right)(X, Y), e_i\right) - g\left(\nabla_X\left(\dot{\nabla}\right)(e_i, Y), e_i\right) \right)$$

5. Es gilt

$$R_{g+th} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \text{Ric}_{g+th}(a_i(t), a_i(t))$$

wobei  $a_i(t)$  eine ONB von  $g + th$  ist. Sei  $a_i(0) = a_i$  und  $\dot{a}_i = \dot{a}_i(0)$ , dann ist

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= \frac{d}{dt}(R_{g+th})|_{t=0} \\
&= \sum_i \left( \epsilon_i \text{Ric}(a_i, a_i) + 2\epsilon_i \text{Ric}_g(\dot{a}_i, a_i) \right) \\
&= \text{Tr}_g \text{Ric} + 2 \sum_i \epsilon_i \text{Ric}_g(\dot{a}_i, a_i) \quad (*)
\end{aligned}$$

*Behauptung:*

$$2 \sum_i \epsilon_i \operatorname{Ric}_g(\dot{a}_i, a_i) = - \langle \operatorname{Ric}_g, h \rangle_g$$

Aus  $(g + th)(a_i(t), a_j(t)) = \epsilon_i \delta_{ij}$  folgt

$$h(a_i, a_j) + g(\dot{a}_i, a_j) + g(a_i, \dot{a}_j) = 0$$

und mit Basisdarstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \sum_k g(\dot{a}_i, a_k) \epsilon_k a_k \\ &= \sum_k -h(a_i, a_k) \epsilon_k a_k - g(a_i, \dot{a}_k) \epsilon_k a_k \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \operatorname{Ric}_g(\dot{a}_i, a_i) &= - \sum_{k,i} \epsilon_i \epsilon_k (h(a_i, a_k) \operatorname{Ric}_g(a_k, a_i) + g(a_i, \dot{a}_k) \operatorname{Ric}_g(a_k, a_i)) \\ &= - \langle h, \operatorname{Ric}_g \rangle_g - \sum_k \epsilon_k \operatorname{Ric}(a_k, \dot{a}_k) \\ \Leftrightarrow 2 \sum_i \epsilon_i \operatorname{Ric}_g(\dot{a}_i, a_i) &= - \langle h, \operatorname{Ric}_g \rangle_g \end{aligned}$$

Wenden wir dies auf (\*) an, dann bleibt die  
*Behauptung:*

$$\operatorname{Tr}_g \dot{\operatorname{Ric}} = \Delta_g(\operatorname{Tr} h) + \delta_g \delta_g(h)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_g \dot{\operatorname{Ric}} &= \sum_i \epsilon_i \dot{\operatorname{Ric}}(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \left( g(\nabla_{e_j}(\dot{\nabla})(e_i, e_i), e_j) - g(\nabla_{e_i}(\dot{\nabla})(e_j, e_j), e_i) \right) \end{aligned}$$

nun rechnen wir im Punkt  $x \in M$  in einer  $x$ -synchronen ONB. Dann folgt

$$\begin{aligned}
Tr_g \dot{\text{Ric}} &\stackrel{x}{=} \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \left( g \left( \nabla_{e_j} \left( \dot{\nabla} \right) (e_i, e_i), e_j \right) - g \left( \nabla_{e_i} \left( \dot{\nabla} \right) (e_j, e_j), e_i \right) \right) \\
&\stackrel{\nabla_g=0}{=} \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \left( e_j \left( g \left( \dot{\nabla} (e_i, e_i), e_j \right) \right) - e_i \left( g \left( \dot{\nabla} (e_j, e_j), e_i \right) \right) \right) \\
&\stackrel{2.}{=} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j [e_j (\nabla_{e_i} h(e_i, e_j) + \nabla_{e_i} h(e_i, e_j) - \nabla_{e_j} h(e_i, e_i)) \\
&\quad - e_i (\nabla_{e_j} h(e_i, e_j) + \nabla_{e_i} h(e_j, e_j) - \nabla_{e_j} h(e_j, e_i))] \\
&= \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j (e_j \underbrace{(\nabla_{e_i} h(e_i, e_j))}_{-\delta h(e_j)} - e_i (\nabla_{e_j} h(e_i, e_i))) \\
&= \delta_g \delta_g h - \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j e_j (e_j (h(e_i, e_i) - 2h(\nabla_{e_j} e_i, e_i))) \\
&= \delta_g \delta_g h + \Delta_g (Tr_g h) + 2 \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j h(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i, e_i)
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$2 \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j h(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i, e_i) = 0$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i &= \sum_k \epsilon_k g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i, e_k) e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k (e_j (g(\nabla_{e_j} e_i, e_k)) - 0) e_k \\
&= \sum_k \epsilon_k \left( e_j \left( \underbrace{e_j (g(e_i, e_k))}_0 \right) - g(e_i, \nabla_{e_j} e_k) \right) e_k \\
&= - \sum_k \epsilon_k g(e_i, \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_k) e_k
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j h(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} e_i, e_i) &= \sum_{i,j,k} \epsilon_i \epsilon_j \epsilon_k g(e_i, \nabla_{e_j} \nabla_{e_j} e_k) \cdot h(e_k, e_k) \\
&= - \sum_{j,k} \epsilon_k \epsilon_j h(\nabla_{e_j} \nabla_{e_j} e_k, e_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\dot{R} = \delta_g \delta_g h + \Delta_g (Tr_g h) - \langle \text{Ric}_g, h \rangle_g$$

Und das Lemma ist bewiesen.  $\square$

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 3.47.

*Beweis.* Für die Variation des Einstein-Hilbert-Funktional gilt nun

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(S(g+th))|_{t=0} &= \int_M \frac{d}{dt}(R_{g+th} \cdot dM_{g+th})|_{t=0} \\
 &= \int_M \dot{R} \cdot dM_g + R_g \cdot d\dot{M} \\
 &\stackrel{\text{Lemma}}{=} \int_M \left( \Delta_g(Tr_g h) + \delta_g \delta_g h - \langle Ric_g, h \rangle_g + \frac{1}{2} \langle R_g g, h \rangle \right) dM_g \\
 &= \int_M \left\langle \frac{1}{2} R_g g - Ric_g, h \right\rangle dM_g \\
 &\quad + \int_M (\Delta_g(Tr_g h) + \delta_g \delta_g h) dM_g
 \end{aligned}$$

Der 2. Term verschwindet jedoch nach dem Satz von Stokes bzw. dem Divergenz-Satz für Vektorfelder mit kompaktem Träger auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Aus

$$0 = \frac{d}{dt}(S(g+th))|_{t=0} = \int_M \left\langle \frac{1}{2} R_g g - Ric_g, h \right\rangle_g dM_g \quad \forall h \in S_0^{(2,0)}(M)$$

folgt dann also

$$Ric - \frac{1}{2} R_g \cdot g = 0$$

$\square$

**Bemerkung.** Es gilt

$$T = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(S(g+th))|_{t=0} = \int_M \langle T, h \rangle_g dM_g = 0 \quad \forall h \in S_0^{(2,0)}(M)$$

Sei  $x \in M$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  eine ONB in  $T_x M$  und *angenommen*  $T_x(e_i, e_j) \neq 0$ . Wir betrachten  $h$  mit  $h_x = \underbrace{h_x(e_i, e_j)}_{\neq 0} \sigma^i \circ \sigma^j$  und

$$\underbrace{T_x(e_i, e_j) h_x(e_i, e_j)}_{=: f(x)} > 0.$$

Sei  $\varphi \in C^\infty(M)$  mit  $\varphi > 0, \varphi(x) = 1$  und  $\text{supp } \varphi \subset \{f > 0\}$  dann ist

$$\frac{d}{dt}(S(g+t\varphi h))|_{t=0} = \int_M \langle T, \varphi h \rangle_g dM_g = \int_M \varphi f dM_g > 0.$$

**Satz 3.49.** Sei  $(M, g)$  eine orientierte semi-Riem. MF mit  $\text{Vol}(M, g) = 1$ . Sei

$$F : \mathcal{M}_{(p,g)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

das normierte Einstein-Hilbert-Funktional

$$F(g) = \frac{1}{\text{Vol}(M, g)^{\frac{n-2}{n}}} \int_M R_g dM_g,$$

dann gilt

$$(M, g) \text{ ist Einstein-Raum} \iff g \text{ ist kritischer Punkt von } F$$

*Beweis.* Zunächst eine Bemerkung zum Verhalten der Funktionale bei Umskalierung der Metrik. Sei  $\tilde{g} = \lambda \cdot g$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , dann ist

- $\text{Ric}_{\tilde{g}} = \text{Ric}_g$
- $R_{\tilde{g}} = \lambda^{-1} R_g$
- $dM_{\tilde{g}} = \lambda^{\frac{n}{2}} dM_g$

Somit folgt also

$$S(\lambda g) = \int_M R_{\lambda g} dM_{\lambda g} = \lambda^{\frac{n-2}{2}} S(g)$$

bzw.

$$F(\lambda g) = \frac{1}{\text{Vol}(M, \lambda g)^{\frac{n-2}{2}}} S(\lambda g) = \lambda^{-\frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2}} \cdot \lambda^{\frac{n-2}{2}} \cdot F(g) = F(g).$$

Für die Variationen ergibt sich damit

$$\frac{d}{dt} (F(g + th))|_{t=0} = \frac{d}{dt} (S(g + th))|_{t=0} \cdot \underbrace{\text{Vol}(M, g)}_1 + S(g) \cdot \left( -\frac{n-2}{n} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} (\text{Vol}(M, g + th))|_{t=0}}_{\text{Vol}} \right)$$

wobei nach dem Lemma

$$\dot{\text{Vol}} = \int_M d\dot{M} = \int_M \frac{1}{2} \langle g, h \rangle_g dM,$$

und nach Satz 3.47

$$\frac{d}{dt} (S(g + th))|_{t=0} = \int_M - \left\langle \text{Ric} - \frac{1}{2} R_g \cdot g, h \right\rangle_g dM.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(F(g+th))|_{t=0} &= \int_M \left\langle -\text{Ric} + \frac{1}{2}R_g \cdot g - \frac{n-2}{2n}R_g \cdot g, h \right\rangle_g dM_g \\
 &= \int_M \left\langle -\text{Ric} + \frac{1}{n}R_g \cdot g, h \right\rangle_g dM_g \\
 &= 0 \quad \forall h \\
 \Rightarrow \text{Ric} &= \frac{R}{n} \cdot g.
 \end{aligned}$$

Und somit ist  $(M, g)$  ein Einstein-Raum.  $\square$

### 3.8 Geodätische Linien auf semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Ziel: Verallgemeinerung der Geraden als kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten in  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$ .

**Definition.** Sei  $(M^n, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\nabla$  der Levi-Civita-Zusammenhang. Sei weiterhin  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine  $C^\infty$ -Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  heißt geodätische Linie (kurz "Geodätische") auf  $(M^n, g)$ , falls

$$\frac{\nabla \dot{\gamma}}{dt} \equiv 0$$

auf  $I$ , (d.h.  $\dot{\gamma}$  ist  $\parallel$ -verschoben entlang  $\gamma$ ).

#### Eigenschaften von Geodäten

##### 1. Lokale Formel für geodätische Linien $\gamma$

Aus der lokalen Formel für parallele Vektorfelder folgt: Ist  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  zul. Karte um  $\gamma(t)$  und  $\varphi \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , so folgt

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \gamma'_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

und damit

$$\gamma''_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \equiv 0 \quad k = 1, \dots, n$$

wobei  $(\Gamma_{ij}^k)$  die Christoffel-Symbole von  $(M, g)$  bezüglich  $(U, \varphi)$  sind.

**Beispiel.** Ist  $(M, g) = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$ , dann ist  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ . Damit gilt:

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ Geodätische} \Leftrightarrow \gamma''_k(t) = 0 \quad k = 1, \dots, n \Leftrightarrow \gamma(t) = at + b \quad a, b \in \mathbb{R}^n$$

2. Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  Geodätische, dann ist

$$\|\gamma'(t)\| = \text{const.}$$

Da die  $\|\cdot\|$ -Verschiebung bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhang die Längen erhält<sup>11</sup>.

3. Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine nicht-konstante Geodätische und  $\tau : J \rightarrow I$  eine Parametertransformation. Dann gilt:

Die umparametrisierte Kurve  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau : J \rightarrow M$  ist eine Geodätische  $\Leftrightarrow \tau(t) = at + b$  (d.h.  $\tau$  ist eine affine Parametertransformation).

Denn:

$$\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\tau(t)) \cdot \tau'(t).$$

Aus der Produktregel für kovariante Ableitung von VF folgt dann

$$\frac{\nabla \tilde{\gamma}'}{dt}(t) = \frac{\nabla \gamma'}{d\tau}(\tau(t)) \cdot (\tau'(t))^2 + \gamma'(\tau(t)) \cdot \tau''(t)$$

$$\stackrel{\gamma \text{ Geodäte}}{=} \gamma'(\tau(t)) \cdot \tau''(t).$$

Da  $\gamma$  nicht konstant und  $\gamma'$   $\|\cdot\|$ -verschoben ist, folgt  $\gamma'(\tau(t)) \neq 0 \forall t \in I$ .

**Definition.** Eine  $C^\infty$ -Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  heißt Prägeodäte  $\Leftrightarrow$  es existiert eine beliebige Parametertransformation  $\tau : J \rightarrow I$  derart, dass  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodäte ist.

**Satz 3.50.** Sei  $(M, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $v \in T_x M$ . Dann existiert genau eine maximale Geodätische  $\gamma_v : I_v \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  mit

$$\begin{aligned} \gamma_v(0) &= x \\ \gamma'_v(0) &= v \quad \text{“Durchlaufgeschwindigkeit”} \end{aligned}$$

(maximal = maximaler Definitionsbereich).

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Wir zeigen zuerst: Es existiert eine Geodätische  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$ .

Dazu wählen wir Karte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  um  $x$ . Sei dann  $v = \sum v^k \frac{\partial}{\partial x_k}(x)$ . Wir betrachten das lineare AWP auf  $\varphi(U)$ :

$$\left. \begin{aligned} \gamma''_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \gamma'_i(t) \gamma'_j(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) &\equiv 0 \\ \gamma_k(0) &= x_k(x) \\ \gamma'_k(0) &= v^k \end{aligned} \right\} \quad k = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein gewöhnliches DGLS 2. Ordnung mit AW. Es existiert also lokal eine Lösung um  $t = 0$

$$\gamma(t) := \varphi^{-1}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

<sup>11</sup>siehe Satz 3.21 auf Seite 146

2. Maximalität und Eindeutigkeit: Standardschluss wie im  $\mathbb{R}^n$ : Seien  $\gamma_i : I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  Geodätische mit  $\gamma_i(0) = x$ ,  $\gamma'_i(0) = v$  und zusammenhängendem  $I_1 \cap I_2$ . Dann folgt aus  $0 \in I_1 \cap I_2$  automatisch  $\gamma_1 = \gamma_2$  auf  $I_1 \cap I_2$ , denn

$$A = \{t \in I_1 \cap I_2 \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t), \gamma'_1(t) = \gamma'_2(t)\}$$

ist mit  $0 \in A$  nicht leer. Darüber hinaus ist  $A$  nach Satz 1.19 abgeschlossen, da  $\gamma_i, \gamma'_i$  stetig und  $T_2$ -Räume, und offen nach lokalem Existenzsatz für  $t_0 \in A$ . Und da  $I_1 \cap I_2$  zusammenhängend ist, folgt  $A = I_1 \cap I_2$ . Wir betrachten alle Lösungen  $\gamma : (a_\gamma, b_\gamma) \rightarrow M$ ,  $a = \inf_\gamma a_\gamma$ ,  $b = \sup_\gamma b_\gamma$ . Dann gilt:

$$\gamma_v : (a, b) = I_v \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

ist eindeutige maximale Lösung:  $\gamma_v(t) := \gamma(t)$  falls  $t \in (a_\gamma, b_\gamma)$ .

□

**Korollar 3.51.** Sei  $\gamma_v : I_v \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  die maximale Geodäte mit Anfangspunkt  $\gamma_v(0) = x$  und Anfangsrichtung  $\gamma'_v(0) = v$ . Dann gilt:

$$ts \in I_v \Rightarrow s \in I_{tv}$$

und

$$\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts).$$

Insbesondere ist mit  $1 \in I_v$  auch  $1 \in I_{tv} \forall t \in [0, 1]$ .

*Beweis.* Sei  $\delta(\tau) := \gamma_v(t \cdot \tau)$  für  $0 \leq \tau \leq s$ ,  $t$  fix. Dann gilt:  $\delta$  ist Geodäte, da die Parametertransformation affin ist.

$$\delta(0) = \gamma_v(0) = x, \quad \delta'(0) = t \cdot v$$

Nach Definition ist dann  $\delta(\tau) = \gamma_{tv}(\tau)$  und damit

$$\delta(s) \stackrel{\text{Def.}}{=} \gamma_v(ts) = \gamma_{tv}(s) \Rightarrow s \in I_{tv}, \text{ da } ts \in I_v.$$

Für  $s = 1$  folgt dann  $t \cdot 1 \in I_v \forall 0 \leq t \leq 1$  und demnach

$$1 \in I_{tv} \forall 0 \leq t \leq 1.$$

□

**Satz 3.52.** Sei  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  eine Isometrie zwischen semi-Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dann gilt:

$\gamma : I \rightarrow M$  ist eine Geodätische in  $(M, g) \Leftrightarrow f \circ \gamma : I \rightarrow \tilde{M}$  ist eine Geodätische in  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ .

*Beweis.* Eine Geodätische  $\gamma$  ist stückweise entweder regulär ( $\gamma'(t) \neq 0$ ) oder konstant, da  $\|\gamma'(t)\| = \text{konst.}$  und  $\gamma'$   $\parallel$ -verschoben. Für einen Diffeomorphismus  $f$  gilt dann

$$\begin{aligned} \gamma \text{ konstant} &\Leftrightarrow f \circ \gamma \text{ konstant} && \text{und} \\ \gamma \text{ regulär} &\Leftrightarrow f \circ \gamma \text{ regulär.} \end{aligned}$$

Sei nun  $\gamma$  regulär und  $t_0 \in I$ , dann existiert  $\tilde{I} = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$  und ein VF  $X_{t_0} \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $X_{t_0}(\gamma(t)) = \gamma'(t) \forall t \in \tilde{I}$ . Betrachten wir das VF  $f_*(X_{t_0}) \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ , (dies existiert, da  $f$  ein Diffeomorphismus ist):

$$\begin{aligned} f_*(X_{t_0})(f\gamma(t)) &\stackrel{\text{Def}}{=} df_{\gamma(t)}(X_{t_0}(\gamma(t))) \\ &= df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (f\gamma)'(t) \quad \forall t \in \tilde{I}. \end{aligned}$$

D.h.  $f_*(X_{t_0})$  setzt  $(f\gamma)'$  um  $(f\gamma)'(t_0)$  fort. Und damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\nabla}((f\gamma)')}{dt}(t) &= \tilde{\nabla}_{f_*X_{t_0}} f_*(X_{t_0}) \\ &\stackrel{3.14}{=} f_*(\nabla_{\gamma'(t)} X_{t_0}) \\ &\stackrel{3.7.1}{=} df_{\gamma(t)}\left(\frac{\nabla \gamma'}{dt}(t)\right) \quad \forall t \in \tilde{I}. \end{aligned}$$

Da  $t_0 \in I$  beliebig ist, gilt die Behauptung  $\forall t \in I$ . □

**Satz 3.53.** Sei  $M^n \subset \mathbb{R}^N$  eine Mannigfaltigkeit mit induzierter Riemannscher Metrik und bezeichne

$$N_x M := (T_x M)^\perp$$

den Normalenraum in  $x \in M$ . Dann gilt:  $\gamma : I \rightarrow M^n$  ist eine Geodätische

$$\Leftrightarrow \gamma''(t) \in N_{\gamma(t)} M.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Beispiel 3.16: Sei  $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ , dann ist  $Z(t)$  parallel verschoben entlang  $\gamma \Leftrightarrow Z'(t) \in N_{\gamma(t)} M$ . Es gilt also

$$\gamma \text{ ist Geodätische} \Leftrightarrow \gamma'(t) \parallel \text{ entlang } \gamma \Leftrightarrow \gamma''(t) \in N_{\gamma(t)} M.$$

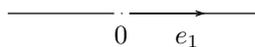
□

**Definition.** Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt geodätisch vollständig (kurz: vollständig)  $\Leftrightarrow$  Jede maximale Geodätische  $\gamma : I \rightarrow M$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

## Beispiele für geodätische Linien

### 1. Geodäten im flachen Raum

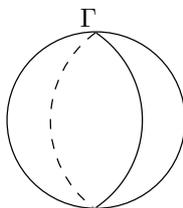
- a)  $(\mathbb{R}^{n,k}, g_k)$  ist geodätisch vollständig. Jede maximale Geodätische hat die Form  $\gamma(t) = at + b$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .
- b)  $(\mathbb{R}^{n,k} \setminus \{0\}, g_k)$  nicht geodätisch vollständig.



$\gamma(t) = te_1$  ist nur definiert auf  $(-\infty, 0)$  und  $(0, \infty)$ .

### 2. Geodätische Linien auf $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Für einen 2-dim. UR  $E^2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$  betrachten wir den "Großkreis"  $\Gamma := E^2 \cap S^n$ .



Sei  $E = \text{span}(v_1, v_2)$  mit ON-Vektoren  $(v_1, v_2)$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Wir parametrisieren  $\Gamma$  nach Bogenlänge. Mit

$$\gamma(t) := \cos tv_1 + \sin tv_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

folgt  $\Gamma = \text{Im } \gamma$  und  $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$ .  $\gamma(t)$  ist eine Geodätische auf  $S^n$ , denn

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= -\sin tv_1 + \cos tv_2 \\ \gamma''(t) &= -\cos tv_1 - \sin tv_2 = -\gamma(t). \end{aligned}$$

Da  $N_{\gamma(t)}S^n = \mathbb{R}\gamma(t)$ , ist

$$\gamma''(t) \in N_{\gamma(t)}S^n.$$

Da durch jeden Punkt  $x \in S^n$  und in jeder Richtung genau ein Großkreis verläuft, sind das alle geodätischen Linien. Insbesondere gilt: Die Sphäre  $S^n$  ist eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

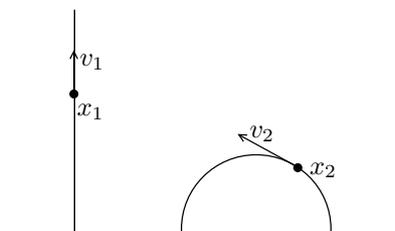
### 3. Die geodätischen Linien der Poincaré-Halbebene

Sei

$$\begin{aligned} H^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \\ g_{H^+} &= \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \end{aligned}$$

die Poincaré-Halbebene<sup>12</sup>.

*Behauptung:* Die senkrechten Geraden und alle Halbkreise mit MP auf der reellen Achse sind (bei geeigneter Parametrisierung) alle Geodätischen von  $(H^+, g_{H^+})$ . Insbesondere ist  $(H^+, g_{H^+})$  vollständig.



*Beweis.* Da durch jeden Punkt  $x \in H^+$  und in jede Richtung  $v \in T_x H^+$  genau ein Halbkreis oder eine senkrechte Gerade verläuft, g.z.z., dass man diese Mengen durch geodätische Linien parametrisieren kann. Parametrisierung des Halbkreises (Mittelpunkt  $(\beta, 0)$ , Radius  $\alpha$ ):

$$(*) \quad \gamma(t) = \left( \alpha \tan h(t) + \beta, \frac{\alpha}{\cosh(t)} \right) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametrisierung der Geraden:

$$(**) \quad \gamma(t) = (\beta, e^t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen nun die Christoffel-Symbole von  $(H^+, g_{H^+})$  in der Karte  $\varphi(x, y) = (x, y)$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Demnach lauten die Geodäten-Gleichungen:  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  Geodäte  $\Leftrightarrow$

$$\gamma_1''(t) - \frac{2}{\gamma_2(t)} \gamma_1'(t) \gamma_2'(t) = 0$$

$$\gamma_2''(t) - \frac{1}{\gamma_2'(t)} \gamma_2'(t) \gamma_2'(t) + \frac{1}{\gamma_2(t)} \gamma_1'(t) \gamma_1'(t) = 0.$$

Diese Gleichungen sind für die Kurven (\*) und (\*\*) erfüllt. □

<sup>12</sup>Siehe hierzu auch Bsp. 3.7 zur Möbiustransformation

### Bemerkung zu den Modellen der nicht-Euklidischen Geometrie

Euklidische Geometrie wird durch Axiomensysteme beschrieben. Dabei treten die folgenden Grundbegriffe auf:

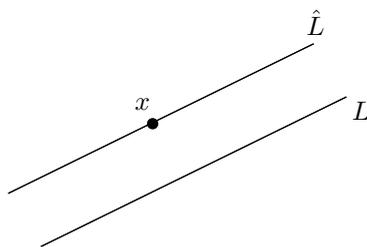
- Punkt
- Gerade
- + Axiome der “synthetischen Geometrie”

Streitpunkt hierbei ist das so genannte *Parallelenaxiom*: Sei  $L$  eine Gerade und  $x$  Punkt mit  $x \notin L$ . Dann existiert genau eine Gerade durch  $x$ , die  $L$  nicht schneidet. Diese wird als die zu  $L$  “parallele” Gerade bezeichnet. Kann man dies aus den Axiomen der synthetischen Geometrie folgern oder muss man es zusätzlich fordern?

Die Entwicklung von nicht-Euklidischen Geometrien (Gauß, Lobatschewski, Bolyai ...) zeigen, dass Geometrien existieren, in denen das Axiom nicht gilt und man es zusätzlich fordern muss. Als Beispiel betrachten wir die folgenden Modelle:

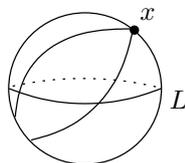
Sei  $(M^2, g)$  eine vollständige einfach-zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $K \equiv 0, 1, -1$ . Ein “Punkt” entspricht einem Element  $x \in M$  und eine “Gerade” entspricht einer geodätischen Linie in  $(M^2, g)$ . Dann sind alle Axiome der synthetischen Geometrie erfüllt, aber:

- Für  $K = 0$  erhält man als Riemannsche MF  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2})$  und damit die **Euklidische Geometrie**:



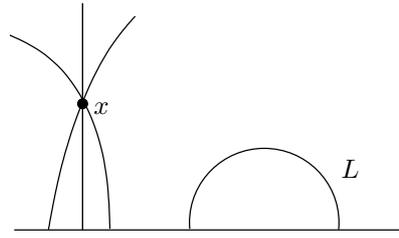
Für jedes  $x \notin L$  existiert genau eine Gerade  $\hat{L}$  mit  $x \in \hat{L}$  und  $L \cap \hat{L} = \emptyset$ .

- Für  $K = 1$  erhält man die Sphäre  $S^2$  mit der induzierten Metrik, bzw. die **Sphärische Geometrie**:



Alle “Geraden” durch  $x$  schneiden  $L$ .

- Für  $K = -1$  erhält man  $(H^+, g_{H^+})$ , bzw. die **Hyperbolische Geometrie**:



Es existieren unendlich viele "Geraden" durch  $x$ , die  $L$  nicht schneiden.

### Geodätische Linien auf Rotationsflächen

Wir betrachten die *Rotationsflächen*<sup>13</sup> mit induzierter Metrik:

$$M^2 = \{f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v)) \mid v \in (a, b), u \in \mathbb{R}\}$$

mit einer Kurve

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit den Eigenschaften  $\gamma_1(v) > 0$  und  $\dot{\gamma} \neq 0$ . Dann ist zunächst  $f : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion. Wählt man  $\gamma(v)$  geeignet, so ist  $M^2 = \text{Bild } f \subset \mathbb{R}^3$  eine UMF und die inversen Kartenabbildungen auf  $M$  sind gegeben durch

$$f = \varphi^{-1} : (u, v) \in (u_1 - \pi, u_0 + \pi) \times (v_0, v_1) \rightarrow f(u, v) \in M.$$

Für die kanonische Basis dieser Karte gilt:

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial u} (u, v) = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial v} (f(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial v} (u, v) = (\dot{\gamma}_1(v) \cos u, \dot{\gamma}_1(v) \sin u, \dot{\gamma}_2(v)).$$

Berechnet man die Christoffel-Symbole, so erhält man folgende Geodäten-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \delta(t) = f(u(t), v(t)) \text{ ist Geodätische} \\ \Leftrightarrow \left( u'' + 2 \frac{\gamma_1'}{\gamma_1} u' v' = 0 \right) \text{ und } \left( v'' - \frac{\gamma_1 \gamma_1'}{\gamma_1 + (\gamma_2')^2} u'^2 + \frac{\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_2' \gamma_2''}{(\gamma_2')^2 + (\gamma_2'')^2} (v')^2 = 0 \right) \quad (**) \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_i' = \gamma_i'(v(t))$ . Die Kurve  $\delta(t)$  ist auf Bogenlänge parametrisiert, falls

$$\gamma_1^2 (u')^2 + \left( (\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 \right) (v')^2 = 1 \quad (***) .$$

Die Punktmenge  $\{f(u, v_0) \mid u \in \mathbb{R}\}$  heißen Breitenkreise von  $M$  und die  $\{f(u_0, v) \mid v \in (a, b)\}$  heißen Meridiane von  $M$ . Wir parametrisieren die Breitenkreise nach Bogenlänge, d.h.

<sup>13</sup>siehe hierzu Bsp. auf Seite 115

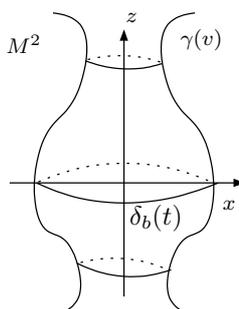
durch Kurven  $\delta_b(t) = f(u(t), v_0)$ . Mit (\*\*\*) folgt dann  $\gamma_1^2(v_0) (u')^2 = 1$ . Für die Meridiane schließt man mit  $\delta_m(t) = f(u_0, v(t))$  analog, dass hierfür

$$((\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2) (v')^2 = 1$$

erfüllt ist. Dann gilt:

1. Alle (auf BL parametr.) Meridiane  $\delta_m(t) = f(u_0, v(t))$  sind geodätische Linien.
2. Ein (auf BL parametr.) Breitenkreis  $\delta_b(t) = f(u(t), v_0)$  ist eine geodätische Linie  $\Leftrightarrow \gamma'_1(v_0) = 0$ , d.h.  $\gamma'(v_0)$  ist parallel zur  $z$ -Achse.

Damit sind Breitenkreise der Art

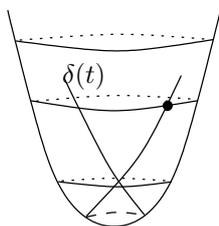


die einzigen Geodätischen unter den Breitenkreisen.

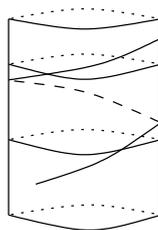
3. Sei  $\delta(t) = f(u(t), v(t))$  eine auf BL parametrisierte Kurve auf  $M^2$ ,  $\beta(t)$  der Schnittwinkel zwischen  $\delta$  und dem Breitenkreis durch  $\delta(t)$  im Punkte  $\delta(t)$ , d.h.  $\cos \beta = \frac{(\gamma_1 \circ v)u'}{\|\delta'\|}$ . Zudem gelte  $0 < \beta(t) < \pi$ , d.h.  $\delta$  verläuft nirgends *auf* einem Breitenkreis und  $r(t) = \gamma_1(v(t))$  sei der Radius des Breitenkreises durch  $\delta(t)$ . Dann gilt die Clairautsche Regel:

$$\delta(t) \text{ ist Geodätische} \Leftrightarrow r(t) \cdot \cos \beta(t) \equiv \text{const.}$$

Im Falle des Paraboloiden, bei dem kein Breitenkreis geodätisch ist, hat man z.B. folgende Geodätische.



Für einen Zylinder, bei dem jeder Breitenkreis geodätisch ist, gilt  $r(t) \equiv \text{const.}$ . Damit ist die obige Kurve  $\delta(t)$  genau dann eine geodätische, wenn  $\cos \beta(t)$  bzw.  $\beta(t)$  konstant ist:



Solche Kurven heißen Schraubenlinien.

### 3.9 Exponentialabbildung und Normalkoordinaten

Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $v \in T_x M$ . Zudem sei

$$\gamma_v : I_v \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

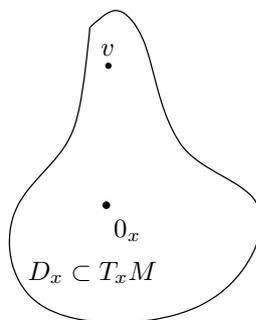
die eindeutig bestimmte maximale Geodätische mit  $\gamma_v(0) = x$ ,  $\gamma'_v(0) = v$ . Nach dem Korollar aus Satz 3.50 gilt

$$1 \in I_v \Rightarrow 1 \in I_{tv} \quad \forall 0 \leq t \leq 1 \quad \text{und} \quad \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Dann ist die Menge

$$D_x := \{v \in T_x M \mid 1 \in I_v\} \subset T_x M$$

sternförmig bzgl.  $0_x \in T_x M$  und offen (nach der allgemeinen Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen).

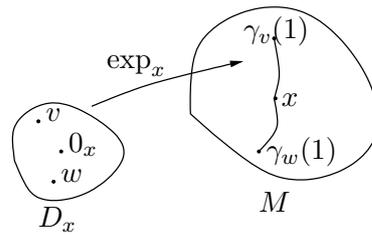


Nach Def. ist  $D_x \subset T_x M$ . Ist  $(M^n, g)$  geodätisch vollständig, so gilt  $D_x = T_x M$ .

**Definition.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp_x : D_x \subset T_x M &\rightarrow M \\ v &\mapsto \gamma_v(1) \end{aligned}$$

heißt Exponentialabbildung von  $(M, g)$  im Punkt  $x \in M$ .

**Eigenschaften:**

- $\exp_x$  bildet die Geradenstücke  $\{tv \mid t \in I_0\}$  von  $T_x M$  auf Geodätenstücke in  $M$  ab:

$$\exp_x(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$$

- Die Abbildung  $\exp_x$  ist  $C^\infty$ , denn Lösungen von Differentialgleichungen mit  $C^\infty$ -Koeffizienten hängen glatt von den Anfangsbedingungen  $(v, \pi(v))$  ab.

**Satz 3.54.** Die Exponentialabbildung  $\exp_x : D_x \subset T_x M \rightarrow M$  ist ein lokaler Diffeomorphismus um  $0_x \in D_x$ .

*Beweis.* Bei der Identifizierung  $T_0(T_x M) \simeq T_x M$  gilt  $(d\exp_x)_0 = \text{id}_{T_x M}$ , da

$$\begin{aligned} (d\exp_x)_0(w) &= \frac{d}{dt}(\exp_x(0 + tw))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp_x(tw))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\gamma_w(t))|_{t=0} \\ &= w. \end{aligned}$$

□

**Definition.** Sei  $\tilde{U} \subset T_x M$  eine sternförmige Umgebung von  $0_x \in T_x M$ , so dass

$$\exp_x : \tilde{U} \rightarrow U(x) \subset M$$

ein Diffeomorphismus ist. Dann heißt  $U(x) = \exp_x(\tilde{U})$  Normalenumgebung von  $x \in M$ .

Aus Satz 3.54 erhält man: Ist  $(M^n, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann besitzt jeder Punkt  $x \in M$  eine Normalenumgebung. Normalenumgebungen haben folgende spezielle Eigenschaft:

**Satz 3.55.** Sei  $U(x)$  Normalenumgebung von  $x \in M$ . Dann existiert für jeden Punkt  $y \in U(x)$  eine eindeutig bestimmte Geodäte  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U(x)$ , die  $x$  und  $y$  innerhalb von  $U(x)$  verbindet ( $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ ). Dabei gilt: Ist  $v = \exp_x^{-1}(y)$ , so ist

$$\gamma(t) = \exp_x(tv) = \gamma_v(t) \quad t \in [0, 1]$$

und

$$l(\gamma_v|_{[0,1]}) = \|v\|.$$

$\gamma_v : [0, 1] \rightarrow U(x)$  heißt radiale Geodäte von  $x$  nach  $y$ .

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. *Existenz:*

Sei  $v = \exp_x^{-1}(y) \in \tilde{U}$ . Da  $\tilde{U}$  sternförmig, ist  $tv \in \tilde{U} \quad \forall 0 \leq t \leq 1$ . Und damit ist

$$\gamma_v(t) = \exp_x(tv) \in U(x)$$

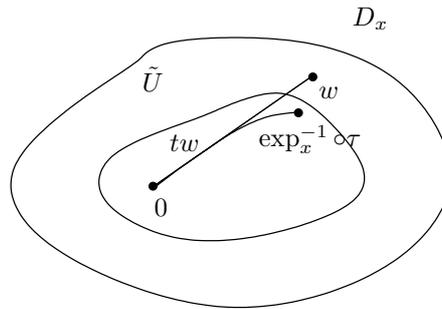
eine Geodäte in  $U(x)$ , die  $x$  und  $y$  verbindet.

2. *Eindeutigkeit:*

Sei  $\tau : [0, 1] \rightarrow U(x)$  eine weitere Geodäte mit  $\tau(0) = x$  und  $\tau(1) = y$ . Wir setzen  $w := \tau'(0) \in T_x M$  und betrachten die durch  $w$  definierte *maximale* Geodäte  $\gamma_w : I_w \rightarrow M$ . Da  $\tau$  und  $\gamma_w$  den gleichen Anfangspunkt und Anfangsvektor besitzen, folgt:

$$\tau = \gamma_w|_{[0,1]} \quad (*)$$

und damit ist  $w \in D_x \subset T_x M$ . Angenommen,  $w \notin \tilde{U}$ . Dann verlässt die Strecke  $\{tw | t \in [0, 1]\}$  die Menge  $\tilde{U}$ .



Sei hier  $\exp_x$  nicht die Exponentialabbildung auf ganz  $D_x$ , sondern die diffeomorphe Einschränkung auf  $\tilde{U}$ . Da  $\exp_x^{-1}(\tau[0, 1])$  kompakt ist, existiert ein  $t_0 \in (0, 1)$ , so dass  $t_0 w \in \tilde{U} \setminus \exp_x^{-1}(\tau[0, 1])$ . Damit ist aber

$$\gamma_w(t_0) \in U(x) \setminus \tau[0, 1].$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (\*). Es gilt nun

$$y = \gamma_w(1) = \gamma_v(1) \quad \text{und } v, w \in \tilde{U} \text{ mit } \exp_x(w) = \exp_x(v).$$

Da  $\exp_x : \tilde{U} \rightarrow U(x)$  ein Diffeomorphismus ist, folgt  $w = v$  bzw.  $\gamma_v = \gamma_w = \tau$  auf  $[0, 1]$ .

3. Für die Länge folgt aus  $\|\gamma'_v(t)\| \equiv \|\gamma'_v(0)\|$

$$l(\gamma_v|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\gamma'_v(0)\| dt = \|v\|.$$

□

**Definition.** Eine Kurve  $\gamma : I \rightarrow M$  heißt 'gebrochene Geodäte'  $\Leftrightarrow \gamma$  stückweise  $C^\infty$  und die glatten Stücke sind Geodätische.

**Korollar 3.56.** Sei  $(M^n, g)$  eine zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann kann man beliebige Punkte  $x, y \in M$  durch eine gebrochene Geodäte verbinden.



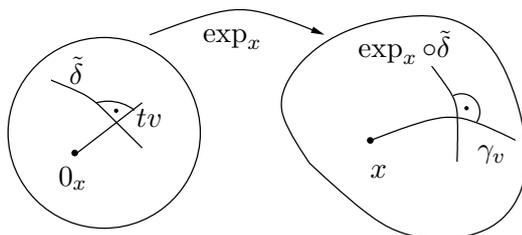
*Beweis.* Sei  $x \in M$  fix und

$$\mathcal{C} := \{y \in M \mid \text{Es existiert eine gebrochene Geodäte von } x \text{ nach } y.\}$$

Dann ist  $M = \mathcal{C}$ , denn  $\mathcal{C} \neq \emptyset$ , da  $x \in \mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}$  ist offen: Sei  $y \in \mathcal{C}$  und  $U(y)$  Normalenumgebung von  $y$ . Für jedes  $z \in U(y)$  existiert nun eine radiale Geodäte von  $y$  nach  $z$ , somit ist  $U(y) \subset \mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}$  ist abgeschlossen, d.h.  $M \setminus \mathcal{C}$  ist offen:  $y \in M \setminus \mathcal{C}$  und  $U(y)$  eine Normalenumgebung. Für  $z \in U(y)$  ist  $z \in M \setminus \mathcal{C}$  und damit  $U(y) \subset M \setminus \mathcal{C}$ . Da  $M$  zusammenhängend ist, folgt  $M = \mathcal{C}$ . □

**Ziel:** Die Exponentialabbildung hat folgende geometrische Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \exp_x : \tilde{U} \subset T_x M &\rightarrow U(x) \subset M \\ \text{Strecke } tv &\rightarrow \text{ radiale Geodäte } \gamma_v(t) = \exp_x(tv) \end{aligned}$$



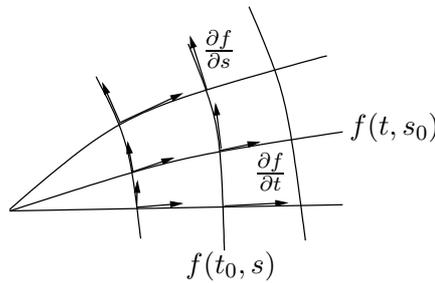
$\exp_x$  erhält die Orthogonalität zu den radialen Richtungen, d.h. sie ist eine "Radiale Isometrie". (Schneidet  $\tilde{\delta}$  den Strahl  $tv$  senkrecht, so schneidet  $\delta = \exp_x \circ \tilde{\delta}$  die radiale Geodäte  $\gamma_v$  senkrecht.) Dazu benötigen wir das folgende Hilfsmittel:

**Definition.** Sei  $A \subset \mathbb{R}^2$  eine zusammenhängende Menge, so dass  $U \subset A \subset \text{cl}(U)$  für eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Eine parametrisierte Fläche in einer Mannigfaltigkeit  $M^n$  ist eine glatte Abbildung<sup>14</sup>  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ . Ein Vektorfeld entlang einer parametrisierten Fläche  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} X : A \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow TM \\ (t, s) &\mapsto X(t, s) \in T_{f(t,s)}M, \end{aligned}$$

die  $C^\infty$  ist (im üblichen Sinne wie für Vektorfelder entlang Kurven).

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  eine parametrisierte Fläche.



Die Kurven  $t \rightarrow f(t, s_0)$  bzw.  $s \rightarrow f(t_0, s)$  heißen Koordinatenlinien von  $f$  (hierbei ist  $s_0$  und  $t_0$  fix). Leitet man die Koordinatenlinien nach ihrem jeweiligen Parameter ab, so erhält man Vektorfelder  $\frac{\partial f}{\partial t}$  bzw.  $\frac{\partial f}{\partial s}$  entlang  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, s_0) := \frac{d}{dt}(f(t, s_0))|_{t=t_0} = df_{(t_0, s_0)}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t_0, s_0)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t_0, s_0) := \frac{d}{ds}(f(t_0, s))|_{s=s_0} = df_{(t_0, s_0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}(t_0, s_0)\right).$$

Sei  $\nabla$  eine kovariante Ableitung auf  $M$  und  $X$  ein Vektorfeld entlang  $f$ . Dann sind die partiellen kovarianten Ableitungen  $\frac{\nabla X}{\partial t}$  und  $\frac{\nabla X}{\partial s}$  die folgendermaßen definierten Vektorfelder entlang  $f$ :

- $\frac{\nabla X}{\partial t}(t_0, s_0)$  ist die kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $X(\cdot, s_0)$  entlang der Koordinatenlinie  $f(\cdot, s_0)$  im Punkt  $t$ .
- $\frac{\nabla X}{\partial s}(t_0, s_0)$  ist die kovariante Ableitung des Vektorfeldes  $X(t_0, \cdot)$  entlang der Koordinatenlinie  $f(t_0, \cdot)$  im Punkt  $s_0$ .

<sup>14</sup>Dabei heißt  $f$  glatt, falls es eine offene Menge  $V \supset A$  und eine  $C^\infty$ -Abbildung  $F : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  mit  $F|_A = f$  gibt. Die Bedingung  $U \subset A \subset \text{cl}(U)$  sichert, dass das Differential  $df_a := dF_a$  für  $a \in A$  unabhängig von der Fortsetzung  $F$  ist.

**Lemma 3.57.** (Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen bei parametrisierten Flächen  $\triangleq$  Schwarz-Lemma der Analysis)

Sei  $M^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit torsionsfreier kovarianter Ableitung  $\nabla$  und  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  eine parametrisierte Fläche. Dann ist

$$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}$$

*Beweis.* Sei  $(U, \varphi)$  Karte um  $f(t, s)$  und  $\varphi(f(t, s)) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s))$ , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} (f(\cdot, \cdot)) \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_i} (f(\cdot, \cdot)) \end{aligned}$$

für  $f(t, s) \in U$ . Aus der lokalen Formel für die kovariante Ableitung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} &= \sum_i \left( \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} + \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial t} \frac{\partial x_l}{\partial s} \Gamma_{lk}^i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (f(\cdot, \cdot)) \\ \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s} &= \sum_i \left( \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s} + \sum_{k,l} \frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial x_l}{\partial t} \Gamma_{lk}^i \right) \frac{\partial}{\partial x_i} (f(\cdot, \cdot)). \end{aligned}$$

Da  $\nabla$  torsionsfrei ist, folgt  $\Gamma_{lk}^i = \Gamma_{kl}^i$  und damit die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.58. Gauß-Lemma** Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $v \in D_x \subset T_x M$ . Sei  $\sigma_v(t) = tv \subset T_x M$  der von  $v$  erzeugte Strahl in  $T_x M$ . Sei weiterhin  $w \in T_v(T_x M)$  ein "radialer" Tangentialvektor (d.h.  $w \in \mathbb{R}v$ ) und  $u \in T_v(T_x M)$  beliebig. Dann gilt bei Identifizierung  $T_v(T_x M) = T_x M$ :

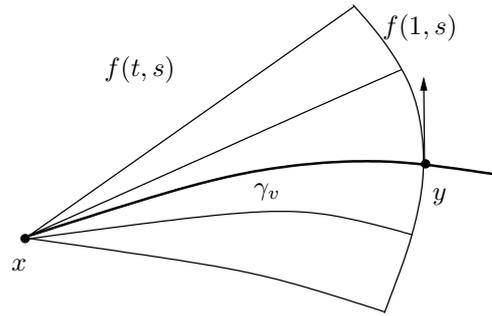
$$g_y((d \exp_x)_v(w), (d \exp_x)_v(u)) = g_x(w, u),$$

wobei  $y = \exp_x(v)$ .

(Insbesondere gilt: schneidet eine Kurve  $\tilde{\delta}(t)$  in  $T_x M$  den Strahl  $\sigma_v(t)$  in  $v$  orthogonal, so schneidet die Bildkurve  $\delta(t) = \exp_x(\tilde{\delta}(t))$  die radiale Geodäte  $\gamma_v(t)$  in  $y = \exp_x(v)$  orthogonal.)

*Beweis.* Da  $(d \exp_x)_v$  linear ist, genügt es die Behauptung für  $X = v$  zu beweisen. Betrachten wir die parametrisierte Fläche

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ (t, s) &\mapsto f(t, s) := \exp_x(t(v + su)). \end{aligned}$$



Aus  $\gamma_v(t) = f(t, 0)$  folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(1, 0) &= \frac{d}{dt}(\gamma_v(t))|_{t=1} = \frac{d}{dt}(\exp_x(tv))|_{t=1} \\ &\stackrel{\text{KR}}{=} (d \exp_x)_v(v) \\ \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0) &= \frac{d}{ds}(f(1, s)|_{s=0}) = \frac{d}{ds}(\exp_x(v + su))|_{s=0} \\ &= (d \exp_x)_v(u). \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also

$$g_y\left(\frac{\partial f}{\partial t}(1, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(1, 0)\right) = g_x(v, u). \quad (*)$$

Da der Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  metrisch ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)\right)\right) = g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)\right).$$

$f(t, s) = \exp_x(t(v + su))$  ist für ein festes  $s$  eine radiale Geodäte und  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, s)$  ihr Tangentialvektor, d.h.  $\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) = 0$ . Mit dem Symmetrie-Lemma folgt nun

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)\right)\right) = g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)\right)\right).$$

Da  $\frac{\partial f}{\partial t}(t, s)$  Tangentialvektor an der radialen Geodäte  $\exp_x(t(v + su))$  mit Anfangsvektor  $(v + su)$  ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\partial f}{\partial s}(t, s)\right)\right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s}(g_x(v + su, v + su)) \\ &= s \cdot g_x(u, u) + g_x(v, u) \end{aligned}$$

(da Länge des Tangentialvektors konstant ist). Für den Parameter  $s = 0$  folgt

$$\frac{d}{dt} \underbrace{g\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)\right)}_{h(t)} = g_x(v, u) \quad \forall t \in [0, 1]$$



da

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}(y) &= \frac{d}{dt}(\varphi_{\mathbf{a}}^{-1}(\varphi_{\mathbf{a}}(y) + t\mathbf{a}_i))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\exp_x(x_1(y)\mathbf{a}_1 + \dots + (x_i(y) + t)\mathbf{a}_i + \dots + x_n(y)\mathbf{a}_n))|_{t=0} \\ &= (d\exp_x)_v(\mathbf{a}_i).\end{aligned}$$

Die Normalkoordinaten um  $x$  verhalten sich *im Punkt  $x$*  in 1. Näherung so wie die Euklidischen Koordinaten von  $\mathbb{R}^{n,k} \simeq T_x M$ :

**Satz 3.59.** *Sei  $(M^n, g)$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $(U(x), \varphi_{\mathbf{a}})$  Normalkoordinaten um  $x \in M$ . Dann gilt*

1.  $g_{ij}(x) = \delta_{ij}\epsilon_j$  mit  $\epsilon = \begin{cases} -1 & , \text{ falls } j \leq k \\ 1 & , \text{ falls } j > k \end{cases}$
2.  $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$ .

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Es gilt

$$\begin{aligned}g_{ij}(x) &= g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(x), \frac{\partial}{\partial x_j}(x)\right) \\ &= g_x((d\exp_x)_0(\mathbf{a}_i), (d\exp_x)_0(\mathbf{a}_j)) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.54}}{=} g_x(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}\epsilon_j.\end{aligned}$$

2. Wir betrachten die Geodäten-Gleichung für eine radiale Geodäte  $\gamma_v(t)$  in Normalkoordinaten:

$$y = \exp_x(v), \varphi_{\mathbf{a}}(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y)) = (v_1, \dots, v_n).$$

Dann ist

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\gamma_v(t)) = (tx_1(y), \dots, tx_n(y)) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

und damit

$$\gamma'_i(t) \equiv x_i(y) \text{ bzw. } \gamma''(t) = 0.$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t))x_i(y)x_j(y) = 0 \quad t \in [0, \varepsilon], k = 1, \dots, n.$$

Wir betrachten nun speziell den Vektor  $v = (\mathbf{a}_r + \mathbf{a}_s)$ .

$$x_i(y) = \delta_{ir} + \delta_{is}.$$

Es gilt also

$$\Gamma_{rs}^k(\gamma_v(t)) + \Gamma_{sr}^k(\gamma_v(t)) = 2\Gamma_{rs}^k(\gamma_v(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, \varepsilon]$$

und insbesondere für  $t = 0$

$$\Gamma_{rs}^k(x) = 0.$$

□

### Konvexe Umgebungen

**Definition.** Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine offene Menge  $W \subset M$  heißt konvex  $\Leftrightarrow W$  ist Normalenumgebung für jeden ihrer Punkte.

Aus Satz 3.55 folgt: Ist  $W \subset M$  konvex, so existiert für je 2 Punkte  $x, y \in W$  eine *eindeutig bestimmte* Geodäte, die  $x$  und  $y$  in  $W$  verbindet. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass *jeder* Punkt von  $M$  eine konvexe Umgebung besitzt. Dazu betrachten wir die  $C^\infty$ -Abbildung

$$\begin{aligned} E : D \subset TM &\rightarrow M \times M \\ v &\mapsto (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v)). \end{aligned}$$

Dabei sei  $\pi(v)$  der Fußpunkt von  $v$  im Tangentialbündel  $TM$  und

$$D := \{v \in TM \mid 1 \in I_v\}.$$

$D \subset TM$  ist offen (Theorie der Differentialgleichungen) und es gilt

$$D_x = D \cap T_x M \quad \forall x \in M.$$

**Lemma 3.60.** Sei  $x \in M$  und  $v \in T_x M$ . Ist nun

$$(d\exp_x)_v : T_v(T_x M) \rightarrow T_{\exp_x(v)} M$$

ein Isomorphismus, so ist auch

$$dE_v : T_v(TM) \rightarrow T_{(x, \exp_x(v))}(M \times M)$$

ein Isomorphismus. Insbesondere ist  $E : D \subset TM \rightarrow M \times M$  ein lokaler Diffeomorphismus um  $0_x \in T_x M \subset TM$ .

*Beweis.* Sei  $v \in T_x M$  ein Vektor für den  $(d\exp_x)_v$  ein Isomorphismus ist. Aus Dimensionsgründen genügt es zu zeigen, dass  $dE_v$  injektiv ist. Sei  $w \in T_v(TM)$  und  $dE_v(w) = 0$ . Da  $pr_1 \circ E = \pi =$  Projektion im Tangentialbündel, folgt aus

$$d\pi_v(w) = dpr_1 \circ dE_v(w) = 0$$

die Eigenschaft

$$w \in \underbrace{\ker d\pi_v}_{n\text{-dim}} = \underbrace{T_v(T_x M)}_{n\text{-dim}}$$

d.h.  $w$  ist ein "vertikaler Vektor". Damit ist

$$(dE_v)(w) = (0, (d\exp_x)_v(w)) = 0$$

und  $(d\exp_x)_v(w) = 0$ , bzw.  $w = 0$ . □

**Satz 3.61.** *( $M^n, g$ ) semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder Punkt  $x \in M$  besitzt eine konvexe Umgebung.*

*Beweis.* Sei  $U(x)$  eine Normalenumgebung von  $x$  und  $\varphi_a = (x_1, \dots, x_n)$  Normalkoordinaten um  $x$  auf  $U(x)$ . Wir betrachten die Funktion (unabhängig von  $\text{sign}(g)$ )

$$\begin{aligned} N : U(x) &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto x_1^2(y) + \dots + x_n^2(y). \end{aligned}$$

Da  $U(x)$  offen, gilt für hinreichend kleines  $\delta > 0$

$$K(0, \delta) \subset \varphi_a(U(x))$$

Sei für solches  $\delta$   $V_\delta(x) := \varphi_a^{-1}(K(0, \delta))$ .

Um kontrollieren zu können, dass Geodäten unsere gesuchte geodätische Kugel nicht {verlassen und wiederkommen können}, schränken wir zunächst unsere Mannigfaltigkeit auf eine so kleine geodätische Kugel ein, dass das Bild einer jeden Geodäte unter der Kartenabbildung  $\varphi$  sich vom Punkt  $\varphi(x)$  nicht {erst entfernen und dann wieder nähern kann}, indem wir Folgendes fordern: Ist  $r$  der euklidische Abstand zum Punkt  $\varphi(x)$  im  $\mathbb{R}^n$ , so soll  $R := r \circ \varphi \circ \gamma$  konvex sein. (Dann nimmt er auf einem abgeschlossenen Intervall sein Maximum stets auf dem Rand an.) Weil sich damit einfacher rechnen lässt, aber das Gleiche bezweckt wird, begnügen wir uns mit der Konvexität von  $N := R^2$ . Es genügt dafür bekanntlich  $(R^2)'' > 0$  zu fordern.

$$\begin{aligned} 0 < (R^2)'' &= \left( \sum_k \gamma_k^2 \right)'' \\ &= 2 \sum_k \left( (\gamma_k')^2 + \gamma_k \gamma_k'' \right) && |\gamma \text{ Geodäte} \\ &= 2 \sum_k \left( (\gamma_k')^2 - \gamma_k \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' \gamma_j' \right) \\ &= 2 \sum_k \underbrace{\left( dx_k \otimes dx_k - x_k \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k dx_i \otimes dx_j \right)}_{=: B} (\gamma', \gamma'). \end{aligned}$$

Wegen des Faktors  $x_k$  vereinfacht sich  $B$  in  $x$  zu  $\sum_k (dx_k)^2$ , ist dort und wegen der Stetigkeit auch in einer Umgebung  $V_\delta$  also positiv definit. (Es stellt sich hier also heraus, dass es überhaupt keine Bedeutung hat, Normalkoordinaten zu benutzen.)

Schränken wir jetzt  $M$  auf  $V_\delta$  ein, so gilt für alle  $y, z \in V_\varepsilon \subset V_\delta$ , dass eine Geodäte, die in  $V_\delta$  von  $y$  nach  $z$  verläuft, zwischen den beiden Punkten auch in  $V_\varepsilon$  bleibt, da der Radius in einem der beiden Randpunkte des Definitionsbereiches maximal wird.

Wendet man Lemma 3.49 nun auf  $V_\delta$  (anstelle von  $M$ ) an, sodass man ein diffeomorphes  $E : W \rightarrow V \times V$  erhält, wählt ein  $\varepsilon$ , sodass  $V_\varepsilon \subset V$  und verkleinert den Diffeomorphiebereich  $W$  auf  $E^{-1}(V_\varepsilon \times V_\varepsilon)$ , so verlaufen die Geodäten zwischen  $y, z \in V_\varepsilon$  also alle in  $V_\varepsilon$ , womit  $V_\varepsilon$  konvexe Umgebung von  $x$  ist.  $\square$

**Korollar 3.62.** *Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist  $\gamma : [0, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodäte und existiere eine stetige Fortsetzung  $\tilde{\gamma} : [0, b + \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  von  $\gamma$  (die keine Geodäte sein muss). Dann existiert eine Fortsetzung von  $\gamma$  zu einer Geodäten auf  $[0, b + \varepsilon)$  (für ein  $\varepsilon > 0$ ).*

*Beweis.* Sei  $V \subset M$  eine konvexe Umgebung von  $\tilde{\gamma}(b)$ . Dann existiert  $0 < a < b$ , sodass  $\tilde{\gamma}|_{[a, b]} \subset V$ .  $V$  ist Normalenumgebung von  $\gamma(a)$ , d.h.  $\gamma|_{[a, b]}$  ist ein Anfangsstück einer radialen Geodäte. Setzen wir diese radiale Geodäte bis zum Rand von  $V$  fort. Da  $\tilde{\gamma}(b) \notin \partial V$ , ist die radiale Geodäte auf  $[0, b + \varepsilon)$  für ein  $\varepsilon > 0$  definiert.  $\square$

### 3.10 Geodäten und Abstände in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Der Satz von Hopf und Rinow

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur zusammenhängende **Riemannsche** Mannigfaltigkeiten  $(M^n, g)$  und studieren die Abstands-minimierenden Eigenschaften von Geodäten in Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Sei  $(M^n, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x, y \in M$ .

$\Omega(x, y) :=$  Menge der stückweise glatten Kurven, die  $x$  und  $y$  verbinden.

**Definition.**  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $(x, y) \mapsto \inf \{l(\gamma) \mid \gamma \in \Omega(x, y)\}$  heißt Abstand von  $x$  und  $y$  in  $(M, g)$ .

**Bemerkungen:**

1.  $d$  ist offensichtlich  $\geq 0$  und symmetrisch.  $d$  erfüllt die  $\Delta$ -Ungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

denn: Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\alpha \in \Omega(x, z)$ ,  $\beta \in \Omega(z, y)$  mit

$$l(\alpha) < d(x, z) + \varepsilon, \quad l(\beta) < d(z, y) + \varepsilon.$$

Dann ist  $\alpha * \beta \in \Omega(x, y)$ <sup>15</sup> und es gilt

$$l(\alpha * \beta) = l(\alpha) + l(\beta)$$

$$d(x, y) \leq l(\alpha * \beta) < d(x, z) + d(z, y) + 2\varepsilon.$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt Behauptung. Wir werden später zeigen, dass  $d$  eine Metrik auf  $M$  ist. (Dafür ist noch  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$  nachzuweisen.)

---

<sup>15</sup>Hierbei bezeichne  $\alpha * \beta$  die Verknüpfung von Wegen.

2. In pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann man zwar  $d$  ebenfalls definieren, dies ist aber *keine* Metrik:

Für  $(\mathbb{R}^2, g = -dx^2 + dy^2)$  ist  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$   $\gamma(t) := (t, t)$  isotrop, und damit gilt

$$l(\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\gamma(0), \gamma(1)) = 0.$$

3. Es muss keine Kurve geben, deren Länge gleich dem Abstand ist

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad g = dx^2 + dy^2.$$

$$\begin{array}{ccc} \dot{a} & \dot{0} & \dot{b} \end{array}$$

**Definition.** Eine Kurve  $\gamma \in \Omega(x, y)$  heißt minimierend  $:\Leftrightarrow l(\gamma) = d(x, y)$ . Sei  $(M^n, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ .

Sei  $U(x)$  eine Normalenumgebung von  $x$  mit Exponentialabbildung

$$\exp_x : \tilde{U}(0) \subset T_x M \rightarrow U(x) \subset M.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  so dass  $\underbrace{cl(K_\varepsilon(0))}_{\text{abg. Kugel in } (T_x M, g_x)} \subset \tilde{U}(0)$ . Dann heißt

$$B_\varepsilon(x) := \exp_x(K_\varepsilon(0)) \subset U(x)$$

geodätische Kugel um  $x$ <sup>16</sup> und

$$S_\varepsilon(x) := \exp_x(\partial(K_\varepsilon(0))) = \exp_x\left(\left\{v \in \tilde{U} \mid \|v\| = \varepsilon\right\}\right)$$

geodätische Sphäre um  $x$ .

Seien  $\varphi_a = (x_1, \dots, x_n)$  Normalkoordinaten um  $x$  auf  $U(x)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} y \in S_\varepsilon &\Leftrightarrow \|\exp_x^{-1}(y)\|^2 = \varepsilon^2 \\ &\Leftrightarrow x_1(y)^2 + \dots + x_n(y)^2 = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Aus Satz 3.61 erhält man

**Satz 3.63.** Sei  $(M^n, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt  $x \in M$  existiert eine geodätische Kugel  $B_c(x)$  so dass für jedes  $0 < a \leq c$  die geodätischen Kugeln  $B_a(x)$  um  $x$  konvex sind.

Zudem gilt der folgende Satz:

---

<sup>16</sup> $B_\varepsilon(x)$  ist ebenfalls eine Normalenumgebung von  $x$ .

**Satz 3.64.** Sei  $(M^n, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $U(x)$  eine Normalenumgebung um  $x$ . Sei  $y \in U(x)$  und  $\gamma_v : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow U(x)$ , die eindeutig bestimmte radiale Geodäte von  $x$  nach  $y$ , sodass  $v = \exp_x^{-1}(y)$ . Dann ist  $\gamma_v$  die eindeutig bestimmte kürzeste Kurve von  $x$  nach  $y$  in  $U(x)$ , d.h.

$$\begin{aligned} l(\alpha) &\geq l(\gamma_v) \quad \forall \alpha \in \Omega(x, y) \\ l(\alpha) &= l(\gamma_v) \Leftrightarrow \alpha = \gamma_v \circ \tau. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\tau$  eine monoton wachsende Umparametrisierung von  $\gamma_v$ .

*Beweis.* Sei  $\alpha \in \Omega(x, y)$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow U(x)$  (d.h. evtl. umparametrisiert auf das Intervall  $[0, 1]$ ).  $\exp_x : \tilde{U}(0) \subset T_x M \rightarrow U(x)$  ist ein Diffeomorphismus. Sei

$$\tilde{v}(t) = \exp_x^{-1}(\alpha(t)) \in \tilde{U}(0) \subset T_x M.$$

O.B.d.A. gelte  $\tilde{v}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (0, 1]$  (sonst lässt man das Anfangsintervall weg, mit dem man  $x$  mit  $x$  verbindet.) Dann ist  $\tilde{v}(t) = r(t) \cdot v(t)$ , wobei  $\|v(t)\| \equiv 1$  und  $r : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  stückweise glatt ist. Damit gilt insbesondere auch  $\|\tilde{v}(t)\| = r(t)$ . Aus  $\alpha(t) = \exp_x(r(t) \cdot v(t))$  und mit Ausnahme der endlich vielen "Ecken" von  $\alpha(t)$  gilt dann:

$$\alpha'(t) = (d\exp_x)_{\tilde{v}(t)} \left( \underbrace{r'(t)v(t)}_{\text{tangential an den Strahl } \sigma_{v(t)}} + \underbrace{r(t) \cdot v'(t)}_w \right).$$

Aus dem Gauß-Lemma (Satz 3.58) folgt

$$\begin{aligned} g(\alpha'(t), \alpha'(t)) &= r'(t)^2 \underbrace{g_x(v(t), v(t))}_{\equiv 1} + g(\hat{w}, \hat{w}) \quad \text{mit } \hat{w} = (d\exp_x(w)) \\ &\stackrel{\text{Riem. MF}}{\geq} r'(t)^2. \quad (*) \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\|\alpha'(t)\| \geq |r'(t)| \geq r'(t). \quad (**)$$

Wir betrachten nun  $\int_{\varepsilon}^1 \|\alpha'(t)\| dt \geq \int_{\varepsilon}^1 r'(t) dt = r(1) - r(\varepsilon)$ . Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt  $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ , da  $\tilde{v}(0) = 0_x$ . Des Weiteren ist

$$r(1) = \|\tilde{v}(1)\| = \|\exp_x^{-1}(y)\| = \|v\| = l(\gamma_v),$$

sodass insgesamt

$$l(\alpha) \geq l(\gamma_v).$$

Die Gleichheit kann nur auftreten, wenn Lebesgue-fast überall in  $(*)$  die Gleichheit eintritt, d.h.

$$l(\alpha) = l(\gamma_v) \Rightarrow g(\hat{w}, \hat{w}) \equiv 0 \quad \text{d.h. } \hat{w} = 0,$$

da aber nach Konstruktion  $r(t) \geq 0$ , muss fast überall  $v'(t) \equiv 0$  sein, sodass

$$v(t) \equiv v_0.$$

Wir erhalten dann wegen Gleichheit in (\*\*)

$$\tilde{v}(t) = r(t) \cdot v_0 \quad \text{mit } r'(t) \geq 0.$$

$r(t)$  ist also monoton wachsend. Aus  $\tilde{v}(1) = v = r(1)v_0$ , bzw.  $v_0 = \frac{1}{r(1)}v$  folgt mit

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \frac{r(t)}{r(1)} \cdot v \quad \text{und damit} \\ \alpha(t) &= \exp_x\left(\frac{r(t)}{r(1)} \cdot v\right). \end{aligned}$$

D.h.  $\alpha(t)$  ist eine monoton wachsende Umparametrisierung von  $\gamma_v(s) = \exp_x(s \cdot v)$ , mit

$$\tau(t) = \frac{r(t)}{r(1)}.$$

□

Für die geodätischen Kugeln um  $x$  gilt sogar noch mehr:

**Satz 3.65.** *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $B_\varepsilon(x)$  eine geodätische Kugel um  $x, y \in B_\varepsilon(x)$ . Dann ist die radiale Geodäte  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow B_\varepsilon(x)$  von  $x$  nach  $y$  die kürzeste Kurve zwischen  $x$  und  $y$  in ganz  $M$ . Insbesondere gilt: Ist  $\alpha$  eine stückweise  $C^\infty$ -Kurve, die in  $x$  beginnt und  $B_\varepsilon(x)$  verlässt, dann gilt*

$$l(\alpha) \geq \varepsilon.$$

*Beweis.* Nach Satz 3.64 ist  $\gamma_v$  die kürzeste Kurve von  $x$  nach  $y$  innerhalb von  $B_\varepsilon(x)$ . Nach Definition von  $B_\varepsilon(x)$  gilt  $l(\gamma_v) = \|v\| < \varepsilon$ . Es genügt also zu zeigen: Ist  $\alpha : [0, b) \rightarrow U(x)$  eine stückweise  $C^\infty$ -Kurve mit  $\alpha(0) = x$ , die  $B_\varepsilon(x)$  verlässt, dann gilt  $l(\alpha) \geq \varepsilon$ . Also angenommen  $\alpha$  verlässt  $B_\varepsilon(x)$ , dann schneidet  $\alpha$  jede geodätische Sphäre  $S_a(x)$  für  $0 < a < \varepsilon$ . Sei nun  $a$  fix und  $t_0 \in (0, b)$  der kleinste Parameter mit  $\alpha(t_0) \in S_a(x)$ , dann ist

$$\alpha|_{[0, t_0]} \subset cl(B_a(x)) \subset B_\varepsilon(x).$$

Für die radiale Geodäte  $\gamma$  von  $x$  nach  $\alpha(t_0)$  gilt  $l(\gamma) = a$  und nach Satz 3.64 folgt also

$$l(\alpha) \geq l(\alpha|_{[0, t_0]}) \geq l(\gamma) = a \quad \forall a < \varepsilon$$

bzw.  $l(\alpha) \geq \varepsilon$ . □

**Folgerungen.** Sei  $B_\varepsilon(x)$  eine geodätische Kugel um  $x$  und  $S_\varepsilon(x)$  die geodätische Sphäre vom Radius  $\varepsilon$ . Dann gilt:

1.  $\forall y \in B_\varepsilon(x)$  ist

$$d(x, y) = l(\gamma_v) = \|v\|.$$

Dabei ist  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$  die radiale Geodäte von  $x$  nach  $y = \exp_x(v)$ .

2. Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x) &= \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\} \\ S_\varepsilon(x) &= \{y \in M \mid d(x, y) = \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Aus dem soeben Bewiesenen folgt insbesondere, dass Geodäten lokal minimierende Kurven sind:

**Satz 3.66.** *Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodäte in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\gamma$  "lokal minimierend", d.h. zu jedem Kurvenpunkt  $\gamma(t_0)$  existiert eine Umgebung  $V(\gamma(t_0))$ , so dass  $\forall [s_0, s_1] \subset I$  mit  $s_0 < t_0 < s_1$  und  $\gamma([s_0, s_1]) \subset V(t_0)$  das Geodätenstück  $\gamma|_{[s_0, s_1]}$  minimierend ist:*

$$d(\gamma(s_0), \gamma(s_1)) = l(\gamma|_{[s_0, s_1]}).$$

*Beweis.* Sei  $x = \gamma(t_0)$  und  $B_a(x)$  eine geodätische Kugel um  $x$  und  $J(t_0) \subset I$  ein Parameterbereich um  $t_0$ , die so klein gewählt sind, dass die Kurve  $\gamma|_J$  die Kugel  $B_a(x)$  in einem zusammenhängenden Parameterbereich schneidet. Seien nun  $x_0 = \gamma(s_0), x_1 = \gamma(s_1) \in B_a(x)$ . Dann ist  $\text{Im}\gamma|_{[s_0, s_1]} \subset B_a(x)$  und  $\gamma|_{[s_0, s_1]}$  ist eine radiale Geodäte aus  $\gamma(s_0)$  in der Normalenumgebung  $B_a(x)$  von  $\gamma(s_0)$ . Nach Satz 3.64 ist dann  $d(x_0, x_1) = l(\gamma|_{[s_0, s_1]})$ .  $\square$

Andererseits gilt

**Satz 3.67.** *Sei  $(M^n, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x, y \in M$ . Sei  $\alpha \in \Omega(x, y)$  eine minimierende Kurve, die proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist  $\alpha$  eine Geodäte (also insbesondere auch  $C^\infty$ ).*

*Beweis.* Sei  $\alpha : I \rightarrow M$  eine minimierende Kurve,  $t \in I$  und  $B_\varepsilon(\alpha(t))$  eine konvexe geodätische Kugel um  $\alpha(t)$ . Dann gilt für ein Teilintervall  $t \in [t_1, t_2] \subset I$  dass

$$\alpha([t_1, t_2]) \subset B_\varepsilon(\alpha(t)).$$

Da  $\alpha$  minimierend ist, folgt aus der  $\Delta$ -Ungleichung

$$l(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)).$$

Nun ist  $B_\varepsilon(\alpha(t))$  eine Normalenumgebung von  $\alpha(t_1)$ . Nach Satz 3.64 ist  $\alpha|_{[t_1, t_2]}$  eine monoton wachsende Umparametrisierung der radialen Geodäten  $\gamma$  von  $\alpha(t_1)$  nach  $\alpha(t_2)$ . Sei  $\tau : [t_1, t_2] \rightarrow [0, 1]$  die Umparametrisierung:

$$\alpha(t) = \gamma(\tau(t)).$$

Da  $\alpha$  proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, folgt

$$\|\alpha'(t)\| = \text{konst.} = \underbrace{\|\gamma'(\tau(t))\|}_{\text{konst.}} \cdot \underbrace{|\tau'(t)|}_{\geq 0}$$

und damit ist

$$\tau'(t) \equiv \text{konst.} \geq 0.$$

Somit muss  $\tau$  eine *affine* Transformation sein:

$$\tau(t) = at + b.$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch in den "Ecken" von  $\alpha$ . Da  $\gamma$  eine Geodäte ist, ist die affine Umparametrisierung  $\alpha|_{[t_1, t_2]}$  auch eine Geodäte. Da dies für jedes  $t \in I$  gilt, ist  $\alpha$  insgesamt eine Geodäte.  $\square$

**Satz 3.68.** Sei  $(M^n, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  der Abstand auf  $(M, g)$ . Dann ist  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Die von der Metrik  $d$  induzierte Topologie auf  $M$  stimmt mit der MF-Topologie überein.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1.  $d$  ist Metrik auf  $M$ :

Es ist nur noch zu zeigen, dass gilt:

$$d(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y :$$

Sei  $x \neq y$ . Da  $M$   $T_2$ -Raum ist, existiert eine geodätische Kugel  $B_\varepsilon(x)$ , die  $y$  nicht enthält. Nach Satz 3.64 ist jede Kurve  $\alpha \in \Omega(x, y)$  länger als  $\varepsilon$ , da sie  $B_\varepsilon(x)$  verlässt, d.h.

$$d(x, y) \geq \varepsilon > 0.$$

2. Für die geodätischen Kugeln in  $(M, g)$  gilt

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Da  $\exp_x$  ein Diffeomorphismus ist, sind die geodätischen Kugeln  $B_\varepsilon(x)$  sowohl in der MF-Topologie von  $M$  als auch im metrischen Raum  $(M, d)$  offen, die Topologie stimmt damit überein:

- Sei  $V \subset M$  offen in  $(M, d)$ . Dann existiert  $\forall x \in V$  eine Kugel  $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset V$ , sodass

$$V = \underbrace{\bigcup_{x \in V} B_{\varepsilon(x)}(x)}_{\text{offen in } M}.$$

- $U \subset M$  offen in  $M$  (MF-Topologie). Nach Satz 3.63 existiert  $\forall x \in U$  eine geodätische Kugel  $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset U$ , d.h.

$$U = \underbrace{\bigcup_{x \in V} B_{\varepsilon(x)}(x)}_{\text{offen in } (M, d)} .$$

□

Bevor wir nun zum *Satz von Hopf und Rinow* kommen, noch ein wichtiges Lemma:

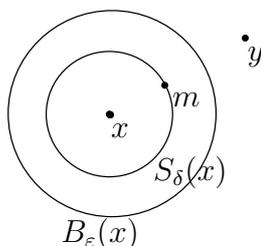
**Lemma 3.69.** *Ist  $x \in M$  ein Punkt für den  $\exp_x$  auf  $T_x M$  definiert ist, so existiert für jeden Punkt  $y \in M$  eine minimierende Geodäte von  $x$  nach  $y$ .*

*Beweis.* Sei  $B_{\varepsilon}(x)$  eine geodätische Kugel um  $x$  mit  $y \notin B_{\varepsilon}(x)$  (sonst ist die Behauptung trivial). Sei  $0 < \delta < \varepsilon$ . Betrachten wir die geodätische Sphäre  $S_{\delta}(x)$ .  $S_{\delta}(x)$  ist nach Definition kompakt (da  $\exp_x$  stetig). Die Metrik definiert eine stetige Funktion

$$\begin{aligned} d_y : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(y, z) \end{aligned}$$

$d_y$  nimmt dann auf  $S_{\delta}(x)$  ein Minimum an. Sei  $m \in S_{\delta}(x)$  mit  $d(y, m) = \min\{d(y, z) \mid z \in S_{\delta}(x)\}$ , dann gilt

$$d(x, m) + d(m, y) = d(x, y). \quad (*)$$



Sei nämlich  $\alpha \in [0, b] \rightarrow M$  eine Kurve von  $x$  nach  $y$  und sei  $0 < a < b$  der kleinste Parameter mit  $\alpha(a) \in S_{\delta}(x)$ . Sei nun

$$\alpha_1 = \alpha|_{[0, a]} \quad , \quad \alpha_2 = \alpha|_{[a, b]} .$$

Dann ist

$$l(\alpha) = l(\alpha_1) + l(\alpha_2) \geq \delta + l(\alpha_2),$$

da  $\alpha_1$  Kurve in  $B_\delta(x)$  ist, deren Länge ist nach Satz 3.64  $\geq$  (Länge der radialen Geodäten von  $x \rightarrow \alpha(a) = \delta = d(x, m)$ ). Nach Wahl von  $m$  gilt nun

$$d(m, y) \leq d(\alpha(a), y) \leq l(\alpha_2),$$

und daraus folgt

$$l(\alpha) \geq d(x, m) + d(m, y) \quad \forall \alpha \in \Omega(x, y),$$

und damit

$$d(x, y) \geq d(x, m) + d(m, x).$$

Aus der  $\Delta$ -Ungleichung erhält man dann die Behauptung (\*). Sei nun  $\gamma[0, \infty) \rightarrow M$  die auf  $BL$  parametrisierte radiale Geodäte ( $B_\varepsilon(x)$  ist eine Normalenumgebung) von  $x$  aus, auf der  $m$  liegt:

$$\exp_x^{-1}(m) = \delta v \quad \text{für ein } v \in T_x M \text{ mit } \|v\| = 1,$$

und

$$\gamma(t) = \exp_x(tv).$$

(Nach Voraussetzung ist  $\gamma(t) \forall t \in [0, \infty)$  definiert.) *Behauptung:* Sei  $d_0 = d(x, y)$ , dann gilt:

$$\gamma(d_0) = y. \quad (**)$$

Sei nämlich

$$T := \{t \in [0, d_0] \mid t + d(\gamma(t), y) = d_0\}, \quad \text{beachte } t = l(\gamma|_{[0,t]}) = d(x, \gamma(t)).$$

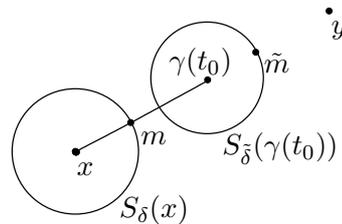
Nach (\*) ist  $\delta \in T$ .  $T$  ist aus Stetigkeitsgründen abgeschlossen in  $[0, d_0]$ . Sei dann  $t_0 = \max\{t \in T\} \in [0, d_0]$ , dann ist

$$t_0 \geq \delta > 0.$$

Wir zeigen, dass  $t_0 = d_0$ , damit wäre

$$d_0 + d(\gamma(d_0), y) = d_0 \Rightarrow \gamma(d_0) = y.$$

Angenommen  $t_0 < d_0$ :



Dann findet man eine geodätische Sphäre  $S_\gamma(\gamma(t_0))$ , sodass

$$\underbrace{\tilde{\delta}}_{=d(\gamma(t_0), \tilde{m})} + d(\underbrace{\tilde{\gamma}(\tilde{\delta})}_{\tilde{m}}, y) = d(\gamma(t_0), y).$$

Dann ist

$$t_0 + \tilde{\delta} + d(\tilde{m}, y) = d(\gamma(t_0), y) + t_0 = d(x, y), \quad \text{da } t_0 \in T, \quad d(x, y) = d_0$$

und damit

$$t_0 + \tilde{\delta} + d(\tilde{m}, y) = d(x, y) \leq d(x, \tilde{m}) + d(\tilde{m}, y) \Rightarrow t_0 + \tilde{\delta} \leq d(x, \tilde{m}).$$

Aus der  $\Delta$ -Ungleichung folgt aber

$$d(x, \tilde{m}) \leq \underbrace{d(x, \gamma(t_0))}_{t_0} + \underbrace{d(\gamma(t_0), \tilde{m})}_{\tilde{\delta}}$$

d.h. es tritt eine Gleichheit ein:

$$t_0 + \tilde{\delta} = d(x, \tilde{m}).$$

Wir setzen nun  $\gamma_1 = \gamma|_{[0, t_0]}$  und  $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}|_{[0, \tilde{\delta}]}$ . Dann ist

$$t_0 = l(\gamma_1) \quad \text{und} \quad \tilde{\delta} = l(\tilde{\gamma}_1).$$

Die stückweise  $C^\infty$ -Kurve  $\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1$  von  $x$  nach  $\tilde{m}$  ist nach Bogenlänge parametrisiert, hat die Länge  $t_0 + \tilde{\delta}$  und es gilt

$$l(\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1) = d(x, \tilde{m}),$$

sie ist somit *minimierend*! Satz 3.67 liefert nun, dass  $\gamma_1 * \tilde{\gamma}_1$  sogar eine Geodäte ist, also insbesondere glatt, d.h. es liegt in  $\gamma(t_0)$  keine "Ecke" vor, und damit ist zwangsläufig

$$\gamma(t_0 + \tilde{\delta}) = \tilde{m}.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Maximalität von  $t_0 \neq d_0$ , da

$$\begin{aligned} & d(\gamma(t_0), \tilde{m}) + d(\tilde{m}, y) \stackrel{(*)}{=} d(\gamma(t_0), y) \\ \Rightarrow & t_0 + d(\gamma(t_0), \tilde{m}) + d(\tilde{m}, y) \stackrel{t_0 \in T}{=} d_0 \\ \Rightarrow & t_0 + \tilde{\delta} + d(\gamma(t_0 + \tilde{\delta}), y) = d_0 \end{aligned}$$

Und damit wäre  $t_0 < t_0 + \delta' \in T$ . Widerspruch! D.h.  $t_0 = d_0$ . □

**Satz 3.70. Theorem von Hopf und Rinow.** Sei  $(M^n, g)$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $(M^n, g)$  ist geodätisch vollständig.
2. Der metrische Raum  $(M, d)$  ist vollständig.
3. Jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge von  $M$  ist kompakt.
4. Es existiert ein Punkt  $x \in M$  so dass  $\exp_x$  auf ganz  $T_x M$  definiert ist.

Ist  $(M^n, g)$  vollständig, so existiert für je 2 beliebige Punkte  $x, y \in M$  eine minimierende Geodäte  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$ :  $d(x, y) = l(\gamma)$ .

**Bemerkung:** Es folgt

1. Jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.
2. In einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit kann man Abstände berechnen, indem man alle Geodäten von  $x$  nach  $y$  bestimmt und deren Länge berechnet.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

- 4.  $\Rightarrow$  3. *Behauptung:* Existiert ein  $x \in M$ , sodass  $\exp_x$  auf ganz  $T_x M$  definiert ist, und ist  $A \subset M$  abgeschlossen und beschränkt, dann ist  $A$  kompakt.

Aus Lemma 3.69 folgt: Ist  $y \in A$ , so existiert eine minimierende Geodäte  $\gamma_y : [0, 1] \rightarrow M$  von  $x$  nach  $y$ :

$$d(x, y) = l(\gamma_y) = \|\gamma_y'(0)\|.$$

Da  $A$  beschränkt ist, existiert ein  $C > 0$ , so dass

$$\forall y \in A \quad d(x, y) \leq C \quad (A \subset cl(K_C(x))).$$

Und so ist

$$\gamma_y'(0) \in \{v \in T_x M \mid \|v\| \leq C\} := \tilde{K}_C \subset T_x M.$$

$\tilde{K}_C$  ist kompakt,  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  stetig, und damit ist  $\exp_x(\tilde{K}_C)$  kompakt in  $M$  und enthält  $A$ . Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist jedoch kompakt.

- 3.  $\Rightarrow$  2. *Behauptung:* Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge ist kompakt. Dann ist  $(M, d)$  vollständig.

Sei  $\{x_n\}$  eine CF in  $(M, d)$ . Dann ist  $A = \{x_n\}$  eine beschränkte Menge.  $cl(A)$  ist somit beschränkt und abgeschlossen und nach Voraussetzung kompakt bzw. folgenkompakt. D.h. jede Folge in  $cl(A)$  hat eine konvergente Teilfolge. Da  $\{x_n\}$  eine CF ist, die eine konvergente Teilfolge enthält, ist  $\{x_n\}$  konvergent.

- 2.  $\Rightarrow$  1. *Behauptung:* Sei  $(M, d)$  vollständig. Dann ist jede Geodäte ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert.

Sei  $\gamma : I := (a, b) \rightarrow M$  (mit  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ) eine auf BL parametrisierte maximale Geodäte. Angenommen es gibt ein  $b \in \partial I$ . Dann lässt sich  $\gamma$  über  $b$  hinaus als Geodäte fortsetzen, d.h. die Geodäte ist doch nicht maximal.

Sei  $t_n \rightarrow b < \infty$  eine Folge in  $I$ . Dann ist  $\{\gamma(t_n)\}$  eine CF in  $M$ , da

$$d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) \leq l(\gamma|_{[t_n, t_m]}) = |t_n - t_m| \quad (n, m \geq n_0).$$

Nach Voraussetzung konvergiert nun  $\{\gamma(t_n)\}$  in  $M$  gegen ein  $q \in M$ . Ist  $s_n \rightarrow b$  eine andere Folge, dann gilt ebenfalls

$$d(\gamma(t_n), \gamma(s_n)) \leq l(\gamma|_{[s_n, t_n]}) = |t_n - s_n| \rightarrow 0,$$

d.h.  $\{\gamma(s_n)\}$  konvergiert ebenfalls gegen  $q \in M$ . Dann definiert

$$\tilde{\gamma}(b) := \lim_{t_n \rightarrow b} \gamma(t_n) = q$$

eine stetige Fortsetzung von  $\gamma$  in den Punkt  $b$ . Nach Folgerung aus Satz 3.62 ist  $\gamma$  auf  $I \cup K_\varepsilon(b)$  mit  $\varepsilon > 0$  als Geodäte fortsetzbar. Die Widerlegung der Annahme  $\exists b \in \partial I$  bedeutet aber  $I = \mathbb{R}$ .

- 1.  $\rightarrow$  4. *Behauptung:* Ist  $(M, g)$  geodätisch vollständig, dann existiert ein  $x \in M$ , sodass  $\exp_x$  auf ganz  $T_x M$  definiert ist.

Dies folgt trivialerweise aus der Definition. □

Die Aussagen des Satzes von Hopf und Rinow gelten *nicht* in pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

1. Beispiel einer *kompakten* pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, die *nicht* geodätisch vollständig ist.

Wir betrachten den  $\mathbb{R}^2$  mit der Lorentz-Metrik

$$g_{(x,y)} = (\cos^4 y - 1)dx^2 - 2dxdy.$$

Diese Metrik ist  $2\pi$ -periodisch, definiert also eine Lorentz-Metrik auf dem *kompakten* Torus  $T^2 = \mathbb{R}^2 / (2\pi \cdot \mathbb{Z} \times 2\pi \cdot \mathbb{Z})$ .  $(T^2, g)$  ist *nicht* geodätisch vollständig, da sich die Geodäte

$$\begin{aligned} \gamma : (0, \infty) &\longrightarrow T^2 = \pi(\mathbb{R}^2) \\ t &\longmapsto \pi\left(\frac{1}{t} - t, \arctan(t)\right) \end{aligned}$$

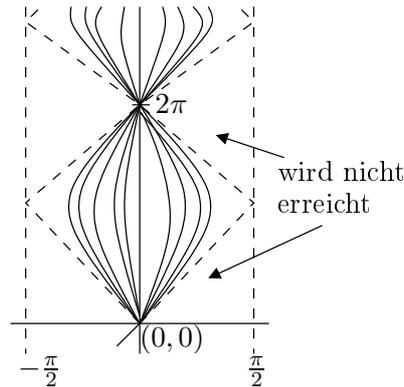
nicht über 0 hinaus nach links fortsetzen lässt.

2. Beispiel einer geodätisch *vollständigen* pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit, in der es Punkte gibt, die man *nicht* durch Geodäten verbinden kann: Anti-de-Sitter-Raum

$$M^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$g_{(x,y)} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-dx^2 + dy^2).$$

Man kann zeigen, dass die Geodäten durch den Punkt  $(0, 0)$  folgenden Verlauf haben und dass alle maximalen Geodäten auf  $\mathbb{R}$  definiert sind.



3. In pseudo-Riemannschen Räumen muss man den kausalen Charakter von Geodäten unterscheiden:

$\mathbb{R}^2$  mit Koordinaten  $(x, y)$ . Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  Funktion mit  $f \equiv 1$  auf  $\{(x, y) \mid |x| \geq 1\}$ ,  $f(x, \cdot)$  symmetrisch,  $\int_{\mathbb{R}} f(0, y) dy < \infty$ . Dann ist die Lorentzmetrik

$$g = f^2(dx^2 - dy^2)$$

raum- und lichtartig geodätisch vollständig, aber zeitartig geodätisch unvollständig. Insbesondere geht die Vollständigkeit von  $(dx^2 - dy^2)$  bei konformer Änderung der Metrik verloren<sup>17</sup>.

### 3.11 Jacobifelder, konjugierte Punkte und Schnittort

Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  die Exponentialabbildung. Wir wissen bereits, dass für das Differential von  $\exp_x$  im Nullvektor  $\vec{0} \in T_x M$

$$(d\exp_x)_{\vec{0}} = \text{id}_{T_x M}$$

gilt. Insbesondere ist  $\exp_x$  ein lokaler Diffeomorphismus um  $\vec{0} \in T_x M$ .

Wir wollen nun wissen, wie groß der Diffeomorphiebereich von  $\exp_x$  ist. Dazu müssen folgende Fragen beantwortet werden:

1. Wie kann man

$$(d\exp_x)_v : T_v(T_x M) = T_x M \rightarrow T_{\exp_x(v)} M$$

für  $v \neq \vec{0}$  bestimmen? Für welche  $v \in T_x M$  ist diese Abbildung ein Isomorphismus?

2. Für welchen Bereich  $U_x \subset T_x M$  ist  $\exp_x : U_x \subset T_x M \rightarrow M$  injektiv?
3. Wir suchen eine Menge  $\text{Cut}(x) \subset M$ , so dass

$$\exp_x : U_x \subset T_x M \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$$

ein Diffeomorphismus ist.

Als technisches Hilfsmittel benutzen wir *Jacobifelder*.

<sup>17</sup>Siehe O'Neill: Semi-Riemannsche Geometrie, Seite 154, Beem, Ehrlich: Global Lorentzian Geometry

### Jacobifelder und konjugierte Punkte

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodäte in  $(M, g)$ . Ein Vektorfeld  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  entlang  $\gamma$  heißt Jacobifeld, falls

$$Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' \equiv 0$$

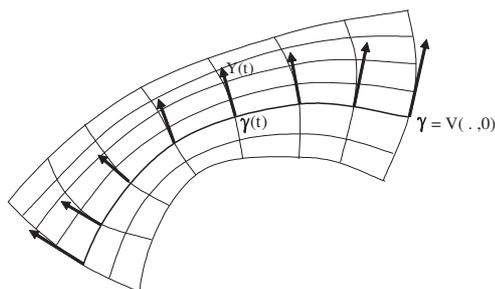
auf  $[0, a]$ , wobei  $Y' = \frac{\nabla Y}{dt}$ ,  $Y'' = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla Y}{dt}$  für den Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$ .

**Beispiel 3.71.**  $Y = \gamma'$  und  $\hat{Y} \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $\hat{Y}(t) := t\gamma'(t)$  sind Jacobifelder entlang  $\gamma$ .

Jacobifelder treten bei Variation von Geodäten auf:

**Definition.** Sei  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodäte. Eine *Variation* von  $\gamma$  ist eine parametrisierte Fläche  $V : [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  mit

$$V(t, 0) = \gamma(t)$$



Das Vektorfeld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $Y(t) := \frac{\partial V}{\partial s}(t, 0)$  heißt Variationsvektorfeld von  $V$ .

Im Folgenden möchten wir zeigen, dass man aus jedem geodätischen Variationsvektorfeld ein Jacobifeld erhält. Dazu zeigen wir zunächst folgendes Lemma:

**Lemma 3.72.** Sei  $V : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  eine parametrisierte Fläche auf  $M$  und sei  $X \in \mathfrak{X}_V(M)$ , das heißt eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} X : A &\rightarrow TM \\ (t, s) &\mapsto X(t, s) \in T_{V(t,s)}M. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial s}\right)X = \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla X}{ds} - \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla X}{dt}.$$

*Beweis.* Wir wählen zunächst eine Karte  $(U, \varphi = (x_1, \dots, x_n))$  um einen beliebigen Punkt  $p \in V(A)$ . Wir haben dann die Darstellung

$$X(t, s) = \sum_{i=1}^n \xi^i(t, s) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(V(t, s))}_{=: X_i(t, s)}.$$

Damit erhalten wir für  $\frac{\nabla X}{dt}$  und  $\frac{\nabla \nabla X}{ds}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla X}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \cdot X_i + \xi^i \frac{\nabla X_i}{dt} \\ \frac{\nabla \nabla X}{ds \, dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial s \partial t} \cdot X_i + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \frac{\nabla X_i}{ds} + \frac{\partial \xi^i}{\partial s} \frac{\nabla X}{dt} + \xi^i \frac{\nabla \nabla X_i}{ds \, dt}. \end{aligned}$$

Und damit

$$\frac{\nabla \nabla X}{ds \, dt} - \frac{\nabla \nabla X}{dt \, ds} = \sum_{i=1}^n \xi^i \cdot \left( \frac{\nabla \nabla X_i}{ds \, dt} - \frac{\nabla \nabla X_i}{dt \, ds} \right). \quad (*)$$

Wir berechnen nun den Term  $\frac{\nabla \nabla X_i}{ds \, dt}$  genauer. Wir betrachten dazu die Koordinatendarstellung von  $V$ , also  $\varphi(V(t, s)) = (x_1(t, s), \dots, x_n(t, s))$ . Damit gilt

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}(V(\bullet, \bullet))}_{=X_j}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}(V(\bullet, \bullet))}_{=X_k}.$$

Und mit dieser Darstellung schreibt sich  $\frac{\nabla X_i}{ds}$  als

$$\frac{\nabla X_i}{ds} = \nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial x_i}(V(\bullet, \bullet)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}(V(\bullet, \bullet))$$

und nochmaliges kovariantes Ableiten liefert

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \nabla X_i}{dt \, ds} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \underbrace{\frac{\nabla}{dt} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}(V(\bullet, \bullet)) \right)}_{= \nabla_{\frac{\partial V}{\partial t}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}(V(\bullet, \bullet))} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_j}{\partial t \partial s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}(V(\bullet, \bullet)). \end{aligned}$$

Und damit erhalten wir aus (\*) schließlich die gewünschte Darstellung:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \xi^i \cdot \left( \frac{\nabla \nabla X_i}{ds dt} - \frac{\nabla \nabla X_i}{dt ds} \right) &= \sum_{i=1}^n \xi^i \left( \sum_{j,k=1}^n \left\{ \frac{\partial x_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial s} - \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t} \right\} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} (V(\bullet, \bullet)) \right) \\
(\text{Indexumbenennung}) &= \sum_{i=1}^n \xi^i \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial s} \cdot \underbrace{\left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}}_{\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ da } \left[ \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = 0} (V(\bullet, \bullet)) \\
&= \sum_{i=1}^n \xi^i \mathcal{R} \left( \frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \mathcal{R} \left( \frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t} \right) X.
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.73.** *Ist  $V$  eine Variation der Geodäten  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ , die nur aus Geodäten besteht, d.h.  $V_s := V(\cdot, s) : [0, a] \rightarrow M$  ist eine Geodäte für jedes  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , so ist das Variationsvektorfeld  $Y = \frac{\partial V}{\partial s}(\cdot, 0)$  ein Jacobifeld entlang  $\gamma$ .*

*Beweis.* Aus dem vorhergehenden Lemma erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} \left( \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial s} \right) \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\nabla \nabla \partial V}{dt ds dt} - \frac{\nabla}{ds} \underbrace{\frac{\nabla \partial V}{dt dt}}_{=0, \text{ weil } V_s \text{ Geodäte}} \\
&= \frac{\nabla \nabla \partial V}{dt ds dt} \\
&= \frac{\nabla \nabla \partial V}{dt dt ds},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Umformungsschritt das Symmetriemaß angewendet haben. Nun erhalten wir aber für  $s = 0$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, 0) = V'_0(t) = \gamma'(t), \quad \frac{\partial V}{\partial s}(t, 0) = Y(t).$$

Und setzen wir dies in obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\mathcal{R}(\gamma', Y)\gamma' = Y''$$

und wegen der Schiefsymmetrie von  $\mathcal{R}$  in (1, 2) schließlich

$$Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' = 0 \quad \text{auf } I.$$

Dies ist gerade die Bedingung für ein Jacobifeld. Folglich ist  $Y$  ein Jacobifeld. □

**Beispiel 3.74. Jacobi- und Killingfelder**

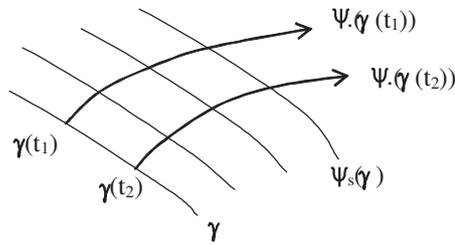
Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein Killingfeld und  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodäte. Dann ist  $X(t) := X(\gamma(t))$  ein Jacobifeld entlang  $\gamma$ .

*Beweis.* Sei  $\{\psi_s\}$  der lokale Fluss von  $X$ . Da  $X$  ein Killingfeld ist, ist

$$\psi_s : U \subset M \rightarrow \psi_s(U) \subset M$$

eine Isometrie. Wir betrachten nun die Variation

$$\begin{aligned} V : [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ V(t, s) &= \psi_s(\gamma(t)) \end{aligned}$$



$V$  ist eine Variation durch Geodäten, folglich ist das Variationsvektorfeld  $\frac{\partial V}{\partial s}(t, 0)$  ein Jacobifeld. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s}(t_0, 0) &= \frac{d}{ds}(\psi_s(\gamma(t_0)))|_{s=0} \\ &= X(\gamma(t_0)) = X(t_0), \end{aligned}$$

denn  $s \rightarrow \psi_s(\gamma(t_0))$  ist die Integrialkurve von  $X$  durch den Punkt  $\gamma(t_0)$ .  $\square$

**Satz 3.75.** Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine Geodäte,  $u, w \in T_x M$ ,  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = v$ . Dann gilt

1. Es existiert genau ein Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $Y(0) = u$  und  $Y'(0) = w$ .
2. Sei  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  das Jacobifeld entlang  $\gamma$  und  $Y(0) = 0$ ,  $Y'(0) = w \in T_x M$ . Dann gilt

$$Y(t) = t \cdot (d \exp_x)_{tv}(w) \in T_{\gamma(t)} M$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Die Jacobi-Gleichung  $Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' \equiv 0$  ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Die Lösung ist deshalb eindeutig bestimmt durch die Anfangsbedingungen  $Y(0)$  und  $Y'(0)$ .

2. Wir betrachten die folgende geodätische Variation von  $\gamma$ :

$$V(t, s) := \exp_x(t(v + sw)).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} V(t, 0) &= \exp_x(tv) = \gamma_v(t) \\ V(t, s_0) &= \exp_x(t(v + s_0w)) = \gamma_{v+s_0w}(t) \end{aligned}$$

und aus der Kettenregel folgt

$$Y(t) = \frac{\partial V}{\partial s}(t, 0) = (d\exp_x)_{tv}(tw).$$

Aus Satz 3.73 weiß man, dass  $Y$  ein Jacobifeld entlang  $\gamma$  ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} Y(0) &= 0 \\ Y'(0) &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial V}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(0, 0) \end{aligned}$$

$\frac{\partial V}{\partial t}(\cdot, s_0)$  ist das tangentielle Vektorfeld an die Geodäte  $V(t, s_0) = \gamma_{v+s_0w}(t)$ , d.h. es ist

$$\frac{\partial V}{\partial t}(0, s_0) = \gamma'_{v+s_0w}(0) = v + s_0w.$$

Also gilt:

$$Y'(0) = \frac{d}{ds}(v + sw)|_{s=0} = w.$$

Damit ist  $Y(t) := (d\exp_x)_{tv}(tw)$  das eindeutig bestimmte Jacobifeld mit  $Y(0) = 0, Y'(0) = w$ .

□

### Beispiel 3.76. Jacobifelder auf MF konstanter Schnittkrümmung

Sei  $M^n = M^n(K_0)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $K_0$  und  $\gamma : [0, l] \rightarrow M^n(K_0)$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit  $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$ . Seien  $u, w \in T_x M^n$  gegeben und bezeichne  $U, W \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  die Parallelverschiebung von  $u - \langle u, v \rangle v$  bzw.  $w - \langle w, v \rangle v$  entlang  $\gamma$ . Dann ist das Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $Y(0) = u$  und  $Y'(0) = w$  gegeben durch

$$Y(t) = \hat{Y}(t) + \langle w, v \rangle t \cdot \gamma'(t) + \langle u, v \rangle \gamma'(t)$$

wobei

$$\hat{Y}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin(\sqrt{K_0}t) \cdot W(t) + \cos(\sqrt{K_0} \cdot t) \cdot U(t), & \text{falls } K_0 > 0, \\ U(t) + tW(t), & \text{falls } K_0 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-K_0}} \sinh(\sqrt{-K_0}t) \cdot W(t) + \cosh(\sqrt{-K_0} \cdot t) \cdot U(t), & \text{falls } K_0 < 0. \end{cases}$$

Zum Beweis benutzt man

$$\mathcal{R}(X, Y, T, Z) = K_0 \left( g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z) \right)$$

und berechnet  $Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' = 0$ .

**Satz 3.77.** *Bezeichne  $\text{Jac}_\gamma M$  den Vektorraum der Jacobifelder entlang  $\gamma$ . Dann gilt:*

1.  $\text{Jac}_\gamma M$  ist ein  $2n$ -dimensionaler Vektorraum.
2.  $\{Y \in \text{Jac}_\gamma M \mid Y \perp \gamma'\}$  ist ein  $(2n - 2)$ -dimensionaler Vektorraum.
3.  $\{Y \in \text{Jac}_\gamma M \mid Y(0) = 0, Y \perp \gamma'\}$  ist ein  $(n - 1)$ -dimensionaler Vektorraum.

*Inbesondere gilt für  $Y \in \text{Jac}_\gamma M$*

$$\langle Y(t), \gamma'(t) \rangle = \alpha t + \beta$$

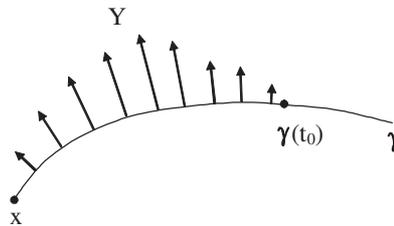
(wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die Metrik bezeichnet).

*Beweis.* Sei  $Y \in \text{Jac}_\gamma M$ . Wir zeigen, dass die Funktion  $t \rightarrow \langle Y(t), \gamma'(t) \rangle$  linear ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Y, \gamma' \rangle &= \left\langle \frac{\nabla}{dt} Y, \gamma' \right\rangle + \left\langle Y, \frac{\nabla}{dt} \gamma' \right\rangle = \langle Y', \gamma' \rangle \\ \frac{d^2}{dt^2} \langle Y, \gamma' \rangle &= \langle Y'', \gamma' \rangle + \left\langle Y', \frac{\nabla}{dt} \gamma' \right\rangle \\ &= -\langle \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma', \gamma' \rangle = \mathcal{R}(\gamma', Y, \gamma', \gamma') = 0. \end{aligned}$$

Folglich gilt  $\langle Y(t), \gamma'(t) \rangle = \alpha t + \beta$  mit  $\beta = \langle Y(0), \gamma'(0) \rangle$  und  $\alpha = \langle Y'(0), \gamma'(0) \rangle$ . Die Bedingung  $\langle Y, \gamma' \rangle \equiv 0$  liefert  $\alpha = \beta = 0$ , also einen Unterraum der Kodimension 2 im  $2n$ -dimensionalen Raum aller Anfangsbedingungen  $(Y(0), Y'(0))$ . Ist zusätzlich  $Y(0) = 0$ , so ist bereits  $\beta = 0$  und man hat einen Unterraum der Kodimension 1 im  $n$ -dimensionalen Raum der Anfangsbedingungen  $Y'(0)$ .  $\square$

**Definition.** Sei  $x \in M, \gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodäte mit  $\gamma(0) = x$  und  $t_0 \in (0, a]$ . Der Punkt  $\gamma(t_0)$  heißt konjugiert zu  $x$  entlang  $\gamma$ , falls ein Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  existiert mit  $Y \neq 0$  und  $Y(0) = Y(t_0) = 0$ .



**Bemerkung:** Für dieses Jacobifeld gilt  $Y \perp \gamma'$ , denn nach Satz 3.77 ist  $\langle Y(t), \gamma'(t) \rangle = \alpha t$  und somit  $\alpha = 0$  wegen  $Y(t_0) = 0$ .

**Satz 3.78.** Sei  $x \in M$  und  $v \in T_x M$ . Das Differential der Exponentialabbildung

$$(d \exp_x)_{tv} : T_{vt}(T_x M) \rightarrow T_{\gamma_v(t)} M$$

ist genau dann ausgeartet, wenn die Punkte  $x$  und  $\gamma_v(t)$  zueinander konjugiert entlang der radialen Geodäten  $\gamma_v$  sind.

*Beweis.* Wir wissen, dass das Vektorfeld  $Y_w(t) = t(d \exp_x)_{tv}(w)$  das Jacobifeld entlang  $\gamma_v$  mit  $Y_w(0) = 0$  und  $Y'_w(0) = w$  ist. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} (d \exp_x)_{tv} \text{ ist ausgeartet} &\Leftrightarrow \exists w \in T_x M, w \neq 0 : (d \exp_x)_{tv}(w) = 0 \\ &\Leftrightarrow Y_w(t) = 0, Y_w(0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } \gamma_v(t) \text{ sind konjugiert entlang } \gamma_v \end{aligned}$$

□

## Jacobifelder und konjugierte Punkte für Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei  $(M^n, g)$  immer eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zunächst einige Beispiele:

### Beispiel 3.79. Konjugierte Punkte von Riemannschen MF

1. Auf den Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$  existieren *keine* konjugierten Punkte:

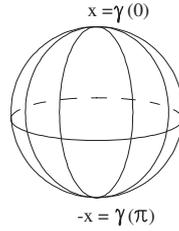
Für  $\mathbb{R}^n$  ist die Schnittkrümmung  $K_0 \equiv 0$ . Das Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_{\gamma_v}(\mathbb{R}^n)$  mit  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = w \perp v$  ist gegeben durch  $Y(t) = tW(t)$ , wobei  $W(t)$  die Parallelverschiebung von  $w \neq 0$  entlang  $\gamma_v$  ist. Folglich ist  $Y(t) = t \cdot W(t) \neq 0$  für alle  $t > 0$ .

2. Auf  $(\mathbb{H}^n, g_{\mathbb{H}^n} = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2))$  existieren keine konjugierten Punkte:

$\mathbb{H}^n$  hat konstante Schnittkrümmung  $K_0 = -1$ . Das Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_{\gamma_v}(\mathbb{H}^n)$  mit  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = w \perp v$  ist gegeben durch  $Y(t) = \sinh(t) \cdot W(t) \neq 0$  für  $t > 0$ .

3. Auf der Riemannschen Sphäre  $S^n$  sind zwei Punkte  $x$  und  $y$  genau dann konjugiert, wenn  $y = -x$  gilt:

$S^n$  hat konstante Schnittkrümmung  $K_0 = 1$ . Das Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_{\gamma_v}(S^n)$  mit  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = w \perp v$  ist gegeben durch  $Y(t) = \sin t \cdot W(t)$ , wobei  $W(t)$  die Parallelverschiebung von  $w \in T_x M$  entlang  $\gamma_v$  ist. Folglich gilt  $Y(t) = 0$  genau dann, wenn  $t \in \pi \cdot \mathbb{Z}$ . D.h. die Punkte  $x, -x \in S^n$  sind konjugiert entlang jeder Geodäten.



Als nächstes werden wir zeigen, dass die Schnittkrümmung eine Aussage über den Verlauf von Geodäten macht. Dazu benutzen wir den folgenden Satz über Jacobifelder:

**Satz 3.80.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  eine Geodäte mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = v$ . Sei weiterhin  $w \in T_x M$  ein Vektor mit  $\langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$  und  $\langle v, w \rangle = 0$ . Bezeichne  $Y$  das Jacobifeld entlang  $\gamma$  mit  $Y(0) = 0$  und  $Y'(0) = w$ . Dann gilt

$$\|Y(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{6}K_{\text{span}(v,w)}(x)t^3 + o(t^3)$$

*Beweis.* Wir betrachten die Taylorentwicklung der Funktion  $h(t) = \langle Y(t), Y(t) \rangle$  im Punkt  $t = 0$ :

$$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{1}{2}h''(0)t^2 + \frac{1}{6}h'''(0)t^3 + \frac{1}{24}h^{(4)}(0)t^4 + o(t^4)$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} h(0) &= \langle Y(0), Y(0) \rangle = 0 \\ h'(0) &= 2\langle Y'(0), Y(0) \rangle = 0 \\ h''(0) &= 2\langle Y''(0), Y(0) \rangle + 2\langle Y'(0), Y'(0) \rangle = 2\langle Y'(0), Y'(0) \rangle = 2\langle w, w \rangle = 2 \\ h'''(0) &= 2\langle Y'''(0), Y(0) \rangle + 6\langle Y''(0), Y'(0) \rangle = -6\langle \mathcal{R}(Y(0), \gamma'(0))\gamma'(0), Y'(0) \rangle = 0 \\ h^{(4)}(0) &= 8\langle Y'''(0), Y'(0) \rangle + 6\langle Y''(0), Y''(0) \rangle. \end{aligned}$$

Da  $Y''(t) = -\mathcal{R}(Y(t), \gamma'(t))\gamma'(t)$ , folgt

$$Y''' = -\frac{\nabla}{dt}(\mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma') = -(\nabla_{\gamma'}\mathcal{R})(Y, \gamma')\gamma' - \mathcal{R}(Y', \gamma')\gamma' - \underbrace{\mathcal{R}(Y, \gamma'')}_{0}\gamma' - \mathcal{R}(Y, \gamma')\underbrace{\gamma''}_{0}.$$

Folglich gilt in  $t = 0$ :

$$Y'''(0) = -\mathcal{R}(w, v)v.$$

Damit folgt  $h^{(4)}(0) = -8K_{\text{span}(v,w)}(x)$ . Wir erhalten

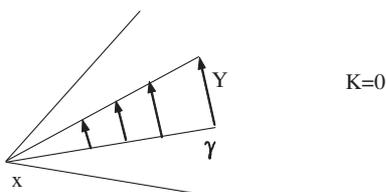
$$\|Y(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K_{\text{span}(v,w)}(x)t^4 + o(t^4).$$

Für die Wurzel erhält man durch Multiplizieren und Koeffizientenvergleich

$$\|Y(t)\| = t - \frac{1}{6}K_{\text{span}(v,w)}(x)t^3 + o(t^3).$$

□

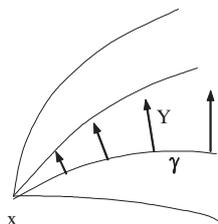
**Bemerkung.** Da für den flachen Raum  $\mathcal{R} \equiv 0$  gilt, folgt in diesem Fall aus  $Y'' = -\mathcal{R}(Y, \gamma)\gamma = 0$   $Y(t) = t\mathcal{P}_{\gamma|_{[0,t]}}(v)$  und damit  $\|Y(t)\| = t$ .



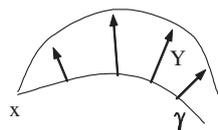
Für die gekrümmten Fälle gilt:

$$\|Y(t)\| = t - \underbrace{\frac{1}{6}K_{\text{span}(v,w)}(x)t^3}_{\text{Abweichung vom flachen Verhalten}} + o(t^3)$$

1.  $a = K_{\text{span}(v,w)}(x) < 0$ . Dann ist  $\|Y(t)\| \cong t + |a|t^3$  monoton wachsend. In diesem Fall laufen die Geodäten auseinander.

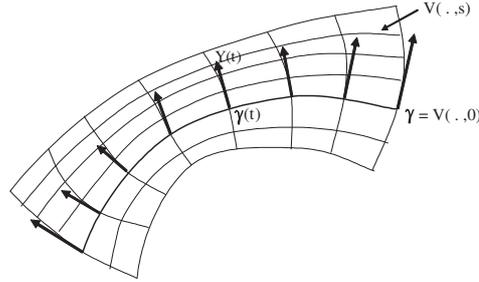


2.  $a = K_{\text{span}(v,w)}(x) > 0$ . Dann hat  $\|Y(t)\| \cong t - |a|t^3$  ein lokales Maximum. In diesem Fall laufen die Geodäten zusammen.



**Satz 3.81.** Sei  $(M^n, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Sei  $V : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Variation von  $\gamma$  mit dem Variationsvektorfeld  $Y = \frac{\partial V}{\partial s}(\cdot, 0)$ . Bezeichne  $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  die Länge der variierenden Kurven

$$L(s) := l(V(\cdot, s)).$$



Dann gilt für die 1. und 2. Variation von  $L$ :

$$\begin{aligned} L'(0) &= \langle Y(l), \gamma'(l) \rangle - \langle Y(0), \gamma'(0) \rangle \\ L''(0) &= \int_0^l \left( \|\tilde{Y}'(t)\|^2 - \mathcal{R}(\tilde{Y}, \gamma', \gamma', \tilde{Y}) \right) dt + \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial s}(l, 0), \gamma'(l) \right\rangle - \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{Y}$  die Normalprojektion des Variationsvektorfeldes  $Y$  ist:

$$\tilde{Y} = Y - \langle Y, \gamma' \rangle \gamma'.$$

(Sind die Randkurven  $s \rightarrow V(0, s)$  und  $s \rightarrow V(l, s)$  Geodäten, so fallen die letzten beiden Summanden von  $L''(0)$  weg.)

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Wegen

$$L(s) = \int_0^l \left\| \frac{\partial V}{\partial t}(t, s) \right\| dt = \int_0^l \left\langle \frac{\partial V}{\partial t}(t, s), \frac{\partial V}{\partial t}(t, s) \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

folgt

$$L'(s) = \int_0^l \frac{1}{\left\| \frac{\partial V}{\partial t}(t, s) \right\|} \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, s), \frac{\partial V}{\partial t}(t, s) \right\rangle dt.$$

Wir wissen:

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0) \right\| = \|\gamma'(t)\| \equiv 1$$

und

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0) = \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial V}{\partial s}(t, 0) = Y'(t) .$$

Daraus folgt

$$L'(0) = \int_0^l \langle Y'(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^l \frac{d}{dt} \langle Y(t), \gamma'(t) \rangle dt = \langle Y(l), \gamma'(l) \rangle - \langle Y(0), \gamma'(0) \rangle .$$

2. Wir leiten die Formel für  $L'(s)$  nochmals ab und erhalten in  $s = 0$

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^l \left[ \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \left\{ \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0), \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0) \right\rangle \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\|\frac{\partial V}{\partial t}(t, 0)\|^3} \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle^2 \right] dt \\ &= \int_0^l \left\{ \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial V}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle + \underbrace{\langle Y'(t), Y'(t) \rangle - \langle Y'(t), \gamma'(t) \rangle^2}_{= \langle \tilde{Y}'(t), \tilde{Y}'(t) \rangle \text{ (s.u.)}} \right\} dt \\ &= \int_0^l \left\{ \left\langle \mathcal{R} \left( \frac{\partial V}{\partial s}, \frac{\partial V}{\partial t} \right) \frac{\partial V}{\partial s}, \gamma'(t) \right\rangle \Big|_{s=0} + \left\langle \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial s}(t, s), \gamma'(t) \right\rangle \Big|_{s=0} + \langle \tilde{Y}'(t), \tilde{Y}'(t) \rangle \right\} dt \\ &= \int_0^l \left( \mathcal{R}(Y, \gamma', Y, \gamma') + \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial s}(t, 0), \gamma'(t) \right\rangle + \langle \tilde{Y}'(t), \tilde{Y}'(t) \rangle \right) dt . \end{aligned}$$

Denn es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(t) &= Y(t) - \langle Y(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t), \\ \tilde{Y}'(t) &= Y'(t) - \langle Y'(t), \gamma'(t) \rangle \gamma'(t) \end{aligned}$$

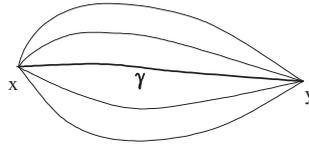
und somit

$$\langle \tilde{Y}'(t), \tilde{Y}'(t) \rangle = \langle Y'(t), Y'(t) \rangle - \langle Y'(t), \gamma'(t) \rangle^2 .$$

□

### Bemerkungen:

1. Analoge Formeln gelten für stückweise glatte Variationen (werden entlang der Stücke summiert)
2. Ist  $V$  eine Variation mit festem Endpunkt und festem Anfangspunkt (= eigentliche Variation)



so gilt für das Variationsvektorfeld  $Y(0) = Y(l) = 0$  und folglich

$$\begin{aligned} L'(0) &= 0 \\ L''(0) &= \int_0^l (\|\tilde{Y}'(t)\|^2 - \mathcal{R}(\tilde{Y}, \gamma', \gamma', \tilde{Y})) dt . \end{aligned}$$

**Definition.** Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte und  $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  Vektorfelder entlang  $\gamma$  mit  $X(0) = X(l) = 0$  und  $Y(0) = Y(l) = 0$ . Dann heißt die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} I_\gamma(X, Y) &:= - \int_0^l \langle X, Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' \rangle dt \\ &= - \underbrace{\int_0^l \langle X, Y' \rangle' dt}_{\langle X, Y' \rangle|_0^l = 0} + \underbrace{\int_0^l \langle X', Y' \rangle dt - \int_0^l \mathcal{R}(X, \gamma', \gamma', Y) dt}_{\text{symm. in } X, Y} \end{aligned}$$

die Indexform von  $\gamma$ .

Da für Vektorfelder  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  gilt

$$\langle Y, Y'' \rangle = \frac{d}{dt} (\langle Y, Y' \rangle) - \langle Y', Y' \rangle$$

erhält man folgende Beziehung zwischen der Indexform von  $\gamma$  und der 2. Variation der Bogenlänge:

**Satz 3.82.** Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte und  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  ein Vektorfeld mit  $Y(0) = Y(l) = 0$  und  $Y \perp \gamma'$ . Dann definiert  $Y$  die eigentliche Variation  $V : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$

$$V(t, s) := \exp_{\gamma(t)}(sY(t))$$

mit dem Variationsvektorfeld  $Y$ . Für die Indexform gilt

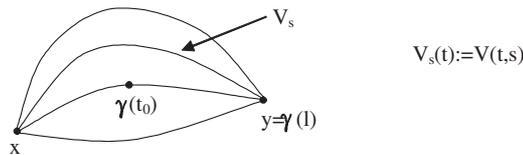
$$\begin{aligned} I_\gamma(Y, Y) &= \int_0^l (\|Y'\|^2 - \mathcal{R}(Y, \gamma', \gamma', Y)) dt \\ &= L''(0) \end{aligned}$$

wobei  $L(s) = l(V(\cdot, s))$ .

Wir erhalten nun die folgende Aussage über die Länge von Geodäten, auf denen ein konjugierter Punkt liegt:

**Satz 3.83.** Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte und  $\gamma(0) = x$ . Sei  $t_0 \in (0, l)$  und  $\gamma(t_0)$  konjugiert zu  $\gamma(0) = x$  entlang  $\gamma$ . Dann existiert eine eigentliche Variation  $V$  von  $\gamma$  so dass

$$L(V_s) < L(\gamma) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$$



Insbesondere ist  $\gamma$  nicht minimierend zwischen  $x$  und  $y$ .

*Beweis.*  $\gamma(t_0)$  ist konjugiert zu  $x$  entlang  $\gamma$ . Folglich existiert ein nicht verschwindendes Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $Y(0) = 0$  und  $Y(t_0) = 0$ . Nach Satz 3.77 ist dann  $Y \perp \gamma'$  und  $Y'(t_0) \neq 0$ , da sonst  $Y \equiv 0$ . Bezeichne nun  $Z_0 \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  die Parallelverschiebung von  $-Y'(t_0)$  entlang  $\gamma$  und  $\theta \in C^\infty([0, l])$  eine Funktion mit  $\theta(0) = \theta(l) = 0$ ,  $\theta(t_0) = 1$ . Wir betrachten das Vektorfeld  $Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  definiert durch  $Z(t) := \theta(t) \cdot Z_0(t)$ . Dafür gilt

$$Z(0) = Z(l) = 0 \quad , \quad Z(t_0) = -Y'(t_0) \quad .$$

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$Y_\alpha(t) := \begin{cases} Y(t) + \alpha Z(t) & t \in [0, t_0] \\ \alpha \cdot Z(t) & t \in [t_0, l] \end{cases}$$

$Y_\alpha$  ist stetig und stückweise  $C^\infty$ . Außerdem gilt  $Y_\alpha(0) = Y_\alpha(l) = 0$ . Benutzt man  $Y \perp \gamma'$  und  $\langle Y'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = \frac{d}{dt}(\langle Y(t), \gamma'(t) \rangle)|_{t=t_0} = 0$ , so folgt aus der Definition von  $Z$ , dass  $Y_\alpha \perp \gamma'$ . Sei nun  $V_\alpha$  die durch  $Y_\alpha$  definierte stückweise glatte Variation

$$V_\alpha(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(s \cdot Y_\alpha(t)) \quad .$$

Nach Satz 3.80 und 3.81 gilt für die Bogenlänge  $L_\alpha(s) = l(V_\alpha(\cdot, s))$

$$\begin{aligned} L'_\alpha(0) &= 0 \\ L''_\alpha(0) &= I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha) \quad . \end{aligned}$$

Nach Definition von  $I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha)$  gilt  $I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha) = I_1 + I_2 + I_3$ , wobei

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_{\gamma|_{[0, t_0]}}(Y, Y) = - \int_0^{t_0} \langle Y, \underbrace{Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma'}_0, \text{ da } Y \text{ Jacobifeld} \rangle dt. \\ I_2 &:= I_{\gamma|_{[0, t_0]}}(\alpha Z, Y) + I_{\gamma|_{[0, t_0]}}(Y, \alpha Z) \\ &= -\alpha \int_0^{t_0} \langle Z, Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' \rangle dt - \alpha \int_0^{t_0} \langle Y, Z'' + \mathcal{R}(Z, \gamma')\gamma' \rangle dt \end{aligned}$$

Eine kurze Zwischenrechnung liefert:

$$\begin{aligned} (\langle Z, Y' \rangle - \langle Y, Z' \rangle)' &= \langle Z', Y' \rangle + \langle Z, Y'' \rangle - \langle Y', Z' \rangle - \langle Y, Z'' \rangle + \mathcal{R}(Y, \gamma', \gamma', Z) - \mathcal{R}(Z, \gamma', \gamma', Y) \\ &= \langle Z, Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma' \rangle - \langle Y, Z'' + \mathcal{R}(Z, \gamma')\gamma' \rangle. \end{aligned}$$

Damit formt man  $I_2$  weiter um zu

$$\begin{aligned} I_2 &= -2\alpha \int_0^{t_0} \langle Z, \underbrace{Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma')\gamma'}_0, \text{ da } Y \text{ Jacobifeld} \rangle dt + \alpha \int_0^{t_0} (\langle Z, Y' \rangle - \langle Y, Z' \rangle)' dt \\ &= \alpha (\langle Z(t_0), Y'(t_0) \rangle - \langle Y(t_0), Z'(t_0) \rangle) \\ &= \alpha \|Y'(t_0)\|^2. \\ I_3 &= I_\gamma(\alpha Z, \alpha Z) = \alpha^2 I_\gamma(Z, Z). \end{aligned}$$

Dann gilt für die Variation der Bogenlänge

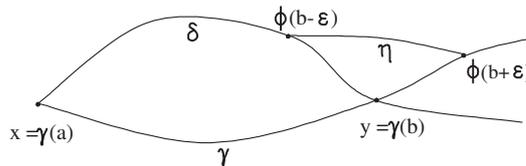
$$\begin{aligned} L'_\alpha(0) &= 0 \\ L''_\alpha(0) &= I_\gamma(Y_\alpha, Y_\alpha) = \alpha^2 I_\gamma(Z, Z) - \alpha \|Y'(t_0)\|^2 \\ &= -\alpha (\|Y'(t_0)\|^2 - \alpha I_\gamma(Z, Z)). \end{aligned}$$

Ist  $\alpha$  hinreichend klein, so ist  $\|Y'(t_0)\| - \alpha I_\gamma(Z, Z) > 0$ , also  $L''_\alpha(0) < 0$ . Für diese  $\alpha$  ist  $V_\alpha$  eine Variation von  $\gamma$ , für die  $l(\gamma)$  ein striktes lokales Maximum von  $L(V_\alpha(\cdot, s))$  ist. Also gilt

$$L(V_\alpha(\cdot, s)) < L(\gamma) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}.$$

□

**Satz 3.84.** Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Seien  $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow M$  zwei verschiedene gleichlange Geodäten, die zwei Punkte  $x$  und  $y$  verbinden.



Dann ist  $\gamma : [a, b + \varepsilon] \rightarrow M$  nicht *minimierend* (für beliebige  $\varepsilon > 0$ ).

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und bezeichne  $\phi : [a, b + \varepsilon] \rightarrow M$  die Kurve

$$\phi(t) = \begin{cases} \delta(t) & t \leq b \\ \gamma(t) & t \geq b. \end{cases}$$

Sei  $U(y)$  konvexe Umgebung und  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$  so klein, dass  $\phi(b - \varepsilon'), \phi(b + \varepsilon') \in U(y)$ . Da  $U$  konvex ist, existiert eine minimierende Geodäte  $\eta$  von  $\phi(b - \varepsilon')$  nach  $\phi(b + \varepsilon')$ . Da  $\phi$  in  $\phi(b)$  eine "Ecke" hat, ist  $\phi|_{[b-\varepsilon', b+\varepsilon']}$  nicht geodätisch, also auch nicht minimierend zwischen  $\phi(b - \varepsilon')$  und  $\phi(b + \varepsilon') = \gamma(b + \varepsilon')$ . Folglich gilt

$$l(\phi|_{[b-\varepsilon', b+\varepsilon']}) > d(\phi(b - \varepsilon'), \phi(b + \varepsilon')).$$

Folglich existiert eine Kurve zwischen  $x = \gamma(a)$  und  $z = \gamma(b + \varepsilon')$ , die kürzer ist als  $\phi|_{[a, b+\varepsilon']}$ . Da  $l(\delta|_{[a, b]}) = l(\phi|_{[a, b]}) = l(\gamma|_{[a, b]})$  und  $\phi|_{[b, b+\varepsilon']} = \gamma|_{[b, b+\varepsilon']}$ , existiert eine Kurve von  $x$  nach  $z$ , die kürzer ist als  $\gamma|_{[a, b+\varepsilon']}$ . Folglich ist  $\gamma|_{[a, b+\varepsilon]}$  *nicht* minimierend zwischen  $x$  und  $z$ .  $\square$

### Schnitorte in vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden sei  $(M, g)$  eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $x \in M$  und  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  die Exponentialabbildung. Wir wollen nun den Diffeomorphiebereich von  $\exp_x$  studieren. Nach dem Satz von Hopf und Rinow ist es surjektiv. Was kann also verhindern, dass  $\exp_x$  ein Diffeomorphismus ist?

1.  $\exp_x$  ist nicht injektiv, d.h. 2 verschiedene Geodäten treffen sich.
2.  $d\exp_x$  ist in einem  $v$  in  $T_x M$  ausgeartet, d.h. nicht injektiv.

Sei darum

$$C(x) := \{y \in M \mid \text{es existieren 2 verschiedene minimierende Geodäten von } x \text{ nach } y \\ \text{oder } y \text{ ist zu } x \text{ konjugiert entlang einer Geodäten}\}.$$

Die Sätze 3.83 und 3.84 besagen, dass aus  $y \in C(x)$  für  $v \in \exp_x^{-1}(y)$  und  $\varepsilon > 0$  folgt, dass  $\gamma_v|_{[0, 1+\varepsilon]}$  nicht minimierend ist.

Sei  $v \in T_x M$  und  $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$  die eindeutig bestimmte Geodäte mit  $\gamma_v(0) = x$  und  $\gamma_v'(0) = v$ . Bezeichne

$$J_v := \{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \gamma_v \text{ ist minimierend auf } [0, t]\}.$$

Dann gilt:

- $t_0 \in J_v \Rightarrow [0, t_0] \subset J_v$  (Dreiecksungleichung)

- $J_v$  ist abgeschlossen:

Seien  $t_n \in J_v$  und konvergiere  $t_n \rightarrow t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$d(\gamma_v(t_n), x) = t_n \cdot \|v\| \rightarrow t \cdot \|v\|$$

und da  $d$  stetig ist, folgt

$$d(\gamma_v(t), x) = t \cdot \|v\| = l(\gamma_v|_{[0,t]}),$$

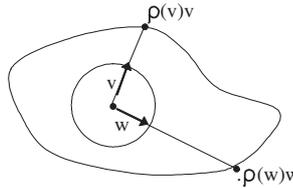
d.h.  $t \in J_v$ .

Sei nun  $\rho(v) = \sup J_v \leq \infty$ , d.h.  $J_v = [0, \rho(v)]$ . Dann gilt:

- $\rho(v)$  ist der größte Parameter  $t$ , für den  $\gamma|_{[0,t]}$  noch minimierend ist.
- $\rho(v) = \lambda\rho(\lambda v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , da  $\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t)$ .
- $\rho : \{v \in T_x M \mid \|v\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und von unten beschränkt durch  $c > 0$  (siehe Kobayashi / Nomizu, Teil II, S. 98).

Wir betrachten nun die offene Menge  $U_x \subset T_x M$

$$U_x := \{t \cdot v \mid v \in T_x M, \|v\| = 1, 0 \leq t < \rho(v)\}.$$



Nach Umnormierung kann man  $U_x$  auch in der folgenden Form schreiben

$$\begin{aligned} U_x &= \left\{ w \in T_x M \mid \|w\| < \rho\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \right\} \\ &= \{w \in T_x M \mid 1 < \rho(w)\} \\ &= \{w \in T_x M \mid \text{es existiert ein } \varepsilon > 0, \text{ so dass } \gamma_w|_{[0,1+\varepsilon]} \text{ minimierend ist}\}. \end{aligned}$$

**Definition.** Die Menge

$$\text{Cut}(x) := \exp_x(\partial U_x) = \{\gamma_v(\rho(v)) \mid v \in T_x M, \|v\| = 1\}$$

heißt der Schnittort von  $x$ .

**Satz 3.85.** Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt für jedes  $x \in M$ :

1.  $M = \exp_x(U_x) \dot{\cup} \text{Cut}(x)$
2.  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  ist ein Diffeomorphismus.
3.  $\text{Cut}(x) = C(x)$ . Insbesondere gilt:

$$x \in \text{Cut}(y) \Leftrightarrow y \in \text{Cut}(x).$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. a) Behauptung:  $M = \exp_x(U_x) \cup \exp_x(\partial U_x)$ :

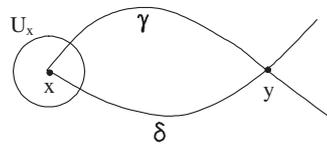
Sei  $y \in M$ . Dann existiert nach dem Satz von Hopf und Rinow eine Geodäte  $\gamma$  von  $x$  nach  $y$  und  $d(x, y) = l(\gamma)$ . Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$  und bezeichne  $v := \gamma'(0)$ . Dann ist  $\rho(v) \geq 1$ , also  $v \in U_x \cup \partial U_x$  und somit  $y \in \exp_x(U_x) \cup \exp_x(\partial U_x)$ .

Insbesondere ist  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  surjektiv.

- b)  $\exp_x(U_x) \cap \exp_x(\partial U_x) = \emptyset$ :

Sei  $y \in \exp_x(U_x) \cap \text{Cut}(x)$ . Da  $y \in \exp_x(U_x)$ , existiert eine Geodäte  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = x, \gamma(l) = y$  und  $\gamma|_{[0, l+\varepsilon]}$  ist minimierend für ein  $\varepsilon > 0$ .

Da  $y \in \text{Cut}(x) = \exp_x(\partial U_x)$ , existiert eine Geodäte  $\delta$  mit  $\delta(0) = x$  und  $\delta(b) = y$ , die bis  $b$  minimierend ist und danach nicht mehr. Dann müssen die Geodäten  $\gamma$  und  $\delta$  verschieden sein.



Dann kann aber  $\gamma$  nicht minimierend auf  $[0, l+\varepsilon]$  sein (Satz 3.84). Dies ist ein Widerspruch, d.h.  $M = \exp_x(U_x) \dot{\cup} \text{Cut}(x)$  ist eine disjunkte Vereinigung.

2. Wir zeigen, dass  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  ein Diffeomorphismus ist:

Nach Satz 3.84 und der Definition von  $U_x$  ist  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  injektiv. Nach Satz 3.83 gilt: Ist  $v \in U_x$ , so sind  $x$  und  $\exp_x(v) = y$  nicht zueinander konjugiert entlang  $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$ . Nach Satz 3.78 ist dann  $(d\exp_x)_v : T_v(T_x M) \rightarrow T_y M$  ein Isomorphismus, also ein lokaler Diffeomorphismus. Da  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  auch bijektiv ist, ist  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  ein Diffeomorphismus.

3. a)  $C(x) \subset \text{Cut}(x)$  folgt aus den Sätzen 3.83 und 3.84.
- b)  $\text{Cut}(x) \subset C(x)$ : Angenommen  $y \in \text{Cut}(x) \setminus C(x)$ . Dann gibt es genau eine minimierende Geodäte von  $x$  nach  $y$  und  $(d\exp_x)_v$  ist für alle  $v \in \exp_x^{-1}(y)$  ein Isomorphismus und nach dem Satz vom lokalen Diffeomorphismus gibt es Umgebungen  $\tilde{U}(v)$  und  $U(y)$ , für die  $\exp_x : \tilde{U}(v) \rightarrow U(y)$  diffeomorph ist.  $y \in \text{Cut}(x) \Rightarrow \rho(v) = 1 \Rightarrow \gamma(v)|_{[0, 1+\varepsilon]}$  ist für  $\varepsilon > 0$  nicht minimierend.

Sei  $\{t_i | i \in \mathbb{N}\} \subset (1, 2)$  eine Folge mit  $t_i \searrow 1$  und  $p_i := \gamma(t_i)$ . Nach dem Satz von Hopf-Rinow gibt es minimierende Geodäten  $\gamma_{v_i}$  mit  $v_i \in T_x M$  von  $x$  nach  $p_i$ .

$v_i \notin \tilde{U}(v)$ , da  $(\exp_x |_{\tilde{U}(v)})^{-1}(p_i) = t_i v$ , d.h. die minimierende Geodäte wäre  $\gamma$ .

$$\|v_i\| = d(x, p_i) \rightarrow d(x, y) = \|v\|.$$

Weil  $\text{cl } K(0, 2\|v\|) \subset T_x M$  kompakt ist, existiert eine Teilfolge  $v_{i_k}$ , die gegen ein  $\tilde{v} \notin \tilde{U}(v)$  konvergiert.  $\exp_x$  ist stetig, also konvergiert auch  $\{p_{i_k} | k \in \mathbb{N}\}$  gegen  $\exp_x(\tilde{v})$ .  $\{p_{i_k} | k \in \mathbb{N}\}$  konvergiert aber als Teilfolge von  $\{p_i | i \in \mathbb{N}\}$  auch gegen  $y$ , d.h.  $\exp_x(\tilde{v}) = \exp_x(v)$ . Es ist aber auch  $l(\gamma_v) = \|v\| = \|\tilde{v}\| = l(\gamma_{\tilde{v}})$ , d.h.  $\gamma_v$  und  $\gamma_{\tilde{v}}$  sind verschiedene minimierende Geodäten von  $x$  nach  $y$ . Widerspruch. Es muss also  $\text{Cut}(x) \setminus C(x) = \emptyset$  gelten.

□

Wir haben also einen Diffeomorphismus  $\exp_x : U_x \rightarrow M \setminus \text{Cut}(x)$  und für den Schnitort  $\text{Cut}(x)$  gilt

$\text{Cut}(x) = \{y \in M \mid \text{es existiert eine minimale Geodäte von } x \text{ nach } y, \text{ die danach nicht mehr minimierend ist.}\}$

**Definition.** Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$r_{\text{inj}}(x) := d(x, \text{Cut}(x))$$

Injektivitätsradius von  $(M, g)$  in  $x \in M$ .

$$r_{\text{inj}}(M) = \inf_{x \in M} r_{\text{inj}}(x)$$

heißt Injektivitätsradius von  $(M, g)$ .

Nach Definition von  $\text{Cut}(x)$  gilt dann

$$B_{r_{\text{inj}}(x)}(x) := \exp_x(K(0, r_{\text{inj}}(x)))$$

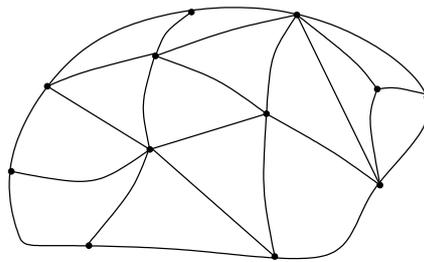
ist die maximale geodätische Kugel um  $x$ , auf der  $\exp_x$  ein Diffeomorphismus ist.

# 4 Krümmung und Topologie - Einige Beispiele

## 4.1 Der Satz von Gauß - Bonnet

Aus der Differentialtopologie ist bekannt:

1. Jede glatte orientierbare zsh. 2-dim. MF  $M^2$  ist *triangulierbar*, d.h vollständig durch ein Netz von "Dreiecken" zu überdecken. ("Dreieck" bedeutet diffeomorph zu einem Dreieck).



2. Sei eine Triangulierung einer kompakten MF  $M^2$  fixiert und bezeichne
  - $e_0$  =Anzahl der Ecken
  - $e_1$  =Anzahl der Kanten
  - $e_2$  =Anzahl der Dreiecke.

Daraus definieren wir die Eulersche Charakteristik

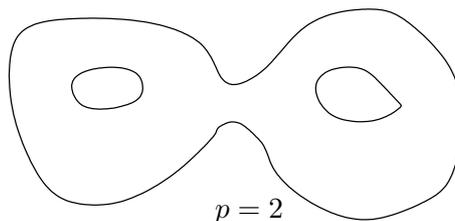
$$\chi(M) := e_0 - e_1 + e_2 = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H_{d\mathbb{R}}^i(M)$$

$\chi(M)$  ist eine topologische Invariante.

3. Ist  $M^2$  zusammenhängend, kompakt und orientiert, dann ist  $M^2$  homöomorph zu

$$M^2 \cong S^2 \# \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{p\text{-mal}} =: F_p,$$

wobei  $\chi(M^2) = 2(1 - p)$ . Die Zahl  $p$  heißt "Geschlecht" von  $M^2$ .



**Ziel:** (Gauß-Bonnet) Sei  $M^2$  kompakt, orientierbar und zusammenhängend mit Riemannscher Metrik und Schnittkrümmung<sup>1</sup>  $K \in C^\infty(M)$ . Dann gilt

$$\underbrace{\int_M K \, dM}_{\text{Totalkrüm.}} = \underbrace{2\pi\chi(M)}_{\text{Unabhängig von } g!} = 4\pi(1-p).$$

**Folgerungen:**

- $M^2$  ist diffeomorph zu  $S^2$  ( $p = 0$ )  $\iff \int_M K \, dM > 0$
- $M^2$  ist diffeomorph zu  $T^2$  ( $p = 1$ )  $\iff \int_M K \, dM = 0$
- $M^2$  ist diffeomorph zu  $F_p$  ( $p > 1$ )  $\iff \int_M K \, dM < 0$ .

Im folgenden sei  $(M, g)$  stets eine kompakte, orientierte und zsh. Riemannsche MF der Dimension 2. Mit  $\nabla$  bezeichnen wir ihren Levi-Civita-Zsh. Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M^2$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve auf  $M^2$ . Dann sei

- $\tau(t) := \gamma'(t)$  der Tangentialvektor von  $\gamma$ , und
  - $n(t) := D_{\frac{\pi}{2}}(\tau(t)) \in T_{\gamma(t)}M^2$  der Normalenvektor von  $\gamma(t)$ .
- Dabei bezeichne  $D_\varphi$  eine Drehung in positive Richtung, sodass

$$(\tau(t), n(t)) \in \mathcal{O}_{T_{\gamma(t)}M}.$$

Wir betrachten das VF  $\frac{\nabla\gamma'}{dt} \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  entlang  $\gamma$ . Da  $g(\gamma', \gamma') \equiv 1$ , folgt

$$g\left(\frac{\nabla\gamma'}{dt}, \gamma'\right) \equiv 0,$$

d.h.  $\frac{\nabla\gamma'}{dt}(t)$  und  $n(t)$  sind parallele Vektoren. Folglich existiert eine Funktion

$$k_g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\frac{\nabla\gamma'}{dt} = k_g(t) \cdot n(t).$$

---

<sup>1</sup>siehe dazu die Definition auf Seite 175

**Definition.**  $k_g(t)$  heißt geodätische Krümmung von

$$\gamma : I \longrightarrow M^2$$

im Parameter  $t$ .

**Bemerkung.** Offensichtlich gilt

$$\gamma \text{ ist eine Geodäte} \Leftrightarrow \frac{\nabla \gamma'}{dt} \equiv 0 \Leftrightarrow k_g \equiv 0.$$

**Satz 4.1. Lokale Version von Gauß-Bonnet.** Sei  $U \subset M^2$  eine offene Teilmenge, so dass  $cl(U)$  diffeomorph zu einer Kreisscheibe in einem Kartenbereich von  $M^2$  ist. Dann gilt

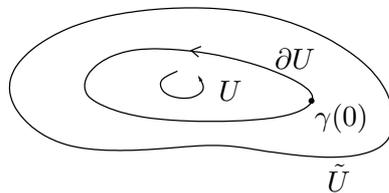
$$\int_U K dM + \int_{\partial U} k_g = 2\pi \quad \text{mit} \quad \int_{\partial U} k_g := \int_0^l k_g(t) dt,$$

wobei  $k_g$  die Krümmung der auf Bogenlänge parametrisierten Parametrisierung

$$\gamma : [0, l] \longrightarrow \partial U$$

ist, bei der  $\gamma'$  der auf  $\partial U$  induzierten Orientierung entspricht.

*Beweis.* Sei  $U \subset M^2$  eine 2-dim. Untermannigfaltigkeit mit Rand  $\partial U \cong S^1$ .



Auf dem Kartenbereich  $\tilde{U}$  existieren globale Vektorfelder  $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$ , sodass  $(X_1(x), X_2(x))$  eine positiv-orientierte ONB in  $T_x \tilde{U}$  bilden.

- Wir betrachten die 1-Form  $\omega \in \Omega^1(\tilde{U})$

$$\omega := g(X_1, \nabla X_2)$$

*Behauptung:*  $d\omega = K dM|_{\tilde{U}}$

Da  $(X_1, X_2)$  eine positiv-orientierte ONB ist, genügt es zu zeigen, dass

$$d\omega(X_1, X_2) = K.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 d\omega(X_1, X_2) &= X_1(\omega(X_2)) - X_2(\omega(X_1)) - \omega([X_1, X_2]) \\
 &= X_1(g(X_1, \nabla_{X_2} X_2) - X_2(g(X_1, \nabla_{X_1} X_2))) \\
 &\quad - g(X_1, \nabla_{[X_1, X_2]} X_2) \\
 &= g(\nabla_{X_1} X_1, \nabla_{X_2} X_2) + g(X_1, \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_2) \\
 &\quad - g(\nabla_{X_2} X_1, \nabla_{X_1} X_2) - g(X_1, \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_2) \\
 &\quad - g(X_1, \nabla_{[X_1, X_2]} X_2) \\
 &= g(X_1, (\nabla_{X_1} \nabla_{X_2} - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} - \nabla_{[X_1, X_2]}) X_2) \\
 &\quad + g(\nabla_{X_1} X_1, \nabla_{X_2} X_2) - g(\nabla_{X_1} X_1, \nabla_{X_1} X_2) \\
 &= \underbrace{\mathcal{R}(X_1, X_2, X_2, X_1)}_K + g(\nabla_{X_1} X_1, \nabla_{X_2} X_2) - g(\nabla_{X_2} X_1, \nabla_{X_1} X_2)
 \end{aligned}$$

Da  $g(X_i, X_i) \equiv 1$  folgt

- $\nabla_X X_1 \perp X_1$  für alle  $X$  und
- $\nabla_X X_2 \perp X_2$  für alle  $X$ .

Damit ist dann

$$\nabla_X X_1 = a(X) X_2 \quad \text{und} \quad \nabla_X X_2 = b(X) X_1.$$

Wir erhalten also

$$g(\nabla_{X_1} X_1, \nabla_{X_2} X_2) = a(X_1) \cdot b(X_2) \cdot g(X_2, X_1) = 0$$

und

$$g(\nabla_{X_2} X_1, \nabla_{X_1} X_2) = a(X_2) \cdot b(X_1) \cdot g(X_2, X_1) = 0.$$

Die Behauptung wäre damit gezeigt.

2. Aus dem Satz von Stokes folgt nun

$$\int_U K \, dM = \int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega$$

*Behauptung:*

$$\int_{\partial U} \omega = - \int_{\partial U} k_g + 2\pi$$

Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow \partial U$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Parametrisierung von  $\partial U$ , entsprechend der induzierten Orientierung auf  $\partial U$ . ( D.h.  $(\partial U \setminus \gamma(0), \gamma^{-1})$  ist eine Karte von  $\partial U$ . )

Sei  $X_i \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  das Vektorfeld

$$X_i(t) := X_i(\gamma(t)) \quad i = 1, 2$$

und  $(\tau(t), u(t))$  die Tangenten- und Normalvektoren in  $\gamma(t)$ .

Sei weiterhin  $\varphi(t) := \angle(X_1(t), \tau(t))$ , dann ist

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } \varphi} \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} \quad (*)$$

Da  $\gamma$  eine Parametrisierung von  $\partial U \setminus \gamma(0)$  ist, ist mit  $\frac{\partial}{\partial t} = \gamma'(t) = \tau(t)$

$$\int_{\partial U} \omega = \int_0^l \omega \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) dt = \int_0^l \omega(\gamma'(t)) dt \quad (**)$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \omega(\gamma'(t)) &= g(X_1, \nabla_{\gamma'(t)} X_2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \cos \varphi(t) \cdot g(\tau(t), \nabla_{\gamma'(t)} X_2) - \sin \varphi(t) \cdot g(n, \nabla_{\gamma'} X_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} X_2 &= \nabla_{\gamma'} (\sin \varphi(t) \cdot \tau(t) + \cos \varphi(t) \cdot n(t)) \\ &= \cos \varphi(t) \cdot \varphi'(t) \tau(t) + \sin \varphi(t) \cdot \frac{\nabla \gamma'}{dt} \\ &\quad - \sin \varphi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot n(t) + \cos \varphi(t) \cdot \frac{\nabla n(t)}{dt} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \omega(\gamma'(t)) &= \cos^2 \varphi(t) \cdot \varphi'(t) + \cos \varphi(t) \cdot \sin \varphi(t) \cdot g\left(\gamma'(t), \frac{\nabla \gamma'}{dt}\right) \\ &\quad - \cos^2 \varphi(t) \cdot g\left(\gamma'(t), \frac{\nabla n(t)}{dt}\right) \\ &\quad - \sin^2 \varphi(t) \cdot g\left(n(t), \frac{\nabla \gamma'}{dt}\right) + (\sin^2 \varphi(t)) \varphi'(t) \\ &\quad - \cos \varphi(t) \cdot \sin \varphi(t) \cdot g\left(n(t), \frac{\nabla n(t)}{dt}\right) \end{aligned}$$

Da aber

- $g(n(t), n(t)) \equiv 1 \Rightarrow g\left(n, \frac{\nabla n}{dt}\right) = 0$
- $g(n(t), \tau(t)) \equiv 0 \Rightarrow g\left(n, \frac{\nabla \tau}{dt}\right) + g\left(\frac{\nabla n}{dt}, \tau\right) \equiv 0$
- $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \equiv 1 \Rightarrow g\left(\gamma', \frac{\nabla \gamma'}{dt}\right) \equiv 0$

und nach Definition  $\frac{\nabla \gamma'}{dt} = k_g(t) \cdot n(t)$ , folgt

$$\omega(\gamma'(t)) = \varphi'(t) - k_g(t)$$

Setzen wir dies in (\*\*\*) ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \omega &= \int_0^l \omega(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_0^l \varphi'(t) dt - \int_0^l k_g(t) dt \\ &= (\varphi(l) - \varphi(0)) - \int_{\partial U} k_g \end{aligned}$$

Da  $\partial U$  eine einfach geschlossene Kurve ist, gilt für den Winkel

$$(\varphi(l) - \varphi(0)) = 2\pi,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Insgesamt ist also

$$\int_U K dM + \int_{\partial U} k_g = 2\pi.$$

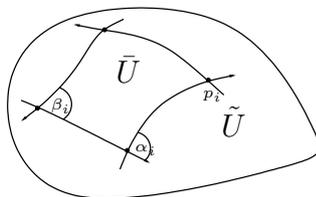
□

**Satz 4.2. Gauß-Bonnet für  $n$ -Ecke.** Sei  $U \subset M^2$  offen und  $\tilde{U}$  liege in einem Kartengebiet von  $M^2$  und sei diffeomorph zu einem  $N$ -Eck. Seien  $\beta_i$  die Innenwinkel und bezeichne

$$\alpha_i = \pi - \beta_i$$

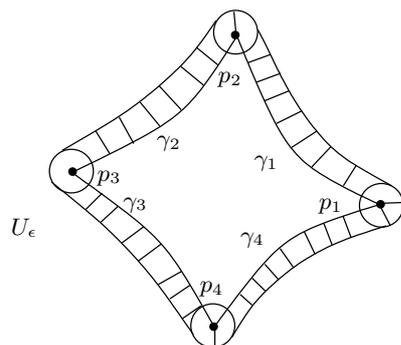
dann gilt

$$\int_U K dM + \int_{\partial U} k_g + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$



*Beweis.* Sei  $U_\epsilon$  eine "geglättete" Umgebung von  $U$ :

$$\bar{U} \subset U_\epsilon \subset \tilde{U} \quad U_\epsilon \text{ ist diffeomorph zu einem Kreis } D^2$$



Dieses  $U_\epsilon$  bekommt man, indem man einen Kreisbogen um  $p_i$  vom Radius  $\epsilon$  (bzgl.  $d_g$ ) und orthogonale Geodäten der Länge  $\epsilon$  auf die  $\gamma_i$  legt. Auf dieses  $U_\epsilon$  wenden wir nun Satz 4.1 an und erhalten

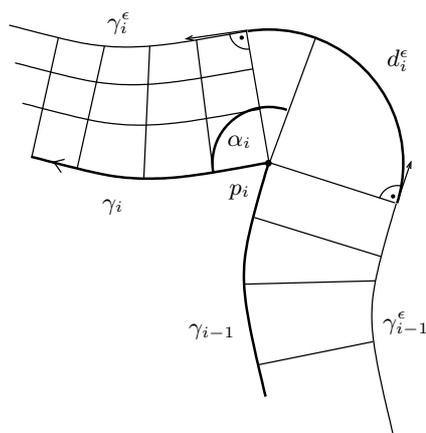
$$\int_{U_\epsilon} K dM + \int_{\partial U_\epsilon} k_g = 2\pi.$$

Aus der Stetigkeit des Lebesgue-Maßes folgt dann für den Grenzwert

$$\int_{U_\epsilon} K dM \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_U K dM$$

Des weiteren ist

$$\int_{\partial U_\epsilon} k_g = \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i^\epsilon} k_g}_{\text{parallele Randstücke}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{d_i^\epsilon} k_g}_{\text{Kreisbogenabschnitte}}$$



Da  $(\gamma_i^\epsilon)' \rightarrow \gamma_i'$  und  $n_i^\epsilon \rightarrow n_i$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , so geht auch  $k_g^{\gamma_i^\epsilon} \rightarrow k_g$  und damit ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_i \int_{\gamma_i^\epsilon} k_g = \sum_i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_i^\epsilon} k_g = \int_{\gamma_i} k_g = \int_{\partial U} k_g$$

Wie in Satz 4.1 Für die Kreisbögen gilt  
(\*\*)

$$\int_{d_i^\epsilon} k_g = \underbrace{\int_0^{l_i^\epsilon} \varphi'(t) dt}_{(*)} - \int_{d_i^\epsilon} \omega$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} (*) &= \underbrace{\int_0^{l_i^\epsilon} \varphi'(t) dt}_{(*)} \\ &= \varphi(l_i^\epsilon) - \varphi(0) \\ &= \angle(x_1, (\delta_i^\epsilon)'(l_i^\epsilon)) - \angle(x_1, (\delta_i^\epsilon)'(0)) \\ &=: \alpha_i(\epsilon) \end{aligned}$$

Führt man nun den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  durch, dann erhält man

$$\alpha_i(\epsilon) \rightarrow \angle(v_1, v_2) = \alpha_i$$

und

$$\int_{d_i^\epsilon} \omega \rightarrow 0,$$

da  $d_i^\epsilon$  sich zu einem Punkt zusammen zieht. Insgesamt ergibt dies dann

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial U_\epsilon} k_g = \int_{\partial U} k_g + \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

und dies verifiziert die Behauptung.  $\square$

**Folgerung. Winkelsumme in Geodätischen Dreiecken**

Sei  $(M^2, g)$  eine 2-dim. RMF und  $\Delta \subset M$  eine geodätisches Dreieck, d.h  $\Delta$  ist diffeom. zu einem Dreieck und seine Kanten bestehen aus Geodäten.

Seien weiterhin  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  die Innenwinkel von  $\Delta$ , dann gilt

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi + \int_{\Delta} K dM.$$

Insbesondere ist dann

1. Für

- $K \equiv 0$  die Innenwinkelsumme  $\sum \beta_i = \pi$ ,
- $K < 0$  die Innenwinkelsumme  $\sum \beta_i < \pi$  und für
- $K > 0$  die Innenwinkelsumme  $\sum \beta_i > \pi$ .

Dies gilt für beliebige Geodätische Dreiecke.

2. Sei  $K \equiv K_0$ , dann ist

$$\sum \beta_i = \pi + K_0 \cdot \text{Vol}(\Delta),$$

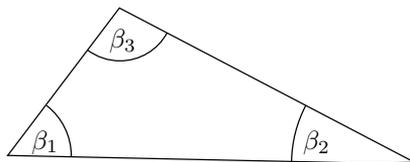
d.h. die Innenwinkelsumme hängt vom Volumen ab!

**Modelle für Geometrien<sup>2</sup>**

Sei  $(M^2, g)$  eine einfach-zsh. RMF.

1. **Die Euklidische Geometrie**  $K \equiv 0$

Im  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt sind die Geodäten die Geraden, ein geodätisches Dreieck hat folgende Gestalt:



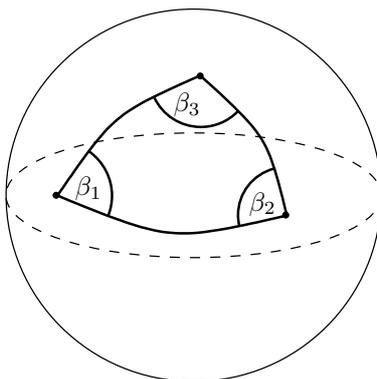
<sup>2</sup>siehe hierzu auch die Betrachtungen auf Seite 205

Für die Innenwinkel gilt nun wie zu erwarten

$$\sum \beta_i = \pi.$$

## 2. Die Sphärische Geometrie $K \equiv 1$

Hier sind die Geodäten gerade die Großkreise.



Die Innenwinkelsumme ist also

$$\sum \beta_i = \pi + Vol(\Delta) > \pi.$$

## 3. Die Hyperbolische Geometrie $K \equiv -1$

Die geodätischen Dreiecke haben hier die Gestalt:

Für die Innenwinkelsumme ergibt sich deshalb

$$\sum \beta_i = \pi - Vol(\Delta) < \pi.$$

## Der Beweis des Satzes von Gauß-Bonnet

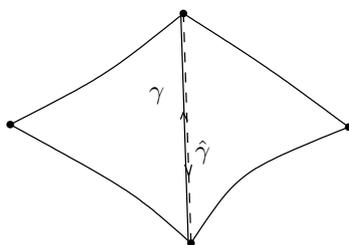
**Satz 4.3. Gauß-Bonnet.** Sei  $(M^2, g)$  eine kompakte, orientierte, 2-dim. RMF mit Schnittkrümmung  $K$ , dann gilt

$$\int_M K dM = 2\pi\chi(M)$$

*Beweis.* Wir triangulieren  $M$  (zerlegen es in Dreiecke  $\Delta_j$ ). Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M K \, dM &= \sum_j \int_{\Delta_j} K \, dM \\ &\stackrel{\text{Satz 4.2}}{=} \sum_j \left( - \int_{\partial\Delta_j} k_g + \left( \sum_{i=1}^3 \beta_i(\Delta_j) \right) - \pi \right) \end{aligned}$$

(Wir wählen die  $\Delta_j$  so, dass  $cl\Delta_j$  in einem Kartenbereich liegt.) In der Triangulierung tritt jede Kante in genau 2 Dreiecken mit jeweils entgegengesetzter Orientierung auf.



Nach Definition von  $k_g$  ist dann mit  $\hat{\gamma}(t) := \gamma(l - k) = \gamma^-$

$$k_g^{\hat{\gamma}}(t) = -k_g^{\gamma}(l - t),$$

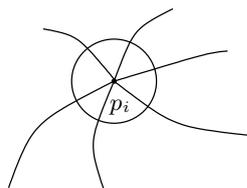
(Beim  $\gamma'$  und  $n'$  ändert sich nur das Vorzeichen.) Es folgt also

$$\begin{aligned} \int_{-\Gamma} k_g &= \int_0^l k_g^{\hat{\gamma}}(s) \, ds = - \int_0^l k_g^{\gamma} \left( \underbrace{l - s}_t \right) \, ds \\ &= + \int_l^0 k_g^{\gamma}(t) \, dt = - \int_0^l k_g^{\gamma}(t) \, dt \\ &= - \int_{\Gamma} k_g \end{aligned}$$

und damit ist

$$\sum_{\Delta} \int_{\partial\Delta} k_g = 0.$$

Wir betrachten nun die Innenwinkelsummen:



In jeder Ecke ist die Summe der anliegenden Innenwinkel der Dreiecke gleich  $2\pi$ , sodass

$$\sum_j \sum_{i=1}^3 \beta_i(\Delta_j) = 2\pi \cdot e_0,$$

und deshalb

$$\int_M K dM = 2\pi \cdot e_0 - e_2 \cdot \pi.$$

Nun hat jedes Dreieck 3 Kanten. Da aber jede Kante jeweils in 2 Dreiecken vorkommt, gilt für die Anzahl der Kanten  $e_1$

$$e_1 = \frac{3}{2} \cdot e_2.$$

Es ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \int_M K dM &= 2\pi \cdot e_0 - e_2 \cdot \pi = 2\pi \cdot e_0 + 2 \cdot e_2 \cdot \pi - 3 \cdot e_2 \cdot \pi \\ &= 2\pi (e_0 - e_1 + e_2) \\ &= 2\pi \cdot \chi(M^2). \end{aligned}$$

□

## 4.2 Lokale Isometrien und semi-Riem. Überlagerungen

**Definition.** Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Überlagerung von  $M$  ist ein Tripel  $(\tilde{M}, \pi, M)$  aus folgenden Objekten

1.  $\tilde{M}$  ist eine glatte MF.
2.  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  ist eine  $C^\infty$ -Abbildung.
3. Für jeden Punkt  $x \in M$  existiert eine offene, zsh. Umgebung  $U(x) \subset M$ , sodass

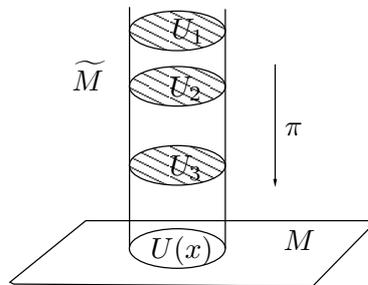
$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I} \tilde{U}_i,$$

wobei  $\tilde{U}_i \subset \tilde{M}$  offene und paarweise disjunkte Mengen sind, für die

$$\pi|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U$$

ein Diffeomorphismus ist.

Für zsh. MF ist  $I$  für alle  $x \in M$  gleich. Die Umgebung  $U(x)$  heißt korrekt überlagerte Umgebung, die  $U_i$  heißen Blätter über  $U$ . Die Mannigfaltigkeit  $M$  heißt Basis(raum), die Mannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  Totalraum und die Abbildung  $\pi$  Projektion der Überlagerung  $(\tilde{M}, M, \pi)$ .



Ist die Anzahl der Blätter *endlich*, so spricht man von einer endlichen Überlagerung. Ist  $M$  selbst korrekt überlagert, dann heißt  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  trivial.

**Bemerkung.** Oft zeichnet man in  $(\tilde{M}, M, \pi)$  einen Basispunkt aus: Sei  $x_0 \in M$  und  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ , so schreibt man auch

$$\pi : (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (M, x_0)$$

als Überlagerung.

#### Beispiel 4.4. Überlagerungen

##### 1. Überlagerung der $S^1$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

liefert eine Überlagerung der  $S^1$ .

##### 2. Überlagerung der $S^1$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} p_n : S^1 \subset \mathbb{C} &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

liefert eine  $n$ -fache Überlagerung der  $S^1$ .

### 3. Überlagerung des $\mathbb{R}P^n$ durch die $S^n$

Hierzu verweisen wir auch auf das Bsp. 1.3.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : S^n &\longrightarrow \mathbb{R}P^n = S^n / \{\pm \text{id}\} \\ x &\longmapsto \{x, -x\} \end{aligned}$$

liefert eine Überlagerung von  $\mathbb{R}P^n$ .

### 4. Allgemein

Sei  $\Gamma$  eine Gruppe von Diffeomorphismen die eigentlich diskontinuierlich wirkt, d.h. für jeden Punkt  $x \in M$  existiert eine Umgebung  $U(x)$ , sodass

$$U(x) \cap g \cdot U(x) = \emptyset \quad \forall g \neq e \text{ aus } \Gamma.$$

Dann ist

$$\pi : M \longrightarrow M/\Gamma$$

eine Überlagerung.

Überlagerungen werden topologisch durch die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$  klassifiziert.<sup>3</sup>

## Eigenschaften von Überlagerungen

**Definition.** Seien  $\sigma, \omega : [0, 1] \rightarrow M$  zwei stetige Wege mit  $\sigma(0) = \omega(0) = x$  und  $\sigma(1) = \omega(1) = y$ . Dann heißen  $\sigma$  und  $\omega$  homotop bzgl.  $\{0, 1\}$ , ( $\sigma \sim \omega$  bzgl.  $\{0, 1\}$ ), falls es eine stetige Abbildung

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow M$$

gibt, für die  $H(t, 0) = \omega(t)$ ,  $H(t, 1) = \sigma(t)$ ,  $H(0, s) = x$  und  $H(1, s) = y$  erfüllt ist. Die Abbildung  $H$  heißt Homotopie von  $\sigma$  und  $\omega$ .

Mit

$$[\omega] := \{\sigma \in \Omega(x, y) \mid \sigma \sim \omega \text{ bzgl. } \{0, 1\}\}$$

bezeichnen wir die *Homotopieklasse* von  $\omega$ . Die Menge

$$\pi_1(M, x) := \{\text{Menge der Homotopieklassen von geschlossenen Wegen}\}$$

hat bezüglich der Operation

$$\begin{aligned} * : \pi_1(M, x) \times \pi_1(M, x) &\longrightarrow \pi_1(M, x), \\ [\omega] * [\sigma] &\longmapsto [\omega * \sigma] \end{aligned}$$

wobei

$$(\omega * \sigma)(t) := \begin{cases} \omega(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

eine Gruppenstruktur.

<sup>3</sup>siehe Vorlesung "Algebraische Topologie"

**Definition.**  $\pi_1(M, x)$  heißt Fundamentalgruppe von  $(M)$  in  $x$

**Hochhebung von Wegen**

Ist  $(\tilde{M}, M, \pi)$  eine Überlagerung und  $\tilde{x} \in \tilde{M}$ . Sei

$$\gamma : I \longrightarrow M$$

eine glatte Kurve mit  $\gamma(0) = \pi(\tilde{x})$ . Dann existiert genau eine  $C^\infty$ -Kurve

$$\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{M}$$

mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$  und  $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

**Homotopiehebungseigenschaft**

Ist  $F : M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung, so induziert sie einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} F_* : \pi_1(M, x) &\longrightarrow \pi_1(N, F(x)) \\ [\omega] &\longmapsto [F \circ \omega] \end{aligned}$$

Ist  $(\tilde{M}, M, \pi)$  eine Überlagerung, dann ist  $\pi_*$  injektiv.

**Definition.** Sei  $\pi : (\tilde{M}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (M, x_0)$  eine Überlagerung, dann heißt

$$\pi_*(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(M, x_0)$$

die Charakteristische Untergruppe einer Überlagerung. Wir bezeichnen sie mit  $G(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$

**Klassifikationssatz**

**Definition.** Sei  $M$  eine zusammenhängende glatte MF. Zwei Überlagerungen heißen äquivalent, falls ein Diffeomorphismus

$$F : \tilde{M}_1 \longrightarrow \tilde{M}_2$$

existiert, sodass

$$\pi_2 \circ F = \pi_1$$

Nun existiert eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Äquivalenzklassen} \\ \text{von Überlagerungen} \\ \pi : E \rightarrow M, \\ E \text{ zsh.} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Konjugationsklassen} \\ \text{von Untergruppen} \\ H \subset \pi_1(M, x_0) \end{array} \right\}$$

wobei

$$(E, M, \pi) \longmapsto H := \pi_*(\pi_1(E, e_0)) \text{ mit } e_0 \in \pi^{-1}(x_0)$$

und

$$H \subset \pi_1(M, x_0) \longmapsto E := \Omega(M, x_0) / \sim_H$$

Seien hierbei  $\omega_1$  und  $\omega_2$  zwei Wege aus  $\Omega(M, x_0)$ , dann setzen wir

$$\omega_1 \sim_H \omega_2 \iff \omega_1(1) = \omega_2(1) \text{ und } [\omega_1 * \omega_2^{-1}] \in H.$$

Als Projektion nimmt man

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow M. \\ [\omega] &\longmapsto \omega(1) \end{aligned}$$

Es gelten die folgenden beiden Sätze:

1. *Eindeutigkeitssatz*

Zwischen 2 zusammenhängenden Überlagerungen  $(E_1, e_1)$  und  $(E_2, e_2)$  von  $(M, x_0)$  existiert genau dann ein Basispunkt erhaltender Diffeomorphismus  $f$  mit  $\pi_1 = \pi_2 \circ f$  ( $E_1$  und  $E_2$  sind äquivalent), wenn sie die gleichen charakteristischen Untergruppen haben, d.h.

$$G(E_1, e_1) = G(E_2, e_2) \subset \pi_1(M, x_0).$$

2. *Existenzsatz*

Ist  $M$  eine zsh. MF und  $G \subset \pi_1(M, x_0)$ , dann gibt es eine zsh. Überlagerung  $(E, M, \pi)$  mit  $G(E, e_0) = G$ .

### *Universelle Überlagerung*

**Definition.** Eine zsh MF  $M$  heißt einfach-zusammenhängend falls  $\pi_1(M) = 1$ . Eine Überlagerung  $(\widetilde{M}, M, \pi)$  heißt universell, falls  $\widetilde{M}$  einfach-zsh. ist. Sei  $(\widetilde{M}, M, \pi)$  eine Überlagerung. Eine Decktransformation ist ein Automorphismus

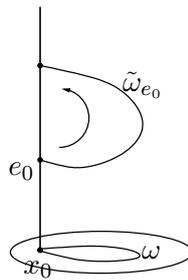
$$\phi \in \text{Aut}(\widetilde{M}) \subset \text{Diff}(\widetilde{M}),$$

der die Fasern respektiert, d.h. es gilt  $\pi \circ \phi = \pi$ . Die Gruppe der Decktransformationen bezeichnen wir mit  $\text{Deck}(\pi)$ .

Jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $M$  besitzt eine bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte *universelle* Überlagerung  $\widetilde{M}$ . Die Fasern der Überlagerung sind mit  $\pi_1(M, x_0)$  zu identifizieren:

1. Wir zeigen  $\pi_1(M, x_0) \cong \pi^{-1}(x_0)$ .

Sei  $[\omega] \in \pi_1(M, x_0)$  und  $\tilde{\omega}_{e_0} : I \rightarrow \widetilde{M}$  ein Lift von  $\omega$  mit  $\tilde{\omega}_{e_0}(0) = e_0$ .



Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1(M, x_0) &\longrightarrow \pi^{-1}(x_0) \\ [\omega] &\longmapsto \tilde{\omega}_{e_0}(1) \end{aligned}$$

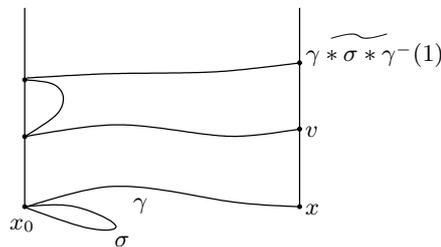
eine Bijektion.

2. Wir zeigen  $Deck(\pi) \cong \pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$

Wir wollen nun eine Wirkung von  $\pi_1(M, x_0)$  auf  $\tilde{M}$  realisieren, die die Fasern respektiert. Sei dazu  $[\omega] \in \pi_1(M, x_0)$  fixiert, und  $v \in \pi^{-1}(x) \subset \tilde{M}$  beliebig mit. Da  $M$  zusammenhängend und damit auch wegzsh. ist, existiert ein Weg

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$$

mit  $\gamma(0) = x_0$  und  $\gamma(1) = x$ .



Damit ist

$$\begin{aligned} \pi_1(M, x_0) \times \tilde{M} &\longrightarrow \tilde{M} \\ ([\sigma], v) &\longmapsto [\sigma] \cdot v := \gamma * \tilde{\sigma} * \gamma^{-1}(1) \end{aligned}$$

eine fasertreue Wirkung. Wir identifizieren nun  $[\sigma] \in \pi_1(M, x_0)$  nach 1. mit  $u = \tilde{\sigma}(1) \in \pi^{-1}(x_0)$ . Da

$$G(\tilde{M}, u) = G(\tilde{M}, \tilde{x}_0) = \pi_*(\pi_1(\tilde{M}, \tilde{x}_0)) = \pi_*(1) = 1,$$

existiert nach dem Eindeutigkeitssatz<sup>4</sup> eine Decktransformation  $f_{[\sigma]}$  mit  $f(\tilde{x}_0) = u$ . Sei andererseits  $f \in Deck(\pi)$ , dann betrachten wir  $f(\tilde{x}_0) \in \pi^{-1}(x_0)$ . Nach 1. entspricht dies einem  $[\sigma]$  aus  $\pi_1(M, x_0)$ .

<sup>4</sup>sie Fakt 3 auf Seite 263

Wir haben also

$$\text{Deck}(\pi) \cong \pi_1(M, x_0) \cong \pi^{-1}(x_0)$$

Darüber hinaus wirkt  $\text{Deck}(\pi)$  eigentlich diskontinuierlich auf  $\widetilde{M}$ , mit Bsp 4.4.4 ist damit  $(\widetilde{M}, \widetilde{M}/\Gamma, p)$  eine Überlagerung. Insbesondere ist damit  $\widetilde{M}/\Gamma$  eine MF. Die Projektion  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  liefert dann einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \bar{\pi} : \widetilde{M}/\Gamma &\longrightarrow M. \\ [\tilde{m}] &\longmapsto \pi(m) \end{aligned}$$

## Semi-Riemannsche Überlagerungen

**Definition.** Seien  $(M, g)$  und  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$  semi-Riemannsche MF. Eine Abbildung

$$\phi : (\widetilde{M}, \tilde{g}) \longrightarrow (M, g)$$

heißt semi-Riemannsche Überlagerung, falls

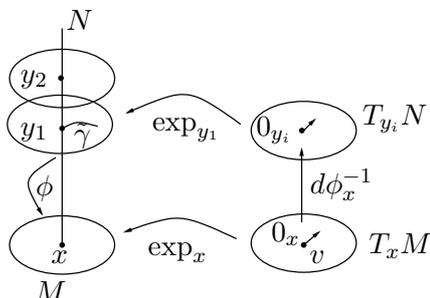
- $(\widetilde{M}, M, \phi)$  eine Überlagerung ist, und
- $\phi$  eine lokale Isometrie, d.h.  $\phi^*g = \tilde{g}$

Als nächstes beweisen wir ein nützliches Kriterium, das angibt, wann eine lokale Isometrie eine semi-Riemannsche Überlagerung ist.

**Satz 4.5. Liftungsbedingung.** Ist  $\phi : (N, h) \rightarrow (M, g)$  eine lokale Isometrie mit der folgenden Eigenschaft: Für jeden Punkt  $x \in N$  und jede Geodäte  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\phi(x) = \sigma(0)$ , existiert ein Lift  $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow N$  mit  $\tilde{\sigma}(0) = x$  und  $\phi \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ . Dann ist  $\phi$  eine semi-Riemannsche Überlagerung.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1.  $\phi$  ist surjektiv, da es zu je 2 Punkten  $x, y \in M$  eine gebrochene Geodäte von  $x$  nach  $y$  gibt.
2. Sei  $U \subset M$  eine Normalenumgebung von  $x \in M$ . Wir zeigen, dass  $U$  korrekt überlagert ist



Sei  $\tilde{U} \subset T_x M$  sternförmig bezüglich  $0_x$  und  $\exp_x : \tilde{U} \rightarrow U(x)$  ein Diffeomorphismus. Wir betrachten einen Punkt  $y \in \phi^{-1}(x)$ . Nach Vor. ist

$$d\phi_y : T_y N \longrightarrow T_x M$$

ein linearer Isomorphismus. Somit ist

$$\tilde{U}(y) := d\phi_x^{-1}(\tilde{U}) \subset T_y N$$

auch sternförmig bzgl.  $0_y$ .

a)  $\exp_y$  ist auf  $\tilde{U}(y)$  definiert

Sei  $v \in \tilde{U}(y) \subset T_y N$ . Dann ist

$$\hat{v} = d\phi_y(v) \in \tilde{U} \subset T_x M$$

und somit existiert eine radiale Geodäte  $\gamma_{\hat{v}} : [0, 1] \rightarrow N$  mit  $\gamma_{\hat{v}}(0) = x$  und  $\gamma'_{\hat{v}}(0) = \hat{v}$ . Nach Vor. existiert ein Lift  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow N$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = y$  und  $\phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma_{\hat{v}}$ . Da aber  $\phi$  eine lokale Isometrie ist, ist  $\tilde{\gamma}$  eine Geodäte von  $(N, h)$  und

$$d\phi_y(\tilde{\gamma}'(0)) = \gamma'_{\hat{v}}(0) = \hat{v}.$$

Damit ist  $\tilde{\gamma}'(0) = v$  und deshalb  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_v$ . D.h.  $\exp_y(v) = \tilde{\gamma}_v(1)$  existiert.

b) Die Abbildung

$$\exp_y : \tilde{U}(y) \longrightarrow U(y) := \exp_y(\tilde{U}(y))$$

ist ein Diffeomorphismus.

i. Nach der Kettenregel und der Definition der Exponentialabbildung gilt

$$\underbrace{\exp_x \circ d\phi_y}_{\text{Diffeo}} = \phi \circ \exp_y : \tilde{U}(y) \longrightarrow U(x) \quad (*)$$

woraus die Injektivität bzw. die Bijektivität von  $\exp_y : \tilde{U}(y) \rightarrow U(y)$  folgt.

ii. Differenziert man (\*), dann sieht man, dass aus

$$\underbrace{d(\exp_x)_{d(\phi_y)(v)}(d\phi_y)_v}_{\text{Isom } \forall v \in \tilde{U}} = d\phi_{\gamma_v(1)}(d\exp_y)_v$$

auch Isomorphie von

$$(d\exp_y)_v : T_v(T_y N) \longrightarrow T_{\gamma_v(1)} N$$

folgt, sodass  $\exp_y$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist dann auch

$$\exp_y : \underbrace{\tilde{U}(y)}_{\text{sternf.}} \longrightarrow U(y)$$

ein Diffeomorphismus.

Wir haben also gezeigt, dass  $U(y)$  eine Normalenumgebung von  $y$  in  $(N, h)$  ist. Zudem ist nun  $\phi : U(y) \rightarrow U(x)$  ein Diffeomorphismus, denn

$$\phi = \exp_x \circ d\phi_y \circ \exp_y^{-1}.$$

c) Es bleibt zu zeigen, dass sich  $\phi^{-1}(U)$  in die Normalenumgebungen

$$\{U(y) \mid y \in \phi^{-1}(x)\}$$

blättert, d.h.

$$\phi^{-1}(U) = \bigcup \{U(y) \mid y \in \phi^{-1}(x)\}$$

i. Seien  $y_1 \neq y_2$  aus  $\phi^{-1}(x)$ . Dann ist  $U(y_1) \cap U(y_2) = \emptyset$ .

Angenommen  $z$  ist ein Element der Schnittmenge. Seien  $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow N$  die radialen Geodäten von  $z$  nach  $y_i$ . Dann sind

$$(\phi \circ \sigma_i) : [0, 1] \rightarrow U(x)$$

radiale Geodäten von  $x$  nach  $\phi(z)$ . Da  $U(x)$  eine Normalenumgebung ist, folgt  $\phi(\sigma_1) = \phi(\sigma_2)$  sodass

$$d\phi_z(\sigma_1'(0)) = d\phi_z(\sigma_2'(0)),$$

Und da  $d\phi$  nach Voraussetzung ein Isomorphismus ist, folgt jedoch

$$\sigma_1'(0) = \sigma_2'(0) \Rightarrow \sigma_1 \equiv \sigma_2 \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Widerspruch!

ii. Sei  $z \in \phi^{-1}(x)$ . Dann existiert ein  $y_i \in \phi^{-1}(x)$  mit  $z \in U(y_i)$

Dazu betrachten wir die Geodäte

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow U(x) \subset M$$

mit  $\sigma(0) = x$  und  $\sigma(1) = \phi(z)$ . ( $\sigma(t) = \exp_x(t \exp_x^{-1}(\phi(z)))$ ). Nach Vor. ex. ein Lift  $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow N$  und  $\tilde{\sigma}(1) = z$ . Dann betrachten wir

$$y := \tilde{\sigma}(0) \in \phi^{-1}(x).$$

Damit ist  $\tilde{\sigma}([0, 1]) \subset U(y)$ .

□

**Satz 4.6.** Sei  $\phi : (N, h) \rightarrow (M, g)$  eine surjektive lokale Isometrie und  $M$  zsh. Dann ist  $(N, h)$  genau dann geodätisch vollständig, wenn  $(M, g)$  geodätisch vollständig ist und  $(N, M, \phi)$  eine Überlagerung ist.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Sei  $(N, M, \phi)$  eine Überlagerung und  $(M, g)$  geodätisch vollständig. Dann ist  $(N, h)$  geodätisch vollständig.

Sei  $x \in N$  und  $v \in T_x N$ . Bezeichne  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  die maximale Geodäte mit  $\gamma(0) = \phi(x)$  und  $\gamma'(0) = d\phi_x(v)$ . Da  $\phi$  eine Überlagerung ist, existiert ein eindeutiger Lift  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow N$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = x$  und  $\phi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ . Durch die Isometrie-Eigenschaft von  $\phi$  ist nun auch  $\tilde{\gamma}$  eine Geodäte, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Daraus folgt dann die Behauptung.

2. Sei  $(N, h)$  vollständig. Dann ist  $(M, g)$  geodätisch vollständig und  $(N, M, \phi)$  eine Überlagerung.

Sei  $x \in M$  und  $v \in T_x M$ . Wir wählen ein  $y \in \phi^{-1}(x)$  und betrachten die maximale Geodäte  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow N$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = y$  und  $\tilde{\gamma}'(0) = d\phi_y^{-1}(v)$ . Da  $\phi$  eine lokale Isometrie ist, ist  $\gamma := \phi \circ \tilde{\gamma}$  eine Geodäte. Zudem ist das Liftungskriterium von Satz 4.5 erfüllt ist: Sei  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  eine Geodäte in  $(M, g)$  mit  $\sigma(0) = \phi(y) = x$ . Sei  $v = d\phi_x^{-1}(\sigma'(0))$  und  $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow N$  die maximale Geodäte in  $(N, h)$  mit  $\gamma_v(0) = y$  und  $\gamma_v'(0) = v$ . Wegen der Eindeutigkeit der Geodäte ist dann

$$\phi \circ \gamma_v|_{[0,1]} = \sigma$$

also ein geodätischer Lift von  $\sigma$ .

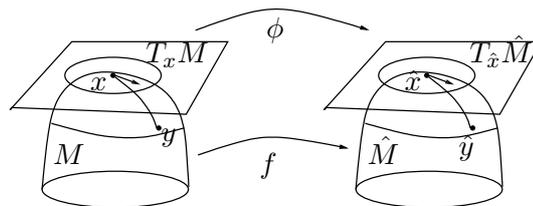
□

### Ein Satz von Cartan

Seien  $(M, g)$  und  $(\hat{M}, \hat{g})$  zwei semi-Riem. Mannigfaltigkeiten und

$$\phi : T_x M \longrightarrow T_{\hat{x}} \hat{M}$$

eine lineare Isometrie.



Sei  $U(x) \subset M$  eine Normalenumgebung, sodass

$$\phi(\exp_x^{-1}(U(x))) \in DB(\exp_{\hat{x}}).$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} f : U(x) &\longrightarrow \hat{M} \\ y &\longmapsto \exp_{\hat{x}} \circ \phi \circ \exp_x^{-1}(y) \end{aligned}$$

Wann ist  $f$  eine lokale Isometrie? Dies kann man der Krümmung ansehen! Zuerst einige Bezeichnungen: Sei  $y \in U(x)$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U(x)$  die radiale Geodäte von  $x$  nach  $y$ . Bezeichne

$$\hat{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow \hat{U}(\hat{x}) = f(U(x))$$

die radiale Geodäte mit  $\hat{\gamma}(0) = \hat{x}$  und  $\hat{\gamma}'(0) = \phi(\gamma'(0))$ . Dann ist  $\hat{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ . Sei  $\mathcal{P}_\gamma : T_x M \rightarrow T_{\gamma(t)} M$  die Parallelverschiebung entlang  $\gamma$  bzgl. des LCZ von  $(M, g)$  und  $\hat{\mathcal{P}}_{\hat{\gamma}} : T_{\hat{x}} \hat{M} \rightarrow T_{f(y)} \hat{M}$  die Parallelverschiebung entlang  $\hat{\gamma}$  in  $(\hat{M}, \hat{g})$ . Sei weiterhin

$$\begin{aligned} \phi_y : T_y M &\longrightarrow T_{f(y)} \hat{M} \\ v &\longmapsto \hat{\mathcal{P}}_{\hat{\gamma}} \circ \phi \circ \mathcal{P}_\gamma^{-1}(v) \end{aligned}$$

Dann gilt der

**Satz 4.7. Cartan'51.** *Ist für alle  $y \in U(x)$  und  $v, w, u, \tau \in T_y M$*

$$\mathcal{R}_y(v, w, u, \tau) = \hat{\mathcal{R}}_{f(y)}(\phi_y(v), \phi_y(w), \phi_y(u), \phi_y(\tau))$$

so ist

$$f : U(x) \subset M \longrightarrow \hat{M}$$

eine lokale Isometrie, d.h.

$$f^* \hat{g} = g$$

*Beweis.* Wir fixieren ein  $v \in T_y M$ . Sei  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  ein Jacobifeld entlang  $\gamma$  und  $Y(0) = 0$  und  $Y(1) = v$ . Sei weiterhin  $(e_1, \dots, e_n)$  eine ONB in  $T_x M$  und  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  die Parallelverschiebung entlang  $\gamma$ . Wir betrachten das VF  $\hat{Y} \in \mathfrak{X}_{\hat{\gamma}}(\hat{M})$

$$\hat{Y}(t) := \phi_{\gamma(t)}(Y(t))$$

1.  $\hat{Y}$  ist ein Jacobifeld entlang  $\hat{\gamma}$

Betrachten dazu die Basisdarstellung von  $Y(t)$ :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{i=1}^n y_i(t) e_i(t) \\ \gamma'(t) &= \sum_{k=1}^n x_k(t) e_k(t) \end{aligned}$$

Für die parallel verschobene ONB  $(\hat{e}_1(t), \dots, \hat{e}_n(t))$  definiert durch  $\hat{e}_i(t) := \phi_t(e_i(t))$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{Y}(t) &= \sum_{i=1}^n y_i(t) \hat{e}_i(t) \\ \hat{\gamma}'(t) &= \sum_{k=1}^n x_k(t) \hat{e}_k(t) \end{aligned}$$

Da  $Y$  ein Jacobifeld ist folgt

$$\mathcal{R}(Y, \gamma') \gamma' + \gamma'' = 0$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= y_j''(t) + \sum_{k,l,i} \mathcal{R}_{\gamma(t)}(e_i, e_k, e_l, e_j) y_i x_k x_l \\ &\stackrel{\text{Vor.}}{=} y_j''(t) + \sum_{k,l,i} \hat{\mathcal{R}}_{\hat{\gamma}(t)}(\hat{e}_i, \hat{e}_k, \hat{e}_l, \hat{e}_j) y_i x_k x_l \\ \Rightarrow 0 &= \hat{y}'' + \hat{\mathcal{R}}_{\hat{\gamma}}(\hat{Y}, \hat{\gamma}') \hat{\gamma}' = 0 \end{aligned}$$

Somit ist  $\hat{Y}$  ein Jacobifeld entlang  $\hat{\gamma}$ . Da die Parallelverschiebungen und  $\phi$  Isometrien sind, gilt

$$g(Y(t), Y(t)) = \hat{g}(\hat{Y}(t), \hat{Y}(t))$$

2.  $f$  ist eine lokale Isometrie

Zu zeigen ist, dass für alle  $y \in U(x)$  und  $v \in T_y M$  gilt

$$\hat{g}_{f(y)}(df_y(v), df_y(v)) = g_y(v, v).$$

Sei  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  das Jacobifeld entlang  $\gamma$  mit  $Y(0) = 0$ ,  $Y(l) = v$  und  $\hat{Y}(t) = \phi_t(Y(t))$ . Da

$$g(Y(t), Y(t)) \stackrel{1}{=} \hat{g}(\hat{Y}(t), \hat{Y}(t))$$

gilt es zu zeigen dass

$$\hat{Y}(l) = df_y(Y(l)).$$

Nach Satz 3.75 gilt für das Jacobifeld  $\hat{Y}$ :

$$\hat{Y}(l) = (d \exp_{\hat{x}})_{l \cdot \hat{\gamma}'(0)}(l \cdot \hat{\gamma}'(0)).$$

Nach Def. von  $\hat{y}$  ist  $\hat{Y}(0) = \phi(Y'(0))$ , da

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \hat{Y}}{dt}(0) &\stackrel{\text{ÜA}}{=} \frac{d}{dt} \left( \hat{\mathcal{P}}_t^{-1}(\hat{Y}(t)) \right) |_{t=0} = \frac{d}{dt} (\phi \circ \underbrace{\mathcal{P}_t^{-1}(Y(t))}_{\in T_x M}) |_{t=0} \\ &= \phi \left( \frac{\nabla Y}{dt}(0) \right) \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \hat{Y}(l) &= (d \exp_{\hat{x}})_{l \cdot \hat{\gamma}'(0)} \left( \phi \left( (d \exp_x)_{l \cdot \gamma'(0)}^{-1} \circ \underbrace{(d \exp_x)_{l \cdot \gamma'(0)}}_{Y(l)} (l \cdot Y'(0)) \right) \right) \\ &= df_y(Y(l)) \end{aligned}$$

und  $f$  ist eine lokale Isometrie.

□

**Folgerung.** Sind  $(M^n, g)$  und  $(\hat{M}^n, \hat{g})$  zwei semi-Riem. MF gleicher Signatur und gleicher, *konstanter* Schnittkrümmung  $K \in \mathbb{R}$ , so sind sie lokal isometrisch.

*Beweis.* Wir fix. ein  $x \in M$  und  $\hat{x} \in \hat{M}$  beliebig. Da

$$\text{sign}(g_x) = \text{sign}(\hat{g}_{\hat{x}})$$

existiert eine lineare Isometrie

$$\begin{aligned} \varphi : T_x M &\longrightarrow T_{\hat{x}} \hat{M}. \\ \text{ONB} &\longmapsto \text{ONB} \end{aligned}$$

Sei nun  $U$  eine Normalenumgebung von  $x$  und  $y \in U$  fixiert. Nach Satz 3.38 haben die Krümmungstensoren die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(v, w, u, \tau) &= K(g_y(v, \tau) \cdot g_y(w, u) - g_y(v, u) \cdot g_y(w, \tau)) \\ &\stackrel{\|-\text{Verschieb.}}{=} K(\hat{g}(\hat{v}, \hat{\tau}) \cdot \hat{g}(\hat{w}, \hat{u}) - \hat{g}(\hat{v}, \hat{u}) \cdot \hat{g}(\hat{w}, \hat{\tau})) \\ &= \hat{\mathcal{R}}_{f(y)}(\underbrace{\phi_y(v)}_{\hat{v}}, \underbrace{\phi_y(w)}_{\hat{w}}, \underbrace{\phi_y(u)}_{\hat{u}}, \underbrace{\phi_t(\tau)}_{\hat{\tau}}) \end{aligned}$$

Aus dem vorherigen Satz folgt dann die Behauptung. □

Für eine weitere Anwendung des Satzes von Cartan beschäftigen wir uns mit dem Begriff der lokal symmetrischen Räume.

**Definition.** Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt lokal symmetrisch, wenn der Krümmungstensor  $\mathcal{R}$  parallel ist, das heißt

$$\nabla \mathcal{R} = 0.$$

Hierbei ist  $\nabla$  der LC-Zusammenhang von  $(M, g)$ .

**Bemerkung:**

Es ist äquivalent, ob man in der obigen Definition  $\mathcal{R}$  als den  $(4, 0)$ - oder als den  $(3, 1)$ -Krümmungstensor versteht. Die Definition von  $\nabla \mathcal{R}$  ausgeschrieben bedeutet jeweils:

$$\begin{aligned} (\nabla_X \mathcal{R})(Y, Z, U, V) &= X(\mathcal{R}(Y, Z, U, V)) - \mathcal{R}(\nabla_X Y, Z, U, V) - \dots - \mathcal{R}(Y, Z, U, \nabla_X V), \\ (\nabla_X \mathcal{R})(U, V)Z &= \nabla_X(\mathcal{R}(U, V)Z) - \mathcal{R}(\nabla_X U, V)Z - \mathcal{R}(U, \nabla_X V)Z - \mathcal{R}(U, V)\nabla_X Z. \end{aligned}$$

Und man gelangt von der zweiten Zeile zur ersten, indem man auf beiden Seiten der Gleichung  $g(\bullet, Y)$  anwendet und benutzt, dass der LC-Zsh. metrisch ist.

Um Folgenden sei nun  $x \in M$  und  $U(x)$  eine Normalenumgebung, die spiegelsymmetrisch ist. Das heißt:

$$\exp_x(v) \in U(x) \Leftrightarrow \exp_x(-v) \in U(x).$$

Auf einer solchen Umgebung  $U(x)$  können wir die folgende Abbildung betrachten:

$$\begin{aligned} s_x : U(x) &\rightarrow U(x) \\ \exp_x(v) &\mapsto \exp_x(-v). \end{aligned}$$

Diese Abbildung  $s_x$  heißt Geodätische Spiegelung.

Wir können nun zwei weitere äquivalente Charakterisierungen von lokal symmetrischen Räumen angeben:

**Satz 4.8.** *Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

- (1)  $\nabla \mathcal{R} = 0$  (d.h.  $(M, g)$  ist lokal symmetrisch),
- (2) Ist  $\gamma$  eine beliebige  $C^\infty$ -Kurve in  $M$ , dann gilt für parallelverschobene Vektorfelder  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ , dass auch das Vektorfeld

$$\mathcal{R}(X, Y)Z \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$$

entlang  $\gamma$  parallelverschoben ist,

- (3) Die geodätischen Spiegelungen

$$\begin{aligned} s_x : U(x) &\rightarrow U(x) \\ \exp_x(v) &\mapsto \exp_x(-v). \end{aligned}$$

sind Isometrien.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Seien also  $\gamma, X, Y, Z$  wie in der Voraussetzung von (2). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}(\mathcal{R}(X, Y)Z)(t) &= \underbrace{(\nabla_{\gamma'(t)} \mathcal{R})(X(t), Y(t))Z(t)}_{=0 \text{ nach (1)}} \\ &+ \mathcal{R}\left(\underbrace{\frac{\nabla X}{dt}(t)}_{=0 \text{ weil parallel}}, Y(t), Z(t)\right) + \mathcal{R}\left(X(t), \underbrace{\frac{\nabla Y}{dt}(t)}_{=0 \text{ weil parallel}}, Z(t)\right) \\ &+ \mathcal{R}\left(X(t), Y(t), \underbrace{\frac{\nabla Z}{dt}(t)}_{=0 \text{ weil parallel}}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{R}(X, Y)Z$  auch parallel.

(2)  $\Rightarrow$  (3):  $s_x : U(x) \rightarrow U(x)$  ist für die Abbildung  $L = -id_{T_x M} : T_x M \rightarrow T_x M$

$$s_x = \exp_x \circ L \circ \exp_x^{-1}.$$

$s_x$  ist ein Diffeomorphismus, weil  $U(x)$  eine Normalenumgebung ist. Bleibt also zu zeigen, dass  $s_x$  auch eine lokale Isometrie ist. Dazu überprüfen wir das Cartan-Kriterium. Sei

$y \in U(x)$  beliebig und  $\gamma_v : [0, l] \rightarrow M$  die radiale Geodäte von  $x$  nach  $y$ . Das heißt  $\gamma_v(1) = y$  und  $\gamma_v(t) = \exp_x(vt)$ .

Damit erhalten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} L_\gamma : T_y M &\rightarrow T_{\exp_x(-v)} M \\ L_\gamma &:= -\mathcal{P}_{\gamma|_{[-1,0]}}^{-1} \circ \mathcal{P}_{\gamma|_{[0,1]}}^{-1} = -\mathcal{P}_{\gamma|_{[-1,1]}}^{-1}. \end{aligned}$$

Und es bleibt nun noch die Cartanbedingung zu prüfen. Also es genügt zu zeigen, dass

$$L_\gamma(\mathcal{R}_y(u, v)w) = \mathcal{R}_x(L_\gamma(u), L_\gamma(v))L_\gamma(w) = (*).$$

Seien dazu  $U(t), V(t), W(t)$  die Parallelverschiebungen von  $u, v, w \in T_y M = T_{\gamma(1)} M$  entlang  $\gamma$ . Nach Voraussetzung (2) gilt dann, dass auch  $\mathcal{R}(U, V)W$  parallel ist. Also gilt nach Definition der Parallelverschiebung gerade:

$$(*) = L_\gamma(\mathcal{R}_y(u, v)w).$$

Das heißt, die Cartanbedingung ist erfüllt. Nach Satz 4.7 ist damit  $s_x$  eine Isometrie.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Wir zeigen nun  $\nabla \mathcal{R}_x = 0$ . Seien dazu  $u, v, w, t, s \in T_x M$  beliebig und  $U, V, W, T, S$  Vektorfelder auf  $U(x)$  mit  $U(x) = u, \dots, S(x) = s$ . Wir betrachten nun die Richtungsableitung in Richtung  $ds_x(V)$ . Um die Definition des Differential anwenden zu können, sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma'(0) = v = V(x)$ . Dann gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & ds_x(V)(\mathcal{R}(ds_x(U), ds_x(W), ds_x(T), ds_x(S)))(x) \\ &= \frac{d}{dt}(\mathcal{R}(ds_x(U), ds_x(W), ds_x(T), ds_x(S))(s_x(\gamma(t))) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(s_x^* \mathcal{R})(U, W, T, S)(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathcal{R})(U, W, T, S)(\gamma(t)) \Big|_{t=0} && \text{weil } s_x \text{ Isometrie} \\ &= V(\mathcal{R}(U, W, T, S))(x). \end{aligned}$$

Und mit dieser Identität können wir nun die Behauptung zeigen:

$$\begin{aligned}
(-1)^5 \cdot (\nabla_v \mathcal{R})_x(u, w, t, s) &= (\nabla_{ds_x(v)} \mathcal{R})(ds_x(u), ds_x(w), ds_x(t), ds_x(s)) && \text{weil } (ds_x)_x = -id \\
&= ds_x(V)(\mathcal{R}(ds_x(U)), ds_x(W), ds_x(T), ds_x(S))(x) \\
&\quad - \mathcal{R}(\nabla_{ds_x(V)} ds_x(U), ds_x(W), ds_x(T), ds_x(S))(x) \\
&\quad - \dots \\
&\quad - \mathcal{R}(ds_x(U), ds_x(W), ds_x(T), \nabla_{ds_x(V)} ds_x(S))(x) \\
&= V(\mathcal{R}(U, W, T, S))(x) \\
&\quad - (s_x^* \mathcal{R})(\nabla_V U, W, T, S)(x) \\
&\quad - \dots \\
&\quad - (s_x^* \mathcal{R})(U, W, T, \nabla_V S)(x) \\
&= (\nabla_V \mathcal{R})(U, W, T, S)(x) \\
&= (\nabla_v \mathcal{R})(u, w, t, s)
\end{aligned}$$

Also ist  $(\nabla_v \mathcal{R})(u, w, t, s) = 0$  und damit  $\nabla \mathcal{R}_x = 0$  für alle  $x \in M$ .  $\square$

Abschließend erwähnen wir noch, dass eine interessante Verallgemeinerung von Satz 4.7 existiert. Ein analoges Resultat gilt nämlich auch für gebrochene Geodäten (während Satz 4.7 nur für radiale Geodäten formuliert wurde). Daraus erhält man dann auch eine Aussage über globale Isometrien. Die genaue Formulierung des Satzes und den Beweis findet man zum Beispiel in *H. Baum: Eichfeldtheorie, 2. Auflage, Anhang A9*.

## Der Starrheitssatz für Isometrien

**Satz 4.9. Starrheitssatz.** Seien  $f_1, f_2 : (M, g) \longrightarrow (\hat{M}, \hat{g})$  zwei lokale Isometrien zwischen zusammenhängenden semi-Riem. MF. Ist  $x \in M$  ein Punkt und

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f_2(x) \\
(df_1)_x &= (df_2)_x
\end{aligned}$$

so gilt

$$f_1 \equiv f_2$$

D.h. lokale Isometrien sind durch einen Punkt und dem Differential an diesem Punkt eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Sei

$$A = \left\{ y \in M \mid f_1(y) = f_2(y) \text{ und } (df_1)_y = (df_2)_y \right\}$$

Dann ist  $A \neq \emptyset$ , da  $x \in M$  und wegen der Stetigkeit der  $f_i$  ist  $A$  abgeschlossen. Insbesondere ist  $A$  auch offen: Sei  $y_0 \in A$  und  $U(y_0)$  eine Normalenumgebung von  $y_0$ . Für ein

$z \in U(y_0)$  existiert eine radiale Geodäte  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow U(y_0)$  mit  $\gamma_v(0) = v$ ,  $\gamma_v(1) = z$ ,  $\gamma'_v(0) = v$  und  $z = \exp_{y_0}(v)$ . Da die  $f_i$  lokale Isometrien sind, sind auch

$$\gamma_i(t) := f_i(\gamma_v(t))$$

Geodäten mit  $\gamma_i(0) = f_i(y_0)$  und  $\gamma'_i(0) = (df_i)_{y_0}(v)$ . Da aber  $y_0 \in A$ , stimmen die AWP überein, sodass

$$\gamma_1 \equiv \gamma_2 \Rightarrow (f_1 \equiv f_2 \text{ auf } U(y_0))$$

und insbesondere

$$(df_1)_z \equiv (df_2)_z \quad \forall z \in U(y_0).$$

Damit ist aber  $U(y_0) \subset A$ , und  $A$  offen. Da  $M$  zsh. ist, folgt also  $A = M$ .  $\square$

### 4.3 Die Sätze von Hadamard, Bonnet-Myers und Räume konstanter Krümmung

#### Die Klassifikation der Riemannschen Raumformen

**Definition.** Eine vollständige Riemannsche MF mit konstanter Schnittkrümmung nennt man Riemannsche Raumform.

Der folgende Satz liefert später eine vollständige Klassifikation der Riemannschen Raumformen.

**Satz 4.10. Satz von Hadamard-Cartan** Sei  $(M^n, g)$  eine vollständige zsh. Riemannsche MF. mit nicht positiver Schnittkrümmung  $K_E \leq 0$  für alle  $x \in M$  und  $E^2 \subset T_x M$ , dann ist

$$\exp_x : T_x M \cong \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

eine glatte Überlagerung. Da  $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 1$ , ist  $(\mathbb{R}^n, M, \exp_x)$  universell, und damit

$$M \cong \mathbb{R}^n / \Gamma$$

wobei  $\Gamma$  Gruppe der Decktransformationen  $\text{Deck}(\pi)$  ist. <sup>5</sup>.

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Geodäte und die Schnittkrümmung entlang  $\gamma$  nicht positiv. Dann liegen auf  $\gamma$  keine zu  $x = \gamma(0)$  konjugierten Punkte.

Sei  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  ein Jacobifeld entlang  $\gamma$  und  $Y(0) = 0$ . Wir betrachten die Funktion

$$h(t) = g(Y(t), Y(t)) \geq 0,$$

---

<sup>5</sup>siehe Fakt 4 auf Seite 264

dann ist

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2g(Y'(t), Y(t)) \\ h''(t) &= 2\{g(Y''(t), Y(t)) + g(Y'(t), Y'(t))\} \quad (*) \\ &= -2\underbrace{\mathcal{R}(Y, \gamma', \gamma', Y)}_{K \leq 0} + \|Y'(t)\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Aus  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$  und  $h''(0) > 0$  (da  $Y'(0) \neq 0$ ) erkennt man, dass  $h$  in  $t = 0$  ein lokales Minimum hat.
- Da  $h''(t) > 0$  für alle  $|t| < \epsilon$  ist  $h$  *strikt konvex* auf  $(0, \epsilon)$  und da  $h''(t) \geq 0$  für alle  $t$ , ist  $h$  *konvex* für alle  $t$ .

Demnach ist

$$h(t) > 0 \quad \forall t \neq 0$$

und deswegen auch  $Y(t) \neq 0$  für alle  $t \neq 0$ , sodass auf  $\gamma$  kein zu  $\gamma(0)$  konjugierter Punkt existiert. Also ist  $(d\exp_x)_{tv}$  nicht ausgeartet für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $v \in T_x M$  und demzufolge

$$\exp_x : T_x M \longrightarrow M$$

eine lokaler Diffeomorphismus um *jeden* Punkt  $v \in T_x M$ . Und da  $(M, g)$  vollständig ist, ist  $\exp_x$  außerdem *surjektiv*.

2. Wir betrachten die Metrik  $\tilde{g} := \exp_x^* g$  auf  $T_x M$ . Dann ist

$$\exp_x : (\mathbb{R}^n, \tilde{g}) \longrightarrow (M, g)$$

eine surjektive und lokale Isometrie. Deshalb sind die Geraden

$$\begin{aligned} \sigma_v : \mathbb{R} &\longrightarrow T_x M \cong \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto t \cdot v \end{aligned}$$

die Geodäten durch  $0_x$ . Diese sind auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, sodass  $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$  nach Satz von Hopf-Rinow vollständig ist. Satz 4.6 liefert nun dass

$$\exp_x : T_x M \cong \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

eine Riemannsche Überlagerung ist.

□

**Folgerung.** Ist  $M$  darüber hinaus noch einfach-zsh, so gilt

$$M^n \cong \mathbb{R}^n$$

Insbesondere existiert dann zu 2 Punkten  $x$  und  $y$  aus  $M$  *genau eine* Geodäte, die beide miteinander verbindet.

**Satz 4.11.** Sei  $M^n$  eine vollständige zsh. Riemannsche MF mit konstanter Schnittkrümmung  $K$ . Dann ist die universelle Riemannsche Überlagerung  $\widetilde{M}$  von  $M$  isometrisch zu

- $\mathbb{H}^n$ , falls  $K \equiv -1$
- $\mathbb{R}^n$ , falls  $K \equiv 0$
- $S^n$ , falls  $K \equiv 1$

*Beweis.* Sei  $(\widetilde{M}, M, \pi)$  die universelle Überlagerung und  $\tilde{g} := \pi^*g$ . Da  $(M, g)$  vollständig ist, ist auch nach Satz 4.6 auch  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$  vollständig. Somit ist  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$  eine einfach-zusammenhängende RMF konstanter Schnittkrümmung  $K \in \{-1, 0, 1\}$

1. Sei  $K \leq 0$ . Wir bezeichnen

$$N := \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{falls } K = 0 \\ \mathbb{H}^n & \text{falls } K = -1 \end{cases}$$

Dann fixieren wir ein  $x \in N$  und  $\tilde{x} \in \widetilde{M}$  und eine lineare Isometrie

$$\varphi : T_x N \longrightarrow T_{\tilde{x}} \widetilde{M}.$$

Nach dem Satz von Hadamard (Satz 4.10) sind die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned} \exp_x : T_x N &\longrightarrow N \\ \widetilde{\exp}_{\tilde{x}} : T_{\tilde{x}} \widetilde{M} &\longrightarrow \widetilde{M} \end{aligned}$$

Diffeomorphismen. Wir betrachten die Abbildung

$$f := \widetilde{\exp}_{\tilde{x}} \circ \varphi \circ \exp_x^{-1} : N \longrightarrow \widetilde{M}.$$

Diese ist ein Diffeomorphismus und nach der Folgerung von Satz 4.7 eine Isometrie, da die Krümmungen übereinstimmen.

2. Sei  $K = 1$ . Wir fixieren eine lineare Isometrie

$$\varphi : T_x S^n \longrightarrow T_{\tilde{x}} \widetilde{M}.$$

$S^n \setminus \{-x\}$  ist eine Normalenumgebung von  $x$  und damit

$$\exp_x^{-1} : S^n \setminus \{-x\} \longrightarrow \{v \in T_x S^n \mid \|v\| < \pi\}$$

ein Diffeomorphismus. Nach Satz 4.7 ist dann

$$f := \widetilde{\exp}_{\tilde{x}} \circ \varphi \circ \exp_x^{-1} : S^n \setminus \{-x\} \longrightarrow \widetilde{M}$$

eine lokale Isometrie. Diese wollen wir in den Punkt  $-x$  fortsetzen: Dazu fix. wir ein  $y \in S^n \setminus \{-x, x\}$  und betrachten den Punkt

$$\tilde{y} = f(y) \in \widetilde{M}$$

---

<sup>6</sup>Siehe Beispiele 1,2 und 3 auf den Seiten 178ff.

und die lineare Isometrie

$$\hat{\varphi} := df_y : T_y S^n \longrightarrow T_{\tilde{y}} \tilde{M},$$

die von  $f$  induziert wird. Dann ist nach Satz 4.7 die Abbildung

$$\hat{f} := \widetilde{\exp}_{\tilde{y}} \circ \hat{\varphi} \circ \exp_y^{-1} : S^n \setminus \{-y\} \longrightarrow \tilde{M}$$

eine lokale Isometrie und für die zsh. Menge  $W := S^n \setminus \{x, -y\}$  gilt  $y \in W$ ,

$$\hat{f}(y) = \widetilde{\exp}_{\tilde{y}} \circ \hat{\varphi} \circ \exp_y^{-1}(y) = \tilde{y}$$

und

$$\begin{aligned} df_y &= (d\widetilde{\exp}_{\tilde{y}})_{\tilde{y}} \circ \hat{\varphi} \circ \underbrace{(d\exp_y^{-1})_y}_{(d\exp_y)_y^{-1}} \\ &= \text{id}_{T_{\tilde{y}} \tilde{M}} \circ \hat{\varphi} \circ \text{id}_{T_y S^n} \\ &= \hat{\varphi} = df_y. \end{aligned}$$

Nach dem Starrheitssatz für Isometrien (Satz 4.9) folgt daraus  $f \equiv \hat{f}$  und  $\hat{f}$  setzt  $f$  im Punkt  $-x$  fort. Es existiert damit eine lokale Isometrie

$$F : S^n \longrightarrow \tilde{M}.$$

Nun ist  $S^n$  vollständig und nach Satz 4.7 ist  $F$  eine Riemannsche Überlagerung. Da sowohl  $S^n$  als auch  $\tilde{M}$  einfach-zsh. sind, folgt aus der Überlagerungstheorie, dass  $F$  ein Diffeomorphismus und damit eine Isometrie ist. □

**Folgerung. Klassifikation der Riemannschen Raumformen**

Sei  $M^n$  eine Riemannsche Raumform mit Schnittkrümmung  $K \in \{0, 1, -1\}$ , dann ist  $M$  isometrisch zu  $\tilde{M}/\Gamma$ . Dabei ist  $\tilde{M}$  die *einfach zusammenhängende* Mannigfaltigkeit

$$\tilde{M} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{falls } K = 0 \\ \mathbb{H}^n & \text{falls } K = -1 \\ S^n & \text{falls } K = 1 \end{cases}$$

und  $\Gamma$  eine Untergruppe der Isometriegruppe von  $\tilde{M}$  ist, die eigentlich diskontinuierlich auf  $\tilde{M}$  wirkt. Insbesondere ist

$$\pi : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{M}/\Gamma \cong M$$

die universelle isometrische Überlagerung von  $M$ .

*Beweis.* Sei  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$  die universelle Überlagerung mit  $\tilde{g} = \pi^*g$ . Nach Satz 4.11 hat  $\widetilde{M}$  je nach Krümmung die Gestalt  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$  oder  $S^n$ . Sei  $\Gamma$  die Gruppe der Decktransformationen  $Deck(\pi)$ . Mit Fakt 4 auf Seite 264, genügt es zu zeigen, dass

$$\Gamma \subset Iso(\widetilde{M}).$$

Für ein  $\gamma \in \Gamma$  gilt aber

$$\gamma^*\tilde{g} = \gamma^*\pi^*g = (\pi \circ \gamma)^*g = \tilde{g}.$$

□

### Der Satz von Bonnet-Myers

**Satz 4.12. Satz von Bonnet-Myers.** Sei  $(M^n, g)$  eine vollständige RMF, deren Ricci-Krümmung von unten durch

$$Ric \geq \frac{n-1}{c^2} \cdot g \quad c = const > 0$$

beschränkt ist. Dann gilt für den Durchmesser

$$diam(M, g) := \sup_{x, y \in M} d(x, y) \leq \pi \cdot c = diam(S_c^n)$$

wobei  $S_c^n$  die Sphäre vom Radius  $c$  ist. Insbesondere ist  $M$  kompakt und hat eine endliche Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$ .

*Beweis.* Seien  $x, y \in M$ . Da  $(M, g)$  vollständig ist, existiert eine minimierende Geodäte

$$\gamma : [0, l] \longrightarrow M$$

mit  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(l) = y$  und  $l = l(\gamma)$ . Diese ist insbesondere auf BL parametrisiert.

1. Es gilt  $d(x, y) = l(\gamma) < \pi \cdot c$  und damit  $diam(M, g) \leq \pi \cdot c$

Sei  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  ein VF entlang  $\gamma$  mit  $Y(0) = Y(l) = 0$  und  $Y \perp \gamma'$ . Dann gilt für die Indexform

$$I_\gamma(Y, Y) := - \int_0^l \langle Y, Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma') \gamma' \rangle dt$$

nach Satz 3.82: Sei

$$V(t, s) := \exp_{\gamma(t)}(s \cdot Y(t))$$

und

$$L(s) := l(V(\cdot, s)).$$

Dann ist  $Y$  das Variations-VF von  $V$  und es gilt

$$\begin{aligned} L'(0) &= 0 \\ L''(0) &= I_\gamma(Y, Y) \geq 0, \end{aligned}$$

da  $l(\gamma) = d(x, y)$  ein globales Minimum von  $L$  ist. Wir setzen nun spezielle Vektorfelder in die Indexform ein: Sei  $(e_1 = \gamma'(0), e_2, \dots, e_n)$  eine ONB in  $T_x M$  und  $(X_1, \dots, X_n)$  die daraus entstehenden parallelen VF entlang  $\gamma$ . Wir betrachten  $Y_i \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$

$$Y_i(t) := \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \cdot X_i(t) \quad 2 \leq i \leq n.$$

dann ist

$$Y_i(0) = 0 = Y_i(l) \quad \text{und} \quad Y_i \perp \gamma' \Rightarrow I_\gamma(Y_i, Y_i) \geq 0.$$

Die Berechnung der Indexform liefert:

$$\begin{aligned} Y_i' &= \frac{\pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \cdot X_i(t) + \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \cdot X_i'(t) \\ &= \frac{\pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \cdot X_i(t) \quad \text{da } X_i \parallel \\ Y_i'' &= -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \cdot X_i(t) \end{aligned}$$

Damit ist

$$Y_i'' = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot Y_i$$

Für die Indexform folgt

$$I_\gamma(Y_i, Y_i) = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \left\{ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \mathcal{R}(X_i, \gamma', \gamma') X_i \right\} dt$$

Da  $(\gamma', X_2, \dots, X_n)$  eine ONB entlang  $\gamma$  ist, folgt durch Summation

$$0 \leq \sum_{i=2}^n I_\gamma(Y_i, Y_i) = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right) \left\{ (n-1) \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - Ric(\gamma', \gamma') \right\} dt$$

Nach Vor. ist aber

$$Ric(\gamma', \gamma') \geq \frac{n-1}{c^2} \cdot \underbrace{g(\gamma', \gamma')}_{\equiv 1} = \frac{n-1}{c^2}$$

und damit folgt

$$0 \leq \sum_{i=2}^n I_\gamma(Y_i, Y_i) = \int_0^l \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi \cdot t}{l}\right)}_{\geq 0} \left\{ (n-1) \left[ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - c^{-2} \right] \right\} dt$$

und somit

$$\frac{\pi}{l} > \frac{1}{c} \quad \text{bzw.} \quad l < \pi \cdot c$$

2.  $M$  ist kompakt. Dies folgt unmittelbar aus der Beschränktheit und dem Satz von Hopf-Rinow.
3.  $\pi_1(M)$  ist endlich.

Sei  $(\widetilde{M}, M, \pi)$  die universelle Riemannsche Überlagerung von  $(M, g)$ . Da  $\pi$  eine lokale Isometrie ist, stimmt die Schnittkrümmung von  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  mit der von  $(M, g)$  überein. Nach 1. ist also auch  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  kompakt. Damit ist aber auch die Anzahl der Blätter  $\#(\pi^{-1}(x))$  endlich und aus

$$\pi^{-1}(x) \cong \pi_1(M, x)$$

folgt dann die Endlichkeit von  $\pi_1(M)$ . □

**Folgerung.** Sei  $(M^n, g)$  eine vollständige RMF mit *strikt* positiver Schnittkrümmung

$$K \geq \frac{1}{c^2} > 0,$$

dann ist  $M^n$  kompakt,  $\text{diam}(M, g) \leq \pi \cdot c$  und  $\pi_1(M)$  endlich. (Für  $K \geq 0$  gilt dies nicht mehr.)

### Der Satz von Weinstein

Aus dem Satz von Weinstein folgt eine Aussage für Riemannsche-Mannigfaltigkeiten  $M^n$  mit *positiver* Schnittkrümmung  $K > 0$ : Ist  $M$  orientierbar und  $n$  gerade, so ist  $M$  einfach-zusammenhängend. Ist  $n$  ungerade, so ist  $M$  orientierbar.

Doch zunächst ein algebraisches Lemma.

**Lemma 4.13.** *Sei*

$$A : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

*eine orthogonale Abbildung und  $\det A = (-1)^n$ . Dann hat  $A$  einen EW  $\lambda = 1$ , d.h. einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Sei  $n$  gerade.

$\chi(A) = \det(A - \lambda E)$  hat den Grad  $n - 1 =$  ungerade, sodass eine reelle NS  $\lambda$  auftritt. Da  $A \in O(n - 1)$  ist  $\lambda = \pm 1$ .

Alle komplexen EW treten Paarweise auf

$$(\mu_1, \dots, \mu_r), (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_r), \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_m}_{\text{reelle EW}}$$

Und es folgt

$$\det(A) = (-1)^n = 1 = \left( \prod_{j=1}^r |\mu_j|^2 \right) \cdot \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m}_{\text{unger. Anz.}}$$

Damit muss ein EW  $\lambda = 1$  existieren.

2. Sei  $n$  ungerade.

Dann ist

$$\det A = -1 = \left( \prod_{j=1}^r |\mu_j|^2 \right) \cdot \underbrace{\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m}_{\text{ger. Anz.}}$$

Ein reeller EW muss, aber alle können nicht negativ sein. Somit existiert ein EW  $\lambda = 1$ .

□

**Satz 4.14. Satz von Weinstein ('68).** Sei  $M^n$  eine komp. orientierte MF mit  $K > 0$ . Sei

$$f : M \longrightarrow M$$

eine Isometrie, die die Orientierung erhält, falls  $n$  gerade ist, und die Orientierung umkehrt, falls  $n$  ungerade ist, dann hat  $f$  einen Fixpunkt.

*Beweis.* Angenommen  $f(p) \neq p$  für alle  $p \in M$ . Da  $M$  kompakt ist, ex. ein  $p \in M$ , sodass

$$0 < d(p, f(p)) = \min_{p' \in M} d(p', f(p')) .$$

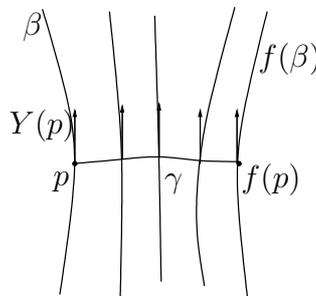
Dies führen wir zum Widerspruch. Sei

$$\gamma : [0, l] \longrightarrow M$$

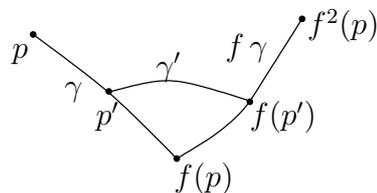
eine minimierende Geodäte von  $p$  nach  $f(p)$ . Da  $d(p, f(p)) > 0$  ist  $l > 0$ .

1.  $\exists Y(p) \in T_x M$  mit  $\|Y(p)\| = 1$  und  $y \perp \gamma'(0)$ , sodass gilt: Wenn  $\beta$  eine Geodäte ist mit  $\beta(0) = p$  und  $\beta'(0) = Y(p)$  ist, dann ist  $f(\beta)$  eine Geodäte mit

$$f(\beta(0)) = f(p) \quad \text{und} \quad (f \circ \beta)'(0) = \mathcal{P}_\gamma(Y(0))$$



Sei  $\gamma$  eine Geodäte. Da  $f$  eine Isomorphie ist, wird somit auch  $f(\gamma)$  zu einer Geodäte. *Behauptung:* In  $f(p)$  ex. kein Knick.



Sei  $p' \in \text{Im } \gamma$  und  $\gamma'$  die minimierende Geodäte von  $p'$  nach  $f(p')$ . Durch die  $\Delta$ -Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} d(p', f(p')) &\leq d(p', f(p)) + \underbrace{d(f(p), f(p'))}_{=d(p,p')} \\ &= d(p, f(p)) \end{aligned}$$

Da  $p$  der Punkt mit dem minimalen Abstand war, folgt

$$d(p', f(p')) \stackrel{!}{=} d(p', f(p)) + d(f(p), p')$$

Die Gebrochen Geodäte

$$p' \xrightarrow{\gamma} f(p) \xrightarrow{f \circ \gamma} f(p')$$

ist also minimal, und damit glatt, d.h.

$$f(\gamma)'(0) = \gamma'(l). \quad (*)$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$A := \mathcal{P}_\gamma^{-1} \circ df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} M \longrightarrow T_p M.$$

$A$  ist eine lineare Isometrie, und  $\gamma'(0)$  ist ein Fixpunkt von  $A$ :

$$\begin{aligned} A(\gamma'(0)) &= \mathcal{P}_\gamma^{-1}(df_p(\gamma'(0))) = \mathcal{P}_\gamma^{-1}((f \circ \gamma)'(0)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \mathcal{P}_\gamma^{-1}(\gamma'(l)) = \gamma'(0) \end{aligned}$$

Sei

$$B := A|_{\gamma'(0)^\perp} : \gamma'(0)^\perp \longrightarrow \gamma'(0)^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dann erfüllt  $B$  die Eigenschaften des vorangegangenen Lemmas, und es existiert damit ein Fixpunkt  $v \in T_p M$  von  $A$  mit

$$v \perp \gamma'(0) \quad \text{und} \quad \|v\| = 1.$$

Sei weiterhin  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  die Parallelverschiebung von  $v$  entlang  $\gamma$

$$Y(t) = \mathcal{P}_\gamma(v),$$

dann ist  $Y(t) \perp \gamma'(0)$ . Sei  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow M$  die Geodäte mit  $\beta'(0) = v$ , dann ist

$$f \circ \beta : \mathbb{R} \rightarrow M$$

eine Geodäte mit  $(f \circ \beta)'(0) = f(p)$  und

$$\begin{aligned} (f \circ \beta)'(0) &= df_p(\beta'(0)) = df_p(v) \\ &= \mathcal{P}_\gamma(\mathcal{P}_\gamma^{-1}(df_p(v))) \\ &= \mathcal{P}_\gamma(A(v)) \\ &= \mathcal{P}_\gamma(v) = Y(l) \end{aligned}$$

2. Wir betrachten nun die Variation

$$\begin{aligned} V : [0, l] \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (t, s) &\mapsto \exp_{\gamma(t)}(s \cdot Y(t)) \end{aligned}$$

mit den Geodäten  $\beta$  und  $f(\beta)$  als Ränder, um einen Widerspruch zu finden.

Die Randkurven sind die Geodäten

$$\begin{aligned} V(0, s) &= \exp_p(s \cdot Y(0)) = \beta(s) \\ V(l, s) &= \exp_{f(p)}(s \cdot Y(l)) = f(\beta(s)) \end{aligned}$$

Das Variations-VF von  $V$  ist  $Y$ . Sei  $L(s) = l(V(\cdot, s))$ . Nach Satz 3.82 gilt für die Variation der BL

$$\begin{aligned} L'(0) &= 0 \\ L''(0) &= I_\gamma(Y, Y) \\ &= - \int_0^l \langle Y, Y'' + \mathcal{R}(Y, \gamma') \gamma' \rangle dt \end{aligned}$$

Da die Randkurven jedoch Geodäten sind, gilt darüber hinaus

$$0 = \left\langle \frac{\nabla}{ds} \left( \frac{\partial V}{\partial s}(l, 0) \right), \gamma'(l) \right\rangle - \left\langle \frac{\nabla}{ds} \left( \frac{\partial V}{\partial s}(0, 0) \right), \gamma'(0) \right\rangle.$$

Da  $Y$  entlang  $\gamma$  parallel verschoben ist, haben wir auch

$$0 = \langle Y(l), Y'(l) \rangle - \langle Y(0), Y'(0) \rangle$$

sodass sich  $L''(0)$  vereinfacht:

$$L''(0) = - \int_0^l \underbrace{\mathcal{R}(Y, \gamma', \gamma', Y)}_{0 < K_{\langle y, \gamma' \rangle}} dt$$

Damit ist  $L''(0) < 0$  und  $L$  besitzt in  $t = 0$  ein strikt lokales Maximum, dh. es ex. ein  $s \in (-\epsilon, \epsilon)$  sodass

$$l(\underbrace{V(\cdot, s)}_{=c}) < l(\gamma)$$

Damit ist aber

$$d(\beta(s), f(\beta(s))) < l(c) < l(\gamma) = d(p, f(p))$$

was im Widerspruch zur Minimalität von  $d(p, f(p))$  steht. □

**Satz 4.15.** *Sei  $M^n$  eine kompakte RMF mit  $K > 0$ . Dann gilt*

1. *Ist  $M$  orientierbar und  $n$  gerade, so ist  $M$  einfach-zsh.!*
2. *Ist  $n$  ungerade, so ist  $M$  orientierbar.*

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Sei  $M$  orientierbar und  $n$  gerade. Wir betrachten die universelle Überlagerung  $(\widetilde{M}, M, \pi)$  und setzen  $\tilde{g} := \pi^*g$ . Dann wählen wir uns auf  $\widetilde{M}$  eine Orientierung, für die  $\pi$  orientierungserhaltend ist. Die Kompaktheit von  $M$  impliziert nach Satz 4.7 die Vollständigkeit von  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ , und darüber hinaus liefert sie, da  $K > 0$ , die Existenz eines  $c \in \mathbb{R}^+$ , für das  $K_M \geq c > 0$ . Und da  $\pi$  eine lokale Isometrie ist folgt auch

$$K_{\widetilde{M}} \geq c > 0.$$

Nach Satz von Bonnet-Myers (Satz 4.12) ist dann  $\widetilde{M}$  kompakt. Sei  $\Gamma$  die Gruppe der Decktransformationen  $Deck(\pi)$  von  $\pi$  und  $k \in \Gamma$ . Nach Folgerung von Satz 4.11 ist  $k$  eine Isometrie und erhält die Orientierung (da  $\pi$  die Orientierung erhält und  $\pi \circ k = \pi$ ). Nach Satz von Weinstein (Satz 4.14) hat  $k$  einen Fixpunkt  $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$  mit  $x_0 \in M$ . Wir betrachten den Gruppenisomorphismus<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \pi_1(M, x_0) &\longrightarrow \Gamma \\ [\sigma] &\longmapsto f_{[\sigma]} \end{aligned}$$

und identifizieren  $k = k_{[\omega]}$  mit  $[\omega] \in \pi_1(M, x_0)$ . Dann ist

$$k(\tilde{x}_0) = \tilde{\omega}(1) = \tilde{x}_0 \quad \text{und damit} \quad [\tilde{\omega}] \in \pi_1(\widetilde{M}, \tilde{x}_0) = 1,$$

---

<sup>7</sup>siehe Fakt 4 auf Seite 264

sodass demzufolge

$$[\omega] = [\pi_* \tilde{\omega}] = \pi_* [\tilde{\omega}] = \pi_* [1] = 1$$

und  $k = Id$ . Als Decktransformationsgruppe ergibt sich also

$$\Gamma = \{Id\}$$

und damit ist

$$M = \widetilde{M}/\Gamma = \widetilde{M}.$$

Insbesondere ist  $M$  einfach-zusammenhängend.

2. Sei  $n$  ungerade. Angenommen  $M$  sei *nicht* orientierbar. Wir betrachten

$$\overline{M} := \left\{ (x, \underbrace{\mathcal{O}_{T_x M}}_{\mathcal{O}_x}) \mid x \in M, \mathcal{O}_x \text{ ist eine Orientierung von } T_x M \right\}.$$

Mit den Karten  $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ :

$$\overline{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n) := \left( \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n), \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x) \right] \right)$$

$$\overline{U} := \overline{\varphi}^{-1}(\varphi(U)) \subset \overline{M}$$

ist  $\overline{M}$  eine MF. Zudem definiert  $\mathcal{O}_{(x, \mathcal{O}_x)} := \mathcal{O}_x$  eine Orientierung für  $\overline{M}$  und die Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{\pi} : \overline{M} &\longrightarrow M \\ (x, \mathcal{O}_x) &\longmapsto x \end{aligned}$$

ist eine 2-fache Überlagerung von  $M$ . Wir setzen  $\overline{g} := \pi^*g$ , dann ist  $(\overline{M}, \overline{g})$  orientierbar und vollständig. Als Decktransformationen von  $\overline{\pi}$  erhalten wir

$$Deck(\overline{\pi}) = \{Id, k \quad (k \text{ vertauscht die Blätter})\}$$

Dann ist  $k$  eine Isometrie, die die Orientierung umkehrt. Nach Satz 4.14 besitzt  $k$  auch einen Fixpunkt. Dies ist jedoch für  $k$  nicht möglich. □

**Bemerkungen:**

1. Die MF  $M = \mathbb{R}P^2$  ist kompakt mit  $K > 0$  (übertragen die Metrik von  $S^2$ ) aber *nicht* einfach-zsh., dh. die Orientierbarkeit ist bei Teil 1 von Satz 4.15 notwendig!
2. Ebenso sieht man, dass für den 2. Teil ein gerades  $n$  notwendig ist, da  $\mathbb{R}P^2$  nicht orientierbar ist.
3. Sei  $M = \mathbb{R}P^3$ . Dieser ist kompakt mit  $K > 0$ , orientierbar, aber nicht einfach-zsh. Im 1. Teil ist also ebenfalls "n gerade" notwendig

## Räume mit punktwiser konstanter Schnittkrümmung

Ist  $(M^n, g)$  eine kompakte *Riemannsche* MF, so ist die Schnittkrümmung beschränkt:

$$a \leq K_E(x) \leq b \quad \forall E^2 \subset T_x M. \quad (*)$$

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass für *pseudo*-RMFen die Bedingung  $(*)$  für alle nicht ausgearteten UR  $E^2 \subset T_x M$  äquivalent ist zu

$$K_{E^2}(x) \equiv k(x) = \text{const.} \quad \forall E^2 \subset T_x M, E^2 \text{ nicht ausgeartet.}$$

Insbesondere ist damit die Schnittkrümmung auf ganz  $M$  konstant. Dazu betrachte man zunächst einen beliebigen zweidimensionalen UR

$$E = \text{span}(w, v) \subset T_x M$$

sowie

$$Q(v, w) := \det \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} \quad \text{Gram'sche Det.}$$

Dann gilt

$$E \text{ nicht ausgeartet} \iff Q(v, w) \neq 0.$$

Sei  $E = \text{span}(v, w) = \text{span}(y, z) \subset T_x M$  beliebig fix. Dann existiert eine  $2 \times 2$  Matrix  $A$ , sodass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\mathcal{R}(z, y, y, z) = \det(A)^2 \mathcal{R}(v, w, w, v). \quad (*)$$

Bezeichne

$$\mathcal{N}(E) := \begin{cases} 0 & \text{für } \mathcal{R}(z, y, y, z) = 0 \\ 1 & \text{für } \mathcal{R}(z, y, y, z) > 0 \\ -1 & \text{für } \mathcal{R}(z, y, y, z) < 0 \end{cases}$$

Mit  $(*)$  ist dies eine Invariante von  $E$  und somit korrekt definiert.

**Lemma 4.16.** *Es gilt:*

1. Ist

$$K_E(x) \equiv k = \text{const.} \quad \forall E^2 \subset T_x M \text{ nicht ausgeartet,}$$

dann ist

$$\mathcal{N}(E^2) \equiv 0 \quad \forall E^2 \subset T_x M \text{ ausgeartet.}$$

2. Ist

$$\mathcal{N}(E^2) \equiv 0 \quad \forall E^2 \subset T_x M \text{ ausgeartet,}$$

und sind  $u, v, w \in T_x M$  ON-Vektoren mit  $g(u, u) = -g(v, v)$ , dann gilt

$$K_{\text{span}(u, w)}(x) = K_{\text{span}(v, w)}(x)$$

*Beweis.* Zu den einzelnen Punkten:

1. Ist  $E = \text{span}(u, v)$ , so gilt nach Satz 3.39

$$\mathcal{R}(u, v, v, u) = k \cdot \underbrace{Q(u, v)}_0 = 0 \Rightarrow \mathcal{N} = 0.$$

2. Die Vektoren  $u \pm v$  sind nach Voraussetzung isotrop und damit die Unterräume

$$E_{\pm} = \text{span}(u \pm v, w)$$

ausgeartet. Aus  $N(E) = 0$  folgt dann

$$\mathcal{R}(u + v, w, w, u + v) = 0 = \mathcal{R}(u - v, w, w, u - v)$$

bzw.

$$\mathcal{R}(u, w, w, v) = 0 \Rightarrow \mathcal{R}(u, w, w, u) + \mathcal{R}(v, w, w, v) = 0.$$

Da  $(u, v, w)$  ON-Vektoren sind folgt aus  $g(u, u) = -g(v, v)$  insbesondere

$$Q(u, w) = -Q(v, w)$$

sodass

$$\underbrace{\frac{\mathcal{R}(u, w, w, u)}{Q(u, w)}}_{K_{\text{span}(u, w)}(x)} = \underbrace{\frac{\mathcal{R}(v, w, w, v)}{Q(v, w)}}_{K_{\text{span}(v, w)}(x)}.$$

□

**Satz 4.17. Satz von Kulkarni.** Sei  $(M^n, g)$  eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche MF und  $x \in M$ . Dann sind folgende Bedingungen äquivalent

1.  $K_E(x) \equiv k_x = \text{konst.}$  für alle  $E^2 \subset T_x M$  nicht ausgeartet.
2.  $\mathcal{N}(E) = 0$  für alle  $E^2 \subset T_x M$  ausgeartet.
3. Für alle  $E^2 \subset T_x M$  nicht ausgeartet gilt

$$a \leq K_E(x) \text{ oder } K_E(x) \leq b.$$

4. Für alle indefiniten UR  $E^2 \subset T_x M$  gilt

$$a \leq K_E(x) \leq b.$$

5. Für alle definiten UR  $E^2 \subset T_x M$  gilt

$$a \leq K_E(x) \leq b.$$

Ist  $n \geq 3$  und gilt in jedem Punkt  $x \in M$  eine der Bedingungen 1.-5., so ist die Schnittkrümmung von  $(M, g)$  konstant.

*Beweis.* Wir können annehmen, dass  $n \geq 3$  ist, denn sonst existiert kein nicht ausgearteter 2-dim. UR und  $E = T_x M$  ist eindeutig bestimmt. Die letzte Aussage folgt dann aus der 2. Bianchi-Identität (ÜA 16).

- Die Eigenschaften 1.)  $\Rightarrow$  3.), 4.), 5.) und 1.)  $\Rightarrow$  2.) folgen aus dem vorherigen Lemma.
- 2.)  $\Rightarrow$  1.)

1. Fall:  $k = \text{Index}(g) = 1$  oder  $n - 1$ .

Seien  $u, v, w$  orthogonal und  $g(u, u) = -1$ . Dann folgt aus Lemma (2.), da  $\mathcal{N} = 0$ ,

$$K_{\text{span}(u,w)}(x) = K_{\text{span}(v,w)}(x),$$

da  $g(v, v) = 1$  für  $u \perp v$  und  $k = 1$ . Ist damit  $E^2 \subset T_x M$  nicht ausgeartet und  $u \in E$  oder  $E \perp \mathbb{R} \cdot u$ , dann gilt

$$K_E(x) = k(u)$$

unabhängig von  $E$ . Ist  $\hat{u} \in T_x M$  ein zeit-artiger Vektor unabh. von  $u$ , so ist

$$k(u) = K_{\text{span}(u,\hat{u})}(x) = k(\hat{u}) = K_E(x) \quad \forall E \perp \hat{u}.$$

Für einen 2-dim. nicht ausgearteten UR  $E \subset T_x M$  gilt somit

$$K_E(x) \equiv k = \text{konst.}$$

2. Fall:  $1 < k = \text{Index}(g) < n - 1$ .

Sei  $E^2 \subset T_x M$  positiv definit und  $\hat{E}^2 \subset T_x M$  negativ-definit,  $u \in E$  und  $\hat{u} \in \hat{E}$  Einheitsvektoren, dann gilt

$$Q(u, \hat{u}) = g(u, u) \cdot g(\hat{u}, \hat{u}) - g(u, \hat{u})^2 < 0.$$

Die Unterräume

$$E \oplus \mathbb{R} \cdot \hat{u}, E \oplus \mathbb{R} \cdot u \subset T_x M$$

sind 3-dim. VR vom Index 1 und insbesondere nicht ausgeartet. Aus dem 1. Fall folgt nun

$$K_E(x) = K_{\text{span}(u,\hat{u})}(x) = K_{\hat{E}}(x).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

- 3.)  $\Rightarrow$  2.) O.B.d.A. ist  $K \geq a$ . Denn Fall  $K \leq b$  erhält man durch  $g \mapsto -g$ . Jeder *ausgeartete* 2-dim. UR  $E$  ist Grenzwert einer Folge indefiniter 2-dim. Unterräume ( $E_n$ ) oder einer Folge definiter 2-dim. Unterräume ( $F_n$ ) (ÜA). Dann gilt

$$E_n = \text{span}(u_n, v_n) \xrightarrow{u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v} E = \langle u, v \rangle$$

$$K_{E_n}(x) = \frac{\mathcal{R}(u_n, v_n, v_n, u_n)}{Q(u_n, v_n)} \geq a$$

und

$$Q(u_n, v_n) \longrightarrow Q(u, v) = 0, \quad \text{da } E = \text{span}(u, v) \text{ ausgeartet.}$$

Ist  $(E_n)$  definit, so ist  $Q(u_n, v_n) > 0$  und damit

$$\mathcal{R}(u_n, v_n, v_n, u_n) \geq a \cdot Q(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

sodass

$$\mathcal{R}(u, v, v, u) = 0 \Rightarrow \mathcal{N}(E) = 0$$

Ist  $(E_n)$  indefinit, dann ist  $Q(u_n, v_n) < 0$  und damit

$$\mathcal{R}(u_n, v_n, v_n, u_n) \leq a \cdot Q(u_n, v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

sodass

$$\mathcal{R}(u, v, v, u) = 0 \Rightarrow \mathcal{N}(E) = 0$$

- 4.), 5.)  $\Rightarrow$  2.) :

Wie eben erhält man

$$\left| \frac{\mathcal{R}(u_n, v_n, v_n, u_n)}{Q(u_n, v_n)} \right| \leq \text{const.}$$

wobei

$$Q(u_n, v_n) < 0 \text{ für 4.)}$$

$$Q(u_n, v_n) > 0 \text{ für 5.)}$$

und

$$E_n = \langle u_n, v_n \rangle \xrightarrow{u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v} E = \langle u, v \rangle \text{ ausgeartet.}$$

Damit geht

$$|\mathcal{R}(u_n, v_n, v_n, u_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \mathcal{R}(u, v, v, u)$$

und  $\mathcal{N}(E) = 0$  für alle  $E$  ausgeartet.

□



## 5 Spektralgeometrie

In der Spektralgeometrie wird die Beziehung zwischen analytischen Eigenschaften von Operatoren (z.B. deren Eigenwerte) und der Geometrie des Grundraumes (Volumen, Dimension, Krümmungen) untersucht.

Als Beispiel betrachten wir das Schlagen einer Trommel: Das Trommelfell kann man mathematisch darstellen als ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , dessen Rand  $\partial\Omega$  fixiert ist.

Die Töne, die durch Schwingungen des Trommelfells erzeugt werden, hängen von der Form des Trommelfells ab. Sie sind die Eigenwerte  $\lambda_i$  des Dirichlet-Laplace-Operators von  $\Omega$ :

$$\Delta u \equiv - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \lambda u, \quad u \in H_1^2(\Omega)$$

mit der Randbedingung  $u|_{\partial\Omega} = 0$  (Der Rand des Trommelfells ist fest eingespannt und schwingt nicht mit). Der kleinste der Eigenwerte  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  ist dabei der Grundton der Schwingung, die anderen Eigenwerte bilden die Obertöne.

Wir bezeichnen mit  $\text{spec}^D(\Omega) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  das Dirichlet-Spektrum von  $\Omega$ .

Das direkte Spektralproblem besteht - wie im Fall der Trommel - darin, für ein gegebenes Gebiet  $\Omega$  das Dirichlet-Spektrum  $\text{spec}^D(\Omega)$  zu bestimmen oder andere Aussagen für die Eigenwerte zu machen (z.B. Abschätzungen).

Das inverse Spektralproblem behandelt die Umkehrung: Wenn die Eigenwerte  $\lambda_i$  gegeben sind, kann man dann Rückschlüsse auf  $\Omega$  ziehen (z.B.  $\text{Vol}(\Omega)$ ,  $l(\partial\Omega)$ )? Mit anderen Worten: Kann man die Form der Trommel hören? Oder gibt es zwei verschiedene Trommelformen, die dieselben Töne produzieren?

(Mark Kac (1966), 'Can one hear the shape of a drum?', American Mathematical Monthly 73 (4, part 2): 1-23)

### Zum inversen Spektralproblem

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes, zusammenhängendes, beschränktes Gebiet, dessen Rand  $\partial\Omega$  stückweise  $C^\infty$  ist. Wie oben bezeichne  $\text{spec}^D(\Omega) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$  das Dirichlet-Spektrum

von  $\Omega$ . Wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u &= \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} &= 0,\end{aligned}$$

wobei  $\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$  ist.

Es gilt: Ist  $\Omega$  isometrisch zu  $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  (d.h., es existiert eine lineare Abbildung  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $A(\Omega) = \widehat{\Omega}$  und  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ ), so folgt

$$\text{spec}^D(\Omega) = \text{spec}^D(\widehat{\Omega}).$$

Für die Trommel heißt das, dass die möglichen Töne gleich bleiben, wenn man die Trommel verschiebt oder dreht.

$\text{spec}^D(\Omega)$  bestimmt jedoch das Gebiet  $\Omega$  nicht vollständig:

Es existieren  $\Omega, \widehat{\Omega}, \Omega \neq \widehat{\Omega}$  mit gleichem Dirichlet-Spektrum (Urakawa, Büser). Im Fall  $n = 2$  ist die Menge der isospektralen  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  'kompakt' (Osgood, Phillips, ?).

Die Töne der Trommel bestimmen also die Form des Trommelfells nicht eindeutig.

Wir wollen nun untersuchen, welche geometrischen Größen durch  $\text{spec}^D(\Omega)$  eindeutig bestimmt sind. Dazu betrachten wir das folgende

**Beispiel 5.1.** Es seien  $\Omega = [0, L] \subset \mathbb{R}$ ,  $\Delta = -\frac{d^2}{dx^2}$  und wir betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u = -u''(x) &= \lambda u \\ u(0) &= u(L) = 0, \quad u \in C^\infty(M), u \neq 0.\end{aligned}$$

Dieses Eigenwertproblem beschreibt eine Gitarrensaite, die an den Punkten  $x = 0$  und  $x = L$  fest eingespannt ist.

Bild

Um die Differentialgleichung zu lösen, machen wir den Ansatz

$$u(x) = a \sin(bx) + c \cos(dx).$$

Dann folgt aus der Anfangsbedingung  $u(0) = 0$  sofort, dass  $c = 0$  sein muss. Aus  $u(L) = 0$  folgt nun, dass  $\sin(bL) = 0$  gilt, was genau dann erfüllt ist, wenn  $b = \frac{k\pi}{L}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ist. Also haben wir

$$u(x) = a \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Mit  $u''(x) = -a \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$  erhalten wir aus der Eigenwertgleichung  $-u''(x) = \lambda u$ , dass die Eigenwerte von  $k$  abhängen:  $\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$ . Die dazugehörige normierte Eigenfunktion ist

$$u_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Die Eigenfunktionen  $\{u_k\}, k \in \mathbb{Z}$  bilden eine Orthonormalbasis von Funktionen  $u \in L^2([0, L])$  mit  $u(0) = u(L) = 0$ .

Das Dirichlet-Spektrum von  $\Omega = [0, L] \in \mathbb{R}$  ist, wie wir eben gesehen haben,

$$\text{spec}^D(\Omega) = \left\{ \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \mid k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

Das heißt,  $L = \text{Vol}([0, h])$  ist durch  $\text{spec}^D(\Omega)$  bestimmt. Für die Gitarrensaite heißt das, dass die möglichen Töne, die die Saite hervorbringen kann, die Länge der Seite bestimmen.

Dieses Resultat lässt sich auch auf den  $\mathbb{R}^n$  verallgemeinern:

### 1) Weylsche Asymptotenformel (Weyl 1912)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein offenes, zusammenhängendes, beschränktes Gebiet, dessen Rand  $\partial\Omega$  stückweise  $C^\infty$  ist. Wie sind dann die Eigenwerte des Operators  $\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$  asymptotisch verteilt?

Diese Fragestellung ist analog zur Frage der asymptotischen Verteilung der Primzahlen aus der Zahlentheorie:

Sei

$$\pi(x) := \text{card}\{p \mid p \text{ prim}, p \leq x\}.$$

Dann gilt (Vermutung: Gauß, Beweis: Hadamard)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Dabei heißen zwei Funktionen  $f, g$  auf  $\mathbb{R}$  asymptotisch äquivalent,  $f \sim g$ , falls

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$$

gilt.

Bei unserem spektralgeometrischen Problem definieren wir analog

$$N(\lambda) := \text{card}\{\lambda_i \mid \lambda_i \in \text{spec}^D(\Omega), \lambda_i \leq \lambda\}.$$

Dann gilt (Weyl)

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{2}} \text{vol}(\Omega) \cdot \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

wobei  $\omega_n = \text{Vol}(K_n(0, 1))$  das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  ist.

(Bem.: Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K_n(0, r)) &= \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{(\frac{n}{2})!} & n = 2m \\ \frac{\pi^m r^n}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot (\frac{2m+1}{2})} & n = 2m + 1 \end{cases} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{(\frac{n}{2})!} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{2}\right)! &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2} \cdot \sqrt{\pi} \quad n \text{ ungerade} \\ &= \frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned}$$

wegen  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ .

Damit folgt:

I)  $\dim(\Omega)$  ist durch  $\text{spec}^D(\Omega)$  bestimmt:

$\dim(\Omega) = n$ , wobei  $n$  diejenige Zahl  $m$  ist, für die

$$0 < \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{m}{2}}} = \text{const} < \infty,$$

denn

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{m}{2}}} = \frac{N(\lambda)}{\lambda^{\frac{n}{2}}} \cdot \lambda^{\frac{n}{2} - \frac{m}{2}} \rightarrow \begin{cases} \text{const} > 0 & m = n \\ \infty & m < n \\ 0 & m > n. \end{cases}$$

II)  $\text{Vol}(\Omega)$  ist durch  $\text{spec}^D(\Omega)$  bestimmt, denn ??? gibt das Volumen an, wenn  $n$  bekannt ist.

## 2) Asymptotenentwicklung der Theta-Funktion

In der Zahlentheorie wird die  $\theta$ -Funktion definiert durch

$$\theta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-tk^2}.$$

Wir betrachten im Folgenden die  $\theta$ -Funktion des Dirichlet-Laplace-Operators

$$\theta_{\Omega}(t) := \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \in \text{spec}^D(\Omega)}}^{\infty} e^{-t\lambda_k}.$$

$\theta_{\Omega}(t)$  konvergiert für  $t > 0$  und hat nahe 0 die asymptotische Entwicklung

$$\theta_{\Omega}(t) \underset{t \downarrow 0}{\sim} t^{-\frac{n}{2}} \sum_{j \geq +0} t^{\frac{j}{2}} a_j.$$

Das heißt,

$$\theta_{\Omega}(t) - \sum_{j \geq -n}^N t^{\frac{j}{2}} a_j = O(t^{N+1}), \quad (t \rightarrow 0)$$

und

$$|\theta_{\Omega}(t) - \sum_{j \geq -n}^N t^{\frac{j}{2}} a_j| \leq \text{const} \cdot t^{N+1}, \quad (t \downarrow 0).$$

Die  $a_j$  enthalten geometrische Informationen: Im Fall  $n = 2$  (Kac) sind zum Beispiel

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{area}(\Omega) \\ a_1 &= l(d\Omega) \\ a_2 &= \frac{1}{6}(1-h), \end{aligned}$$

wobei  $h$  die Anzahl der Löcher von  $\Omega$  ist.

$\text{spec}^D(\Omega)$  bestimmt also in diesem Fall  $\text{area}(\Omega)$ ,  $l(d\Omega)$  und  $h$ .

**Uns interessiert in der Differentialgeometrie das folgende Problem:**

Sei  $(M^n, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, z.B.  $S^n$  oder eine geeignete Fläche im  $\mathbb{R}^2$ . Wir betrachten den geometrischen Laplace-Operator von  $(M, g)$

$$\begin{aligned} \Delta : C^{\infty}(M) &\rightarrow C^{\infty}(M) \\ f &\mapsto \Delta f := -\text{div}(\text{grad } f) \end{aligned}$$

und die Eigenwertgleichung  $\Delta f = \lambda f$ .

Es existieren unendlich viele Paare  $(\lambda_i, f_i)$  als Lösungen, wobei  $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$  gilt und die  $\{f_i\}$  eine Orthonormalbasis in  $L^2(M)$  bilden. Die einfachste Lösung besteht aus dem Paar  $\lambda_0 = 0$  und  $f_0 = \text{const}$ .  $\lambda_1$  ist dann der kleinste von 0 verschiedene Eigenwert.

$$\text{spec}(M, g) = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}.$$

## 1) Direktes Spektralproblem

Bei diesem Problem ist  $(M, g)$  gegeben und man studiert  $\text{spec}(M, g)$ . Man kann versuchen, das Spektrum explizit zu berechnen. Oftmals ist dies aber zu schwer und man beschränkt sich darauf zu untersuchen, ob es Lücken im Spektrum gibt oder die Größe bestimmter Eigenwerte abzuschätzen. Die Eigenschaften der Eigenwerte  $\lambda_k$  geben dabei die Geometrie der Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  wieder. Zum Beispiel ist die Größe von  $\lambda_1$  eine obere Abschätzung für die geometrische Größe von  $(M, g)$ .

**Satz 5.2** (Obata/Lichnerowicz ('58,'62)). *Sei  $(M^n, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Weiterhin sei  $\text{Ric} \geq k \cdot g$ ,  $k > 0$ , d.h.  $(M, g)$  sei positiv gekrümmt. Dann gilt*

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}k.$$

*Falls Gleichheit gilt, ist  $(M, g)$  isometrisch zur runden Sphäre  $(S^n, g_{\text{Std}})$ .*

$\lambda_1$  ist also eine Krümmungsschranke: Je 'krummer'  $(M, g)$  ist, desto größer ist  $\lambda_1$ . Für die Standardsphäre  $(S^n, g_{\text{Std}})$  gilt  $\text{Ric} = (n-1)g$ . Die zweite Aussage folgt daher aus der ersten mit  $k = n-1$ .

**Satz 5.3** (Li, Yau ('80)). *Sei  $(M^n, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Sei  $\text{Ric} \geq 0$ . Dann gilt*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi^2}{4d^2}.$$

*Dabei ist  $d = \text{diam}(M, g)$  der Durchmesser der Mannigfaltigkeit.*

Je 'kleiner'  $(M, g)$  ist, desto größer ist  $\lambda_1$ .

## 2) Inverses Spektralproblem

Welche Schlüsse lassen sich aus der Kenntnis von  $\text{spec}^D(\Omega)$  für die Geometrie von  $(M, g)$  ziehen ?

Es gelten

- Wenn  $(M, g)$  und  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  ein-dimensional sind und  $\text{spec}(M, g) = \text{spec}(\widehat{M}, \widehat{g})$  ist, dann muss  $(M, g)$  isomorph zu  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  sein.
- Wenn  $(M, g)$  und  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  kompakte orientierte Flächen sind und  $\text{spec}(M, g) = \text{spec}(\widehat{M}, \widehat{g})$  ist, dann muss  $(M, g)$  diffeomorph zu  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  sein.
- Wenn  $\text{spec}(M, g) = \text{spec}(S^n)$  ist, wobei  $n \in \{1, 2, 3\}$ , dann muss  $(M, g)$  isomorph zu  $(S^n)$  sein.

Für höhere Raumdimensionen gilt dies nicht (Beispiel von Milnor: 16-dimensionaler Torus).

Auch hier gilt wieder die Weylsche Asymptotenformel: Sei

$$N(\lambda) := \text{card}\{\lambda_i \mid \lambda_i \in \text{spec}(M, g), \lambda_i \leq \lambda\}.$$

Dann gilt

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{2}} \text{vol}(M) \cdot \frac{\omega_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

wobei auch hier  $\omega_n = \text{Vol}(K_n(0, 1))$  das Volumen der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  ist.

Wie im Fall des  $\mathbb{R}^n$  (S. 5) sind sowohl  $\dim(M)$  als auch  $\text{Vol}(M)$  durch  $(M, g)$  bestimmt. Analog zu S. 5 definieren wir die Theta-Funktion

$$\theta_{(M,g)}(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}.$$

$\theta_{(M,g)}(t)$  konvergiert für  $t > 0$  und hat nahe 0 die asymptotische Entwicklung

$$\theta_{(M,g)}(t) \underset{t \downarrow 0}{\sim} t^{-\frac{n}{2}} \sum_{j \geq +0} t^{\frac{j}{2}} a_j.$$

Die  $a_l$  sind dabei WL-Invarianten (kommen von der Fundamentallösung der WLG). Zum Beispiel sind  $a_0 = \text{Vol}(M)$ ,

$$a_1 = \frac{1}{6} \int R dM,$$

wobei  $R$  die Skalarkrümmung von  $(M, g)$  ist, und

$$a_2 = \int \text{weitere Krümmungen}.$$

Zur Veranschaulichung betrachten wir eine kompakte orientierte Fläche  $(M, g)$ . Dann ist mit der Gaußkrümmung  $K$  und dem Geschlecht  $g$

$$a_1 = \frac{1}{3} \int K dM = \frac{1}{3} \cdot 2\pi(1 - g).$$

Das heißt,

$$M \underset{\text{diffeom}}{\approx} S^2 \# T^2 \# \dots \# T^2$$

Also bestimmt auch hier wieder  $\text{spec}(M, g)$  die Anzahl der Löcher.

## Literatur:

### Riemannsche Geometrie:

- DoCarmo: Riemannian Geometry, Birkhäuser 1992
- Klingenberg, Gromoll, Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen, Springer 1966
- M. Spivak: A Comprehensive Course in Differential Geometry I-V

## Spektralgeometrie

- Berger, Gauduchon, Mazet: Le spectre d'une variété riemannienne, Lect. Notes in Math. 194, 1971
- I. Chavel: Eigenvalues in Riemannian Geometry, Acad. Press 1984
- P. H. Berard: Spectral Geometry. Direct and Inverse Problems, Lect. Notes in Math. 1207, 1986

### 5.1 Der Hodge-Laplace-Operator auf $k$ -Formen

Im Folgenden sei stets  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche MF vom Index  $p$ . Wir definieren nun mittels  $g_x$  ein Skalarprodukt auf  $\Lambda^k T_x^* M$ . Sei dazu  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormal-Basis bzgl.  $g$ . Für  $\omega_x, \sigma_x \in \Lambda^k T_x^* M$  sei

$$\langle \omega_x, \sigma_x \rangle_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \sigma_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \cdot \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k}, \quad \text{für } k > 0$$

und  $\langle \omega_x, \sigma_x \rangle_x = \omega(x) \cdot \sigma(x)$  für  $k = 0$ . Eine Orthonormalbasis in  $\Lambda^k T_x^* M$  bezüglich diesem Skalarprodukt ist dann gegeben durch

$$\{\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}, 1 \leq \underbrace{i_1 < \dots < i_k}_{=I} \leq n\}, \quad (\sigma^1, \dots, \sigma^n) \text{ duale Basis zu } (e_1, \dots, e_n).$$

Dann ist eine Bündelmetrik auf  $\Lambda^k T^* M$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega^k(M) \times \Omega^k(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \langle \omega, \sigma \rangle, \quad \langle \omega, \sigma \rangle(x) := \langle \omega_x, \sigma_x \rangle_x. \end{aligned}$$

Sei nun  $(M^n, g, \mathcal{O})$  eine orientierte, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index  $p$  (mit oder ohne Rand). Sei  $dM$  die zugehörige Volumenform, also

$$dM_x = \sigma^1 \wedge \dots \wedge \sigma^n,$$

wobei  $(\sigma^i)$  die duale Basis zur positiv orientierten ONB  $(e_i)$  in  $(T_x M, g_x, \mathcal{O}_{T_x M})$  ist.

**Definition.** Der Hodge-\*-Operator ist der  $C^\infty(M)$ -lineare Operator

$$\begin{aligned} * : \Omega^k(M^n) &\rightarrow \Omega^{n-k}(M^n) \\ \omega &\mapsto *\omega \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\langle w \wedge \sigma, dM \rangle = (-1)^p \cdot \langle *\omega, \sigma \rangle \quad \forall \sigma \in \Omega^{n-k}(M).$$

Bemerkung:

Eine äquivalente Forderung ist  $\omega \wedge \sigma = \langle *\omega, \sigma \rangle dM \quad \forall \sigma \in \Omega^{n-k}(M)$ . Denn:

- $\omega \wedge \sigma \in \Omega^n(M^n) \Rightarrow \omega \wedge \sigma = f \cdot dM$  für ein  $f \in C^\infty(M)$ .
- $\langle dM, dM \rangle = (-1)^p$  und daher

$$\begin{aligned} (-1)^p \langle * \omega, \sigma \rangle &= \langle \omega \wedge \sigma, dM \rangle \\ &= f \langle dM, dM \rangle \\ &= (-1)^p \cdot f \end{aligned}$$

Also  $f = \langle * \omega, \sigma \rangle$  und damit folgt die Behauptung.

**Satz 5.4.**  $*$  :  $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$  hat folgende Eigenschaften:

- (1)  $** = (-1)^{p+k \cdot (n-k)}$
- (2) Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale, positiv-orientierte ONB und  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  ihre duale Basis. Dann gilt:

$$*(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}) = \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \cdot \text{sign}(I, J) \cdot \sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{n-k}},$$

wobei  $\underbrace{(i_1 < \dots < i_k)}_{=I}, \underbrace{(j_1 < \dots < j_{n-k})}_{=J}$  Permutation von  $\{1, 2, \dots, n\}$

- (3)  $\langle * \omega, * \tilde{\omega} \rangle = (-1)^p \cdot \langle \omega, \tilde{\omega} \rangle \quad \forall \omega, \tilde{\omega} \in \Omega^k(M)$
- (4)  $\omega \wedge (* \tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \wedge * \omega = (-1)^p \langle \omega, \tilde{\omega} \rangle dM$

*Beweis.* (2) Bestimmen die Basisdarstellung von  $*(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k})$ :

$$*(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}) = \sum_{\alpha=(1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-k} \leq n)} a_\alpha \cdot \sigma^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{\alpha_{n-k}},$$

wobei für die  $a_j$  gilt:

$$\begin{aligned} a_j &= \langle *(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}), \sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{n-k}} \rangle \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \\ &= (-1)^p \cdot \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \cdot \langle \underbrace{\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \wedge \sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{n-k}}}_{\text{nur } \neq 0 \text{ für } (I, J) \text{ Permutation von } \{1, \dots, n\}}, dM \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } (I, J) \text{ keine Permutation} \\ (-1)^p \cdot \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \langle dM, dM \rangle \text{sign}(I, J) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } (I, J) \text{ keine Permutation} \\ \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \text{sign}(I, J) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt schließlich

$$*(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}) = \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \cdot \text{sign}(I, J) \cdot \sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{n-k}}.$$

(1)

$$\begin{aligned}
**(\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}) &= \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \cdot \text{sign}(I, J) \cdot *(\sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{n-k}}) \\
&= \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \cdot \text{sign}(I, J) \cdot \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k} \text{sign}(J, I) \cdot \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k} \\
&= (-1)^p \cdot \text{sign}(I, J)^2 \cdot (-1)^{k \cdot (n-k)} \cdot \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}
\end{aligned}$$

und wegen Linearität folgt die Behauptung für alle  $\omega \in \Lambda^k T^*M$ .

(3)

$$\begin{aligned}
\langle * \omega, \underbrace{*\tilde{\omega}}_{=:\sigma} \rangle &= (-1)^p \langle \omega \wedge \sigma, dM \rangle \\
&= (-1)^{p+k(n-k)} \langle \sigma \wedge \omega, dM \rangle \\
&= (-1)^{p+k(n-k)} \cdot \langle \underbrace{*\sigma}_{=**\tilde{\omega}}, \omega \rangle \cdot \langle dM, dM \rangle \\
&= (-1)^p \cdot \langle \tilde{\omega}, \omega \rangle \qquad \text{nach (1)}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
\omega \wedge *\tilde{\omega} &= \langle * \omega, *\tilde{\omega} \rangle dM \\
&= (-1)^p \underbrace{\langle \omega, \tilde{\omega} \rangle}_{=\langle \tilde{\omega}, \omega \rangle} dM \qquad \text{nach (3)} \\
&= \dots \qquad \text{rückwärts rechnen} \\
&= \tilde{\omega} \wedge * \omega
\end{aligned}$$

□

Spezialfall:  $\dim(M) = 4$

Dann ist  $*$  :  $\Lambda^2 T^*M \rightarrow \Lambda^2 T^*M$  linearer Operator mit

$$** = (-1)^p \text{id}.$$

- $p = 0, 2 \Rightarrow$   
 $*$  ist eine Involution auf  $\Lambda^2 T^*M$ , sodass

$$\Lambda^2 T^*M = \Lambda_+^2 T^*M \oplus \Lambda_-^2 T^*M$$

eine Eigenraumzerlegung in Eigen-Unterräumen von  $*$  zu den Eigenwerten  $\pm 1$  ist.

$\Lambda_+^2 T^*M$  heißen selbstduale 2-Formen,

$\Lambda_-^2 T^*M$  heißen antiselbstduale 2-Formen.

- $p = 1, 3 \Rightarrow$   
 $** = -\text{id}$ , das heißt  $*$  ist eine fast-komplexe Struktur auf  $\Lambda^2 T^*M$ , also  $\Lambda^2 T_x^*M$  ist ein dreidimensionaler komplexer Vektorraum mit  $i\omega = *\omega$ .

$(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche, orientierte Mannigfaltigkeit vom Index  $p$ . Dann gilt für das Differential:

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \xrightarrow{d} 0.$$

Analog definieren wir nun einen Operator  $\delta$  mit

$$0 \xleftarrow{\delta} \Omega^0(M) \xleftarrow{\delta} \Omega^1(M) \xleftarrow{\delta} \Omega^2(M) \leftarrow \dots \xleftarrow{\delta} \Omega^n(M) \leftarrow 0.$$

**Definition.** Der Operator

$$\begin{aligned} \delta : \Omega^{k+1}(M) &\rightarrow \Omega^k(M) \\ \omega &\mapsto (-1)^{p+nk+1} * d * \omega \end{aligned}$$

heißt Codifferential-Operator.

Für den Codifferential-Operator gilt wegen  $d \circ d = 0$  auch  $\delta \circ \delta = 0$ .

**Definition.** Sei  $(M^n, g)$  orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist auf  $\Omega^k(M)$  ein  $L^2$ -Skalarprodukt definiert durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} : \Omega_c^k(M) \times \Omega_c^k(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \sigma) &\mapsto \int_M \langle \omega, \sigma \rangle dM, \end{aligned}$$

wobei

$$\Omega_c^k = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \text{supp } \omega \text{ kompakt und } \text{supp } \omega \subset \text{int}M\}.$$

**Satz 5.5.** Es gilt für alle  $\omega \in \Omega_c^k(M)$ ,  $\sigma \in \Omega_c^{k+1}(M)$ :

$$\langle d\omega, \sigma \rangle_{L^2} = \langle \omega, \delta\sigma \rangle_{L^2}.$$

Das heißt,  $\delta|_{\Omega_c^{k+1}(M)}$  ist der zu  $d$  auf  $(\Omega_c^k(M), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$  adjungierte Operator.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle d\omega, \sigma \rangle_{L^2} &= \int_M \langle d\omega, \sigma \rangle_x dM \\
&= (-1)^p \int_M d\omega \wedge * \sigma && \text{nach Satz 5.4} \\
&= (-1)^p \int_M (d(\omega \wedge * \sigma) - \omega \wedge d(*\sigma) \cdot (-1)^k) \\
&= (-1)^p \left[ \underbrace{\int_{\partial M} \omega \wedge * \sigma}_{=0} - \int_M \omega \wedge d * \sigma (-1)^k \right] && \text{nach Satz von Stokes} \\
&= (-1)^{p+1+k} \int_M \omega \wedge d * \sigma \\
&= (-1)^{p+1+k+p+(n-k)k} \int_M \omega \wedge *( * d * \sigma) \\
&= \underbrace{(-1)^{p+(k+1)k}}_{=-1^p} \int_M \omega \wedge * \delta \sigma \\
&= \int_M \langle \omega, \delta \sigma \rangle && \text{nach Satz 5.4} \\
&= \langle \omega, \delta \sigma \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

Ziel: Verallgemeinerung des Laplace-Operators  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  auf die  $k$ -Formen  $\Omega^k(M)$ . Suchen  $\mathbb{R}$ -lineare Operatoren  $P : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ , die in lokalen Koordinaten die Form

$$P = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{l=1}^n B \frac{\partial}{\partial x_l} + C$$

haben. Dabei verstehen wir ein Element  $\omega \in \Omega^k(M)$  als die Funktion  $(\omega_I)_I \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{\binom{n}{k}})$ , sodass die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x_k} \omega$  sinnvoll definiert sind.

Im Folgenden werden wir den Hodge-Laplace-Operator und den Bochner-Laplace-Operator definieren. Beide haben eine solche lokale Darstellung.

**Definition.** Sei  $(M^n, g, \mathcal{O}_M)$  eine orientierte semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt

$$\begin{aligned}
\Delta_k &: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M) \\
\Delta_k &:= \delta \circ d + d \circ \delta
\end{aligned}$$

Hodge-Laplace-Operator von  $(M, g)$ .

**Satz 5.6.** *Der Hodge-Laplace-Operator hat folgende Eigenschaften:*

(1)  $\Delta_k : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)$  ist formal-selbstadjungiert, das heißt

$$\langle \Delta_k \omega, \sigma \rangle_{L^2} = \langle \omega, \Delta_k \sigma \rangle_{L^2} \quad \forall \omega, \sigma \in \Omega_c^k(M).$$

(2)  $\Delta_k \circ d = d \circ \Delta_k$  und  $\Delta_k \circ \delta = \delta \circ \Delta_k$ .

(3)  $\Delta_0 = \Delta := -\operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$ .

*Beweis.* (1)

$$\begin{aligned} \langle \Delta_k \omega, \sigma \rangle &= \langle d\delta\omega + \delta d\omega, \sigma \rangle \\ &= \langle \delta\omega, \delta\sigma \rangle + \langle d\omega, d\sigma \rangle && \text{(weil } d^{**} = d) \\ &= \langle \omega, d\delta\sigma + \delta d\sigma \rangle \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \Delta_k \circ d &= d\delta d + \delta \underbrace{dd}_{=0} = d(d\delta + \delta d) = d\Delta_k \\ \Delta_k \circ \delta &= (d\delta + \delta d)\delta = \delta(d\delta) = \delta(\delta d + d\delta) = \delta\Delta_k \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \Delta_0 f &= (d\delta + \delta d)f = \delta \underbrace{df}_{1\text{-Form}} = (-1)^{p+1+n \cdot 0} * d * df \\ \Delta f &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \Delta f \cdot dM &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)dM \\ &= -L_{\operatorname{grad} f}dM && \text{(nach einer \ddot{U}A)} \\ &= (-1)^{p+1}d(*df) && \text{(nach einer anderen \ddot{U}A)} \end{aligned}$$

Und damit gilt nach Definition des  $*$ -Operators:

$$\Delta f \cdot \underbrace{*dM}_{=1} = (-1)^{p+1} * d * df$$

und das zeigt die Behauptung. □

Ziel: Wollen nun  $d$ ,  $\delta$  und  $\Delta_k$  durch kovariante Ableitungen ausdrücken.

**Definition.** Sei  $\nabla$  der Levi-Civita Zusammenhang auf  $(M, g)$ . Dann definiert  $\nabla$  eine kovariante Ableitung auf dem Bündel  $\Lambda^k T^*M$

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(\Lambda^k T^*M) &\rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) \\ \omega &\mapsto \nabla \omega \end{aligned}$$

gegeben durch

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \dots, X_k) := X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k).$$

**Satz 5.7.** Für die vom LC-Zsh. induzierte kovariante Ableitung  $\nabla$  auf  $\Lambda^k T^*M$  gilt:

(1)  $\nabla$  ist eine metrische kovariante Ableitung bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\Lambda^k T^*M$ , das heißt

$$X(\langle \omega, \sigma \rangle) = \langle \nabla_X \omega, \sigma \rangle + \langle \omega, \nabla_X \sigma \rangle \quad \forall \omega, \sigma \in \Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M).$$

(2)  $\nabla_X(\omega \wedge \sigma) = \nabla_X \omega \wedge \sigma + \omega \wedge \nabla_X \sigma$

(3)  $\nabla_X(Y \lrcorner \omega) = (\nabla_X Y) \lrcorner \omega + Y \lrcorner \nabla_X \omega$ , wobei  $Y \lrcorner \omega$  bedeutet, dass  $Y$  in die erste Koordinate von  $\omega$  eingesetzt wird.

*Beweis.* Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

**Satz 5.8.** Sei  $\nabla$  die vom LC-Zsh. induzierte Ableitung auf  $\Lambda^k T^*M$ . Dann gilt:

$$(1) (d\omega)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)$$

$$(2) \delta\omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \omega)(e_i, X_1, \dots, X_{k-1}), \text{ wobei } (e_1, \dots, e_n) \text{ eine lokale ONB auf } (M, g) \text{ ist und } \epsilon_i = g(e_i, e_i).$$

*Beweis.* (1) Folgt, wenn man die Definitionen einsetzt und benutzt, dass  $\nabla_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ . Der genaue Beweis bleibt als Übungsaufgabe.

(2) Wir wissen:  $\delta\omega = (-1)^{p+1+n(k-1)} * d * \omega$  für  $\omega \in \Omega^k(M)$ .

Sei nun  $(e_1, \dots, e_n)$  lokale ONB und  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  die duale Basis auf  $U \subset M$ . Dann gilt für  $\eta \in \Omega^k(M)$ :

$$\eta|_U = \sum_{I=(i_1 < \dots < i_k)} \eta_I \cdot \sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}, \quad \eta_I = \eta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

Und damit hat  $*\eta$  die Darstellung:

$$\begin{aligned} *\eta|_U &= \sum_I \eta_I * (\sigma^{i_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{i_k}) \\ &= \sum_I \eta_I \operatorname{sign} \underbrace{(I, J)}_{\text{Permutation von } (1, \dots, n)} \cdot \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}} \sigma^{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{j_{n-k}} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

beziehungsweise

$$*\eta \lfloor_U (e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}) = \eta(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \operatorname{sign}(I, J) \epsilon_{j_1} \dots \epsilon_{j_{n-k}}. \quad (\text{B})$$

Und damit folgt schließlich für  $\delta\omega$ :

$$\begin{aligned} & \delta\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \\ &= (-1)^{p+1+n(k-1)} * \underbrace{(d * \omega)}_{=: \eta}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \\ &\stackrel{(\text{B})}{=} (-1)^{p+1+n(k-1)} \eta(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_{n-k+1}}) \operatorname{sign}(\alpha, I) \cdot e_{i_1} \dots \epsilon_{i_{k-1}} \\ &= (-1)^{p+1+n(k-1)} \eta(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_{n-k+1}}) \operatorname{sign}(I, \alpha) \cdot (-1)^{(k-1)(n-k+1)} \cdot e_{i_1} \dots \epsilon_{i_{k-1}} \\ &= \underbrace{(-1)^{p+1+(k-1)^2}}_{(-1)^{p+k}} \operatorname{sign}(I, \alpha) \cdot \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_{k-1}} \cdot \eta(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_{n-k+1}}) \\ &\stackrel{(1)}{=} (-1)^{p+k} \operatorname{sign}(I, \alpha) \cdot \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_{k-1}} \cdot \sum_{\beta=1}^{n-k+1} (-1)^{\beta-1} \nabla_{e_{\alpha_\beta}} (*\omega)(e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_{n-k+1}}) \\ &\stackrel{(\text{B})}{=} (-1)^{p+k} \operatorname{sign}(I, \alpha) \cdot \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_{k-1}} \cdot \sum_{\beta=1}^{n-k+1} (-1)^{\beta-1} (\nabla_{e_{\alpha_\beta}} \omega)(e_{\alpha_\beta}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \\ &\quad \cdot \operatorname{sign}(\alpha_\beta, I, \alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_\beta, \dots, \alpha_{n-k+1}) \cdot \epsilon_{\alpha_1} \dots \epsilon_{\hat{\alpha}_\beta} \dots \epsilon_{\alpha_{n-k+1}} \\ &= (-1)^{p+k} \cdot (-1)^p \cdot \sum_{\beta=1}^{n-k+1} \epsilon_{\alpha_\beta} (-1)^{k-1+(\beta-1)} \operatorname{sign}(I, \alpha)^2 (-1)^{\beta-1} (\nabla_{e_{\alpha_\beta}} \omega)(e_{\alpha_\beta}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \\ &= - \sum_{\beta=1}^{n-k+1} \epsilon_{\alpha_\beta} \cdot (\nabla_{e_{\alpha_\beta}} \omega)(e_{\alpha_\beta}, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \\ &= - \sum_{l=1}^n \epsilon_l (\nabla_{e_l} \omega)(e_l, e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \\ &= (\delta\omega)(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}) \end{aligned}$$

□

**Definition.** Die Abbildung

$$\begin{aligned} c : \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^*T^*M) &\rightarrow \Gamma(\Lambda^*T^*M) \\ (\sigma, \omega) &\mapsto \underbrace{\sigma \wedge \omega}_{(k+1)\text{-Form}} - \underbrace{\sigma^\sharp \lrcorner \omega}_{(k-1)\text{-Form}} \end{aligned}$$

heißt Clifford-Multiplikation auf  $\Lambda^*T^*M$ . Dabei ist  $\Lambda^*T^*M := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k T^*M$  und  $\sigma^\sharp$  das duale Vektorfeld zu  $\sigma$ , also  $\sigma(Y) = g(\sigma^\sharp, Y)$  für alle  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Als Schreibweise verwenden wir auch  $\sigma \cdot \omega := c(\sigma, \omega)$ .

**Satz 5.9.** Das Clifford-Produkt hat folgende Eigenschaften:

- (1)  $(\sigma \cdot \tau + \tau \cdot \sigma) \cdot \omega = -2\langle \sigma, \tau \rangle \omega$  für alle  $\sigma, \tau \in \Omega^1(M)$ ,  $\omega \in \Omega^k(M)$ .  
 (2) Für die durch den LC-Zsh. induzierte kovariante Ableitung  $\nabla$  gilt:

$$\nabla_X(\sigma \cdot \omega) = (\nabla_X \sigma) \cdot \omega + \sigma \cdot \nabla_X \omega.$$

(3) Für den Operator  $D := c \circ \nabla : \Gamma(\Lambda^* T^* M) \rightarrow \Gamma(\Lambda^* T^* M)$  gilt:

- (a)  $D = d + \delta$   
 (b)  $D^2|_{\Omega^k(M)} = \Delta_k$

**Bemerkung:** Operatoren, die die Eigenschaft (3) (b) aus dem vorigen Satz erfüllen, heißen Operatoren vom Dirac-Typ.

*Beweis.* (1)

$$\begin{aligned} & \tau \cdot \sigma \cdot \omega + \sigma \cdot \tau \cdot \omega \\ &= \tau \cdot (\sigma \wedge \omega - \sigma^\sharp \lrcorner \omega) + \sigma \cdot (\tau \wedge \omega - \tau^\sharp \lrcorner \omega) \\ &= \tau \wedge \sigma \wedge \omega - \tau^\sharp \lrcorner (\sigma \wedge \omega) - \tau \wedge (\sigma^\sharp \lrcorner \omega) + \tau^\sharp \lrcorner (\sigma^\sharp \lrcorner \omega) \\ & \quad + \sigma \wedge \tau \wedge \omega - \sigma^\sharp \lrcorner (\tau \wedge \omega) - \sigma \wedge (\tau^\sharp \lrcorner \omega) + \sigma^\sharp \lrcorner (\tau^\sharp \lrcorner \omega) \\ &= -\sigma(\tau^\sharp)\omega + \sigma \wedge (\tau^\sharp \lrcorner \omega) - \tau \wedge (\sigma^\sharp \lrcorner \omega) \\ & \quad - \tau(\sigma^\sharp)\omega + \tau \wedge (\sigma^\sharp \lrcorner \omega) - \sigma \wedge (\tau^\sharp \lrcorner \omega) \quad (\text{Produktregel für } \wedge) \\ &= -\sigma(\tau^\sharp)\omega - \tau(\sigma^\sharp)\omega \\ &= -2g(\tau^\sharp, \sigma^\sharp)\omega \\ &= -2\langle \tau, \sigma \rangle \omega \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \nabla_X(\sigma \cdot \omega) &= \nabla_X(\sigma \wedge \omega - \sigma^\sharp \lrcorner \omega) \\ &= \nabla_X(\sigma \wedge \omega) - \nabla_X(\sigma^\sharp \lrcorner \omega) \\ &= \nabla_X \sigma \wedge \omega + \sigma \wedge \nabla_X \omega - \underbrace{(\nabla_X \sigma^\sharp)}_{=(\nabla_X \sigma)^\sharp \text{ (ÜA)}} \lrcorner \omega - \sigma^\sharp \lrcorner \nabla_X \omega \quad (\text{Satz 5.7}) \\ &= (\nabla_X \sigma) \cdot \omega + \sigma \cdot \nabla_X \omega \end{aligned}$$

(3) Beweisen die Formel durch Rechnung in lokalen Koordinaten. Sei dazu wie immer

$(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale ONB und  $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 D\omega &= (c \circ \nabla)(\omega) \\
 &= c(\nabla\omega) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sigma^i \cdot \nabla_{e_i} \omega \\
 &= \sum_{i=1}^n \sigma^i \wedge \nabla_{e_i} \omega - \sum_{i=1}^n (\sigma^i)^\sharp \lrcorner \nabla_{e_i} \omega \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \sigma^i \wedge \nabla_{e_i} \omega}_{=: I} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \epsilon_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i} \omega}_{\delta\omega}.
 \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{i=1}^n \sigma^i \wedge \nabla_{e_i} \omega \right) (X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k \sigma^i(X_j) \cdot (\nabla_{e_i} \omega)(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) (-1)^j \\
 &\quad (\text{Nach der Definition von } \wedge) \\
 &= \sum_{j=0}^k \left( \nabla_{\sum_{i=1}^n \sigma^i(X_j) e_i} \omega \right) (X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \cdot (-1)^j \\
 &= \sum_{j=0}^k (-1)^j (\nabla_{X_j} \omega) (X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k).
 \end{aligned}$$

Also gilt  $D = d + \delta$ . Also gilt auch

$$\begin{aligned}
 D^2 |_{\Omega^k(M)} &= dd + d\delta + \delta d + \delta\delta \\
 &= d\delta + \delta d \\
 &= \Delta_k
 \end{aligned}$$

□

## 5.2 Der Bochner-Laplace-Operator

**Lemma 5.10.** *Der Laplace-Operator  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  hat folgende lokale Formel:*

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (e_i(e_i(f)) + \operatorname{div}(e_i) \cdot e_i(f)),$$

wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale ONB ist und  $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$ .

*Beweis.* Benutzen

$$\operatorname{div}(hX) = X(h) + h \cdot \operatorname{div}(X) \quad (*)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Delta f &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &= -\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i e_i(f) e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \operatorname{div}(e_i(f) \cdot e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i (e_i(e_i(f)) + \operatorname{div}(e_i) \cdot e_i(f)) \end{aligned} \quad (**)$$

□

Wir betrachten nun einen Operator auf  $\Omega^k(M)$ , der so aussieht wie (\*\*), wobei  $e_i(f)$  ersetzt wird durch  $\nabla_{e_i}\omega$ .

Sei  $(M^n, g)$  eine semi-Riemannsche MF mit LC-Zsh.  $\nabla^g$ . Dann induziert  $\nabla^g$  eine kovariante Ableitung  $\nabla$  auf dem Bündel  $\Lambda^k T^*M$ , wie wir aus dem vorigen Abschnitt wissen:

$$\nabla : \Gamma(\Lambda^k T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M).$$

Betrachten nun eine kovariante Ableitung

$$\hat{\nabla} : \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$$

definiert durch

$$\hat{\nabla}(\sigma \otimes \omega) := \nabla\sigma \otimes \omega + \sigma \otimes \nabla\omega.$$

Zuletzt definieren wir für  $B \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$  noch

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_g B &\in \Gamma(\Lambda^k T^*M) \\ \operatorname{Tr}_g B &:= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot B(e_i, e_i), \end{aligned}$$

wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale ONB ist.

**Definition.** Der lineare Operator

$$\begin{aligned} \Delta^\nabla : \Omega^k(M) &= \Gamma(\Lambda^k T^*M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) \\ &\xrightarrow{\hat{\nabla}} \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) \\ &\xrightarrow{-\operatorname{Tr}} \Gamma(\Lambda^k T^*M) = \Omega^k(M) \end{aligned}$$

heißt Bochner-Laplace-Operator auf  $\Omega^k(M)$ .

**Satz 5.11.** (Eigenschaften des Bochner-Laplace-Operators  $\Delta^\nabla$ )

(1)  $\Delta^\nabla$  hat die folgende lokale Darstellung:

$$\Delta^\nabla \omega = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega + \operatorname{div}(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \omega),$$

wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale ONB ist.

(2) Es gilt die folgende Produktregel:

$$\Delta^\nabla(f\omega) = f \cdot \Delta^\nabla \omega - 2\nabla_{\operatorname{grad} f} \omega + \Delta f \cdot \omega \quad \forall f \in C^\infty(M), \omega \in \Omega^k(M).$$

(3) Sei  $(M, g)$  zusätzlich orientiert. Sei

$$\nabla^* : \Gamma_c(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M) \rightarrow \Gamma_c(\Lambda^k T^*M)$$

der duale Operator bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ . Dann gilt:

- $\nabla^*(\sigma \otimes \omega) = -(\nabla_{\sigma^\sharp} \omega + \operatorname{div}(\sigma^\sharp) \cdot \omega)$  auf  $\Gamma_c(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M)$  (wobei  $\sigma^\sharp$  das duale Vektorfeld zu  $\sigma$  ist, das heißt  $\sigma(X) = g(\sigma^\sharp, X)$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ).
- $\Delta^\nabla = \nabla^* \circ \nabla$  auf  $\Omega_c^k(M)$ .

(4)  $\Delta^\nabla : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)$  ist formal-selbstadjungiert bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ , das heißt:

$$\langle \Delta^\nabla \omega, \eta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \Delta^\nabla \omega, \eta \rangle_x dM = \int_M \langle \omega, \Delta^\nabla \eta \rangle dM = \langle \omega, \Delta^\nabla \eta \rangle_{L^2}.$$

*Beweis.* (1) Sei also  $(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale ONB und  $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$  die duale Basis. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^\nabla \omega &= - \operatorname{Tr}_g(\hat{\nabla} \nabla \omega) \\ &= - \operatorname{Tr}_g \left( \hat{\nabla} \left( \sum_{i=1}^n \sigma^i \otimes \nabla_{e_i} \omega \right) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \operatorname{Tr}_g(\nabla \sigma^i \otimes \nabla_{e_i} \omega + \sigma^i \otimes \nabla(\nabla_{e_i} \omega)) \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \operatorname{Tr}_g(\sigma^j \otimes \nabla_{e_j} \sigma^i \otimes \nabla_{e_i} \omega + \sigma^i \otimes \sigma^j \otimes \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \omega) \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^n \epsilon_k \underbrace{[\sigma^j(e_k)]}_{\delta_{jk}} \cdot (\nabla_{e_j} \sigma^i)(e_k) \cdot \nabla_{e_i} \omega + \underbrace{\sigma^i(e_k)}_{\delta_{ik}} \underbrace{\sigma^j(e_k)}_{\delta_{jk}} \cdot \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \omega \\ &= - \sum_{i,k=1}^n \epsilon_k [(\nabla_{e_k} \sigma^i)(e_k) \cdot \nabla_{e_i} \omega] - \sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot \nabla_{e_k} \nabla_{e_k} \omega = (*) \end{aligned}$$

Hierbei können wir den ersten Summanden vereinfachen. Zunächst gilt

$$(\nabla_{e_k} \sigma^i)(e_k) = e_k \underbrace{(\sigma^i(e_k))}_{\delta_{ik}} - \sigma^i(\nabla_{e_k} e_k) = -\sigma^i(\nabla_{e_k} e_k)$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot (\nabla_{e_k} \sigma^i)(e_k) &= - \sum_{k=1}^n \epsilon_k \sigma^i(\nabla_{e_k} e_k) \\ &= - \sum_{k=1}^n \epsilon_k \epsilon_i g(\nabla_{e_k} e_k, e_i) \\ &= - \sum_{k=1}^n \epsilon_k \epsilon_i \cdot \underbrace{e_k(g(e_k, e_i))}_{=0} - g(e_k, \nabla_{e_k} e_i) \quad (\text{weil } \nabla^g \text{ metrisch}) \\ &= \epsilon_i \cdot \sum_{k=1}^n \epsilon_k \cdot g(e_k, \nabla_{e_k} e_i) \\ &= \epsilon_i \cdot \operatorname{div}(e_i) \end{aligned}$$

womit sich schließlich für (\*) ergibt:

$$(*) = - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot \operatorname{div}(e_i) \nabla_{e_i} \omega - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega$$

(2) Für  $\Delta^\nabla(f\omega)$  haben wir:

$$\begin{aligned} \Delta^\nabla(f\omega) &= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} (f\omega) + \operatorname{div}(e_i) \cdot \nabla_{e_i} (f\omega)) \\ &= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i [\nabla_{e_i} (e_i(f)\omega + f \cdot \nabla_{e_i} \omega) + \operatorname{div}(e_i) \cdot (e_i(f)\omega + f \nabla_{e_i} \omega)] \\ &= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i [e_i(e_i(f)\omega) + e_i(f) \cdot \nabla_{e_i} \omega + e_i(f) \nabla_{e_i} \omega + f \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega \\ &\quad + \operatorname{div}(e_i) e_i(f)\omega + f \operatorname{div}(e_i) \nabla_{e_i} \omega] \\ &= \Delta(f) \cdot \omega + f \cdot \Delta^\nabla \omega - 2 \cdot \nabla_{\sum_{i=1}^n \epsilon_i \cdot e_i(f) \cdot e_i} \omega \\ &= \Delta(f) \cdot \omega + f \cdot \Delta^\nabla \omega - 2 \cdot \nabla_{\operatorname{grad} f} \omega \end{aligned}$$

(3) Sei also  $(M, g)$  orientiert und  $dM$  die Volumenform von  $(M, g, \mathcal{O}_M)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \omega, \sigma \otimes \eta \rangle_{L^2} &= \int_M \langle \nabla \omega, \sigma \otimes \eta \rangle_x dM \\
&= \int_M \sum_{i=1}^n \langle \sigma^i \otimes \nabla_{e_i} \omega, \sigma \otimes \eta \rangle dm \\
&= \int_M \sum_{i=1}^n \langle \sigma^i, \sigma \rangle \cdot \langle \nabla_{e_i} \omega, \eta \rangle dM \quad , \text{ wobei } \sigma = \sum_{k=1}^n \sigma(e_k) \cdot \sigma^k \\
&= \int_M \sum_{i,k=1}^n \epsilon_k \delta_{ik} \cdot \sigma(e_k) \cdot \langle \nabla_{e_i} \omega, \eta \rangle dM \\
&= \int_M \langle \nabla_{\sum_{i=1}^n \epsilon_i \sigma(e_i) e_i} \omega, \eta \rangle dM \\
&= \int_M \langle \nabla_{\sigma^\#}, \eta \rangle dM \\
&= \int_M \left( \sigma^\#(\langle \omega, \eta \rangle) - \langle \omega, \nabla_{\sigma^\#} \eta \rangle \right) dM \quad (\text{weil } \nabla \text{ metrisch}) \\
&= \int_M \underbrace{\text{div}(\langle \omega, \eta \rangle \cdot \sigma^\#)}_{=0 \text{ nach Satz v. Stokes}} - \langle \omega, \eta \rangle \cdot \text{div}(\sigma^\#) - \langle \omega, \nabla_{\sigma^\#} \eta \rangle dM \quad (\text{Produktregel für div}) \\
&= \int_M \langle \omega, -\nabla_{\sigma^\#} \eta - \text{div}(\sigma^\#) \eta \rangle dM \\
&= \langle \omega, \underbrace{-\nabla_{\sigma^\#} \eta - \text{div}(\sigma^\#) \cdot \eta}_{=\nabla^*(\sigma \otimes \eta)} \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

Und damit gilt auch

$$\begin{aligned}
\nabla^* \nabla \omega &= \nabla^* \left( \sum_{i=1}^n \sigma^i \otimes \nabla_{e_i} \omega \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla^* \left( \sigma^i \otimes \underbrace{\nabla_{e_i} \omega}_\eta \right) \\
&= - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega + \text{div}(e_i) \cdot \nabla_{e_i} \omega) \\
&= \Delta^\nabla \omega.
\end{aligned}$$

(4) Damit gilt auf  $\Omega^k(M)$ :

$$\begin{aligned}
\langle \Delta^\nabla \omega, \eta \rangle_{L^2} &= \langle \nabla^* \nabla \omega, \eta \rangle_{L^2} \\
&= \langle \nabla \omega, \nabla \eta \rangle_{L^2} \\
&= \langle \omega, \nabla^* \nabla \eta \rangle_{L^2} \\
&= \langle \omega, \Delta^\nabla \eta \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

□

### 5.3 Die Weitzenböck-Formel (Bochner-Formel) für den Hodge-Laplace-Operator

**Satz 5.12.** (Weitzenböck-Formel) Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\Delta_k$  und  $\Delta^\nabla$  der Hodge-Laplace-Operator beziehungsweise der Bochner-Laplace-Operator auf  $\Omega^k(M)$ . Dann gilt:

$$\Delta_k = \Delta^\nabla + \mathcal{K}_k,$$

wobei  $\mathcal{K}_k$  ein Homomorphismus (d.h. eine  $C^\infty$ -lineare Abbildung) auf  $\Omega^k(M)$  ist mit

$$\mathcal{K}_k \omega = \sum_{i < j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \mathcal{R}^\nabla(e_i, e_j) \omega.$$

Hierbei bezeichnet  $\sigma^i \cdot \sigma^j$  die Clifford-Multiplikation und

$$\mathcal{R}(X, Y) \omega = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) \omega.$$

Und mit  $R_{ij\mu\nu} = \mathcal{R}(e_i, e_j, e_\mu, e_\nu)$  ist

$$\mathcal{K}_k \omega = \sum_{i, j, \mu, \nu}^n R_{ij\mu\nu} \cdot \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\# \lrcorner \sigma^\mu \wedge (\sigma^\nu)^\# \lrcorner \omega,$$

wobei die rechte Seite der Gleichung von rechts nach links zu lesen ist. (Der Übersichtlichkeit halber wurden die Klammern weggelassen)

*Beweis.* Sei  $x \in M$  und  $(e_1, \dots, e_n)$  eine  $x$ -synchroner lokale ONB um  $x$ . D.h. in  $x \in M$  gilt für alle  $X \in \mathfrak{X}(U)$ :

$$\begin{aligned} (\nabla_X e_i)(x) &= 0, \\ (\nabla_X \sigma^i)(x) &= 0, \\ [e_i, e_j](x) &= 0, \\ \operatorname{div}(e_i)(x) &= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt im Punkt  $x \in M$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta_k \omega &\stackrel{\text{Satz 5.9}}{=} (c \circ \nabla)^2 \omega \\
 &= \sum_{i,j=1}^n (\sigma^i \cdot \nabla_{e_i})(\sigma^j \cdot \nabla_{e_j} \omega) \\
 &\stackrel{\text{Satz 5.9}}{=} \sum_{i,j=1}^n \sigma^i \cdot \underbrace{(\nabla_{e_i} \sigma^j \cdot \nabla_{e_j} \omega + \sigma^j \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega)}_{=0} \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega \\
 &= \sum_{i < j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega + \sum_{i > j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega + \sum_{i=1}^n \sigma^i \cdot \sigma^i \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega \\
 &= \sum_{i < j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i}) \omega + \sum_{i=1}^n \sigma^i \cdot \sigma^i \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega,
 \end{aligned}$$

Wobei im letzten Schritt eine Indexumbenennung vorgenommen, nachdem Satz 5.9 angewendet wurde, also  $\sigma^i \cdot \sigma^j + \sigma^j \cdot \sigma^i = -2\langle \sigma^i, \sigma^j \rangle = -2\delta_{ij}$ , d.h.  $\sigma^i \cdot \sigma^j = -\sigma^j \cdot \sigma^i$  für  $j \neq i$ . Wiederum mit Satz 5.9, auf den letzten Summanden angewandt, erhalten wir die Behauptung:

$$\begin{aligned}
 \Delta_k \omega &= \sum_{i < j} \sigma^i \cdot \sigma^j (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \underbrace{\nabla_{[e_i, e_j]}}_{=0 \text{ in } x})(\omega) - \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega + \underbrace{\text{div}(e_i)}_{=0 \text{ in } x} \cdot \nabla_{e_i} \omega) \\
 &= \sum_{i < j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \mathcal{R}^\nabla(e_i, e_j) \omega + \Delta^\nabla \omega \\
 &= \Delta^\nabla \omega + \mathcal{K}_k \omega.
 \end{aligned}$$

Es bleibt nun noch, die Darstellung

$$\mathcal{K}_k \omega = \sum_{i,j,\mu,\nu}^n R_{ij\mu\nu} \cdot \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\# \lrcorner \sigma^\mu \wedge (\sigma^\nu)^\# \lrcorner \omega,$$

zu zeigen.

$$\begin{aligned}
& \sum_{i < j} \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i, j=1}^n \sigma^i \cdot \sigma^j \cdot \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i, j=1}^n (\sigma^i \wedge -(\sigma^i)^\# \lrcorner) \cdot (\sigma^j \wedge -(\sigma^j)^\# \lrcorner) \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i, j=1}^n \underbrace{\sigma^i \wedge \sigma^j \wedge \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega}_{=0, \text{ da } k+2\text{-Form}} + \underbrace{((\sigma^i)^\# \lrcorner (\sigma^j)^\# \lrcorner) \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega}_{=0, \text{ da } k-2\text{-Form}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\# \lrcorner \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n (\sigma^i)^\# \lrcorner \sigma^j \wedge \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\# \lrcorner \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n \left( \underbrace{\sigma^j ((\sigma^i)^\# \lrcorner) \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega}_{=\delta_{ij}} - \underbrace{\sigma^j \wedge (\sigma^i)^\# \lrcorner \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega}_{=0 \text{ f\"ur } i=j} \right) \\
&= -\sum_{i, j=1}^n \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\# \lrcorner \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega, \tag{*}
\end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichheit einsieht, wenn man die Indizes in der zweiten Summe vertauscht.

Behauptung:  $\mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \omega = -\sum_{\mu, \nu} \mathcal{R}_{ij\mu\nu} \sigma^\mu \wedge (\sigma^\nu)^\# \lrcorner \omega$

Beweis der Behauptung: Es genügt, dies für  $\omega = \sigma^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{\alpha_k}$  zu beweisen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) (\sigma^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \sigma^{\alpha_k}) &= \sum_{\nu=1}^k \sigma^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \sigma^{\alpha_\nu} \wedge \dots \wedge \sigma^{\alpha_k} \\
\mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) \sigma^\nu (s_\mu) &= -\sigma^\nu \underbrace{(\mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j) s_\mu)}_{\sum_l \mathcal{R}_{ij\mu l} \epsilon_l s_l} = -\mathcal{R}_{ij\mu\nu} \cdot \epsilon_\nu
\end{aligned}$$

Und beides zusammen ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_j)\omega &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \epsilon_{\alpha_\nu} \cdot \mathcal{R}_{ij\alpha_\nu\mu} \underbrace{\sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_{\nu-1}} \wedge \sigma^\mu \wedge \sigma^{\alpha_{\nu+1}} \wedge \cdots \wedge \sigma^{\alpha_k}}_{=\epsilon_{\alpha_\nu} \cdot \sigma^\mu \wedge (\sigma^{\alpha_\nu})^\# \lrcorner \omega} \\
 &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \mathcal{R}_{ij\alpha_\nu\mu} \sigma^\mu \wedge (\sigma^{\alpha_\nu})^\# \lrcorner \omega \\
 &= \sum_{\mu,\nu=1}^n \mathcal{R}_{ij\nu\mu} \sigma^\mu \wedge (\sigma^{\alpha_\nu})^\# \lrcorner \omega.
 \end{aligned}$$

Das zeigt die Zwischenbehauptung. Und Einsetzen in (\*) liefert die Behauptung aus dem Satz.  $\square$

**Korollar 5.13.** (Weitzenböck-Formel für 0- und 1-Formen)

(1)  $\Delta_0 = \Delta^\nabla$ , das heißt  $\mathcal{K}_0 = 0$ .

(2)  $\Delta_1 = \Delta^\nabla + \text{Ric}$ , das heißt  $\mathcal{K}_1 = \text{Ric}$ . Dabei ist

$$\text{Ric} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definiert durch  $g(\text{Ric}(X), Y) = \text{Ric}(X, Y)$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Und

$$\text{Ric} : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

definiert durch  $\text{Ric}(\omega)(X) := \omega(\text{Ric}(X))$  für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Beweis.* (1) Klar.

(2)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1\omega &= \sum_{i,j,\mu,\nu} \mathcal{R}_{ij\mu\nu} \sigma^i \wedge (\sigma^j)^\# \lrcorner \sigma^\mu \wedge \underbrace{(\sigma^\nu)^\# \lrcorner \omega}_{\omega(\sigma^\nu)^\#} \\
 &= \sum_{i,j,\mu,\nu} \mathcal{R}_{ij\mu\nu} \sigma^i \wedge \underbrace{(\sigma^j)^\# \lrcorner \sigma^\mu}_{\epsilon_j \cdot \delta_{\mu j}} \cdot \underbrace{\omega((\sigma^\nu)^\#)}_{=s_\nu \cdot \epsilon_\nu} \\
 &= \sum_{i,j,\nu} \epsilon_\nu \cdot \omega(s_\nu) \cdot \epsilon_j \cdot \mathcal{R}(s_i, s_j, s_j, s_\nu) \cdot \sigma^i \\
 &= \sum_{i,\nu} \epsilon_\nu \cdot \omega(s_\nu) \cdot \text{Ric}(s_i, s_\nu) \sigma^i \\
 &= \sum_i \text{Ric} \left( s_i, \underbrace{\sum_\nu \epsilon_\nu \cdot \omega(s_\nu) s_\nu}_{\omega^\#} \right) \sigma^i \\
 &= \sum_i g(\text{Ric}(\omega^\#), s_i) \sigma^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\text{Ric}(\omega^\sharp))^b \\ &= \text{Ric}(\omega) \end{aligned}$$

□

Als nächstes möchten wir zeigen, dass auf orientierten Mannigfaltigkeiten  $M$  ohne Rand gilt:

$$\{\omega \in \Omega^k(M) \mid \Delta_k \omega = 0\} \simeq H_{dR}^k(M, \mathbb{R}),$$

wobei  $H_{dR}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} / \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \sigma \in \Omega^{k-1}(M) \ d\sigma = \omega\}$  die  $k$ -te De-Rham-Kohomologie ist.

Dazu betrachten wir zunächst die Gårdingsche Ungleichung als Anwendung der Weitzenböck-Formel.

Sei  $(M, g)$  eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und sei  $\Omega^k(M)$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$  versehen. Dann heißt

$$\|\omega\|_j^2 := \sum_{l=1}^j \|\nabla^l \omega\|_{L^2(T^*M^l \otimes \Lambda^k T^*M)}^2,$$

die  $j$ -te Sobolev-Norm von  $\omega$ ,  $j \geq 0$ , wobei  $\nabla^l \omega := \underbrace{\nabla \dots \nabla}_{l\text{-mal}} \omega$ .

Die Vervollständigung  $H^j(\Lambda^k T^*M)$  von  $(\Omega^k(M), \|\cdot\|_j)$  heißt  $j$ -ter Sobolev-Raum.

Dann gilt:

- Für alle  $i \leq j$  gilt  $\|\omega\|_i \leq \|\omega\|_j$ , das heißt

$$\rightarrow H^j(\Lambda^k(T^*M)) \xrightarrow{i} H^{j-1}(\Lambda^k(T^*M)) \xrightarrow{i} H^{j-2}(\Lambda^k(T^*M)) \xrightarrow{i} \dots \xrightarrow{i} H^0(\Lambda^k(T^*M))$$

ist eine Folge stetiger Einbettungen.

- Es gilt sogar mehr. Satz von Rellich:

Die Einbettung  $H^j(\Lambda^k(T^*M)) \xrightarrow{i} H^i(\Lambda^k(T^*M))$  für  $i \leq j$  ist vollständig (kompakt), das heißt das Bild beschränkter Mengen ist relativ kompakt.

**Lemma 5.14.** Sei  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  eine endliche Überdeckung von  $M$  durch Normalenumgebungen mit der Zerlegung der 1  $\{\varphi_\alpha\}$ . Für  $\omega \in \Omega^k(M)$  bezeichne  $\omega_\alpha = \varphi_\alpha \omega$ . (Das heißt  $\text{supp } \omega_\alpha$  ist kompakt und liegt in  $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ ) Bezeichne

$$\|\omega\|_j := \sum_{\alpha \in I} \|\omega_\alpha\|_j.$$

(Das ist wieder eine Norm) Dann sind  $\|\cdot\|_j$  und  $\|\omega\|_j$  auf  $\Omega^k(M)$  äquivalent.

*Beweis.* Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Im Folgenden werden wir die Aussage für 1-Formen verwenden.

**Satz 5.15.** (*Gårdingsche Ungleichung*) Sei  $(M, g)$  eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt für alle  $k$ -Formen  $\omega \in \Omega^k(M)$ :

$$\|\omega\|_2 \leq \text{const} \cdot (\|\omega\|_0 + \|\Delta_k \omega\|_0).$$

*Beweis.* Schritt 1:  $\|\omega\|_1 \leq \text{const} \cdot (\|\omega\|_0 + \|(d + \delta)\omega\|_0)$

Durch Anwendung der Weitzenböck-Formel erhalten wir:

$$\int_M \langle \Delta_k \omega, \omega \rangle dM = \int_M \langle \nabla^* \nabla \omega, \omega \rangle + \langle \mathcal{K}_k \omega, \omega \rangle dM$$

Und für den rechten Term gilt

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{K}_k \omega, \omega \rangle| &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \|\mathcal{K}_k \omega\|_x \cdot \|\omega\|_x \\ &\leq \|\mathcal{K}_k\| \cdot \|\omega\|^2 \\ &\leq C \cdot \|\omega\|_x^2, \end{aligned}$$

wobei  $\leq \|\mathcal{K}_k\|$  wegen Kompaktheit von  $M$  existiert. Also gilt:

$$\int_M \langle \Delta_k \omega, \omega \rangle dM \leq \int_M \langle \nabla \omega, \nabla \omega \rangle dM - C \cdot \int_M \|\omega\|^2 dM.$$

Damit also

$$\|(d + \delta)\omega\|_0^2 = \int_M \langle \underbrace{(d + \delta)^2 \omega, \omega}_{=\Delta_k} \rangle dM \geq \|\nabla \omega\|_0^2 - C \cdot \|\omega\|_0^2$$

beziehungsweise

$$\|\nabla \omega\|_0^2 \leq C \cdot \|\omega\|_0^2 + \|(d + \delta)\omega\|_0^2.$$

Damit erhalten wir schließlich für  $\|\omega\|_1$ :

$$\begin{aligned} \|\omega\|_1^2 &= \|\nabla \omega\|_0^2 + \|\omega\|_0^2 \\ &= \text{const} \cdot (\|\omega\|_0^2 + \|(d + \delta)\omega\|_0^2) \\ &= \text{const}(\|\omega\|_0 + \|(d + \delta)\omega\|_0)^2. \end{aligned}$$

Und damit folgt die Behauptung.

Schritt 2:  $\|\omega\|_2 \leq \text{const} \cdot (\|\omega\|_1 + \|(d + \delta)\omega\|_1)$

1. Fall: Sei  $U \subset M$  eine Normalenumgebung,  $V \subset U$  mit  $\text{cl}(V) \subset U$  kompakt. Sei  $\omega \in \Omega^k(M)$  mit  $\text{supp } \omega \subset \text{cl}(V) \subset U$ . Dann:

$$\begin{aligned}
\|\nabla\nabla\omega\|_0^2 &= \sum_{i,l} \int_U \left\| \underbrace{(\nabla\nabla\omega)(s_i, s_l, \dots)}_{\nabla_{s_i}((\nabla\omega)(s_l)) - \nabla_{\nabla_{s_i}s_l}\omega} \right\|_x^2 dM \\
&\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} 2n \left( \sum_{i,l} \|\nabla_{s_i}\nabla_{s_l}\omega\|_0^2 + \underbrace{\sum_r |g(\nabla_{s_i}s_l, s_r)|^2}_{\leq \text{const auf cl } V, \text{ da cl } V \text{ komp.}} \cdot \|\nabla_{s_r}\omega\|_0^2 \right) \\
&\leq \text{const} \cdot \left( \int_U \sum_l \|\nabla\nabla_{s_l}\omega\|_x^2 + \sum_r \|\nabla_{s_r}\omega\|_x^2 \right) dM \\
&= \text{const} \cdot \left( \sum_l \underbrace{\|\nabla_{s_l}\omega\|_1^2}_{\text{Schritt 1}} + \|\nabla\omega\|_0^2 \right) \\
&= \text{const} \cdot \left( \|\omega\|_1 + \sum_l \|(d + \delta)\nabla_{s_l}\omega\|_0^2 \right),
\end{aligned}$$

wobei wir den Faktor  $2n$  wegen  $(a + b)^2 \leq a^2 + b^2$  erhalten.

Behauptung:

$$\|(d + \delta)\nabla_{s_l}\omega\|_0^2 \leq \text{const} \cdot (\|\nabla_{s_k}(d + \delta)\omega\|_0^2 + \|\omega\|_1^2)$$

Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned}
(d + \delta)\nabla_{s_l}\omega &= (c \circ \nabla)\nabla_{s_l}\omega \\
&= \sum_i \sigma^i \circ \nabla_{s_i}\nabla_{s_l}\omega \\
&= \sum_i \sigma^i \circ (\nabla_{s_l}\nabla_{s_i}\omega + \nabla_{[s_i, s_l]}\omega + \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_k)\omega) \\
&= \sum_i \left\{ \nabla_{s_l}(\sigma^i \circ \nabla_{s_i}\omega) - (\nabla_{s_l}\sigma^i) \circ \nabla_{s_i}\omega \right. \\
&\quad \left. + \sum_r \sigma^i \circ g([s_i, s_l], s_r) \cdot \nabla_{s_r}\omega + \sigma^i \circ \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_l)\omega \right\} \\
&= \nabla_{s_l}(d + \delta)\omega - (\nabla_{s_l}\sigma^i) \circ \nabla_{s_i}\omega \\
&\quad + \sum_{r,i} \sigma^i \circ g([s_i, s_l], s_r) \cdot \nabla_{s_r}\omega + \sum_i \sigma^i \circ \mathcal{R}^\nabla(s_i, s_l)\omega
\end{aligned}$$

Wenden wir nun auf beiden Seiten die Norm an, so erhalten wir:

$$\|(d + \delta)\nabla_{s_l}\omega\|_0^2 \leq \text{const} \cdot (\|\nabla_{s_l}(d + \delta)\omega\|_0^2 + \underbrace{\sum_r \|\nabla_{s_r}\omega\|_0^2 + \|\omega\|_0^2}_{=\|\omega\|_1^2}).$$

Wobei hier  $\sigma^i \circ$  und  $\nabla_{s_i} \sigma^i \circ$  als lineare Operatoren auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum  $\bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(V)$  durch die Operatornorm abgeschätzt wurden und für die Krümmungs- und Metrikterme die Kompaktheit von  $\text{cl}(V)$  eine Schranke liefert. Also gilt

$$\|\nabla \nabla \omega\|_0^2 \leq \text{const} \cdot \underbrace{\left( \sum_l \|\nabla_{s_l} (d + \delta)\omega\|_0^2 \right)}_{= \|\nabla(d+\delta)\omega\|_0^2} + \|\omega\|_1^2.$$

Wobei wir hier benutzt haben, dass  $c$  injektiv auf  $T^*M \oplus \Omega^k(M)$  ist. Damit folgt die Behauptung:

$$\|\omega\|_2^2 = \|\nabla \nabla \omega\|_0^2 + \underbrace{\|\nabla \omega\|_0^2 + \|\omega\|_0^2}_{= \|\omega\|_1^2} \leq \text{const} \cdot (\|\omega\|_1^2 + \|(d + \delta)\omega\|_1^2)$$

2. Fall: Sei  $\omega$  beliebig.

Dann nehme eine Überdeckung von  $M$  durch Normalenumgebungen  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$  mit Zerlegung der 1  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Dann gilt

$$\omega = \sum_{\alpha \in I} \underbrace{\varphi_\alpha \cdot \omega}_{=: \omega_\alpha}.$$

Wende den ersten Fall auf die  $\omega_\alpha$  an und benutze die Äquivalenz von  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_1$ .

Schritt 3: Behauptung:  $\|\omega\|_2 \leq \text{const} \cdot (\|\omega\|_0 + \|\Delta_k \omega\|_0)$

$$\begin{aligned} \|\omega\|_2 &\stackrel{\text{Schritt 2}}{\leq} \text{const} \cdot (\|\omega\|_1 + \|(d + \delta)\omega\|_1) \\ &\stackrel{\text{Schritt 1}}{\leq} \text{const} \cdot (\|\omega\|_0 + \|(d + \delta)\omega\| + \|(d + \delta)^2\omega\|_0) \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} \|(d + \delta)\omega\|_0^2 &= \langle (d + \delta)\omega, (d + \delta)\omega \rangle_{L^2} \\ &= \langle (d + \delta)^2\omega, \omega \rangle \\ &\stackrel{\text{CSU}}{\leq} \underbrace{\|(d + \delta)^2\omega\|_0}_{= \Delta_k} \cdot \|\omega\|_0 \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot (\|\Delta_k \omega\|_0 + \|\omega\|_0)^2 \end{aligned}$$

und das zeigt die Behauptung. □

## 5.4 Fakten über elliptische Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt sei stets  $E$  ein  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorbündel über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine positiv-definite Bündelmetrik.

**Definition.**

- Ein Differentialoperator von Grad  $\leq k$  auf  $E$  ist ein linearer Operator  $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ , so dass zu jedem  $x \in U$  eine Karte  $(U, \varphi(x_1, \dots, x_n))$  und eine lokale Trivialisierung

$$\phi : E|_U \xrightarrow{\sim} U \times V$$

existieren, sodass  $D$  lokal folgende Form hat:

$$\phi \circ D \circ \phi^{-1} = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \quad (*)$$

mit  $a_\alpha \in C^\infty(U, \mathbb{R}^{m \times m})$ ,  $m = \dim V$ .

- Man sagt, dass  $D$  den Grad  $k$  hat, wenn er vom Grad  $\leq k$ , aber nicht vom Grad  $\leq k - 1$  ist.
- Das Hauptsymbol eines Differentialoperators von Grad  $k$  ist für jedes  $x \in M$ ,  $\xi \in T_x^*M$  eine lineare Abbildung

$$\sigma(D)_\xi : E_x \rightarrow E_x$$

definiert durch  $\sigma(D)_\xi(e) = \frac{1}{k!} \cdot D(f^k \cdot s)(x)$ , wobei  $f \in C^\infty(M)$ ,  $f(x) = 0$ ,  $df_x = \xi$  und  $s \in \Gamma(E)$ ,  $s(x) = e$ .

**Lemma 5.16.** Sei  $D$  ein Differentialoperator vom Grad  $k$  mit der lokalen Form  $(*)$  um  $x$ . Dann gilt für sein Hauptsymbol:

$$\phi \sigma(D)_\xi \phi^{-1} = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha,$$

wobei  $\xi = \sum \xi^i dx_i$ .

**Beispiel:**

$$M = \mathbb{R}^n, D = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1}, E = \mathbb{R}^n \times V.$$

Dann ist

$$D(f^2 \cdot s) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( 2 \cdot f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot s + f^2 \cdot \frac{\partial s}{\partial x_2} \right) + 2 \cdot f \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot s + f^2 \cdot \frac{\partial s}{\partial x_1}$$

$$\stackrel{f(x)=0}{=} 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot s$$

Also

$$\frac{1}{2!} D(f^2 \cdot s) = \xi \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \xi \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \cdot s(x)$$

**Satz 5.17.** *Es gilt:*

$$\begin{aligned}\sigma(D + \hat{D}) &= \sigma(D) + \sigma(\hat{D}) \\ \sigma(D \circ \hat{D}) &= \sigma(D) \circ \sigma(\hat{D})\end{aligned}$$

**Beispiel:**

- $\sigma(\nabla_X)_\xi = \xi(X)$ .
- $\sigma(d + \delta)_\xi = c(\xi)$
- $\sigma(\Delta_k) = \sigma(\Delta^\nabla) = -g(\xi^\sharp, \xi^\sharp) \text{id}$

**Definition.**

- Ein Differentialoperator  $D$  heißt elliptisch, wenn  $\forall x \in M, \forall \xi \in T_x^*M \setminus \{0\}$  die Abbildung  $\sigma(D)_\xi : E_x \rightarrow E_x$  ein Isomorphismus ist.
- Ein Differentialoperator zweiter Ordnung heißt vom Laplace-Typ, wenn  $\sigma(D)_\xi = -g(\xi^\sharp, \xi^\sharp) \text{id}$  ist.

**Bemerkung:** Jeder Operator von Laplace-Typ ist elliptisch.

$L^2$ -Räume:

Sei  $\Gamma_0(E) := \{s \in \Gamma(E) \mid \text{supp}(s) \subset M \text{ kompakt}\}$ . Auf  $\Gamma_0(E)$  haben wir das  $L^2$ -Skalarprodukt:

$$(s, t)_{L^2} = \int_M \langle s(x), t(x) \rangle dM.$$

$L^2(E) :=$  Vervollständigung von  $(\Gamma_0(E), (\cdot, \cdot)_{L^2})$  ist ein Hilbert-Raum.

Dann ist ein Differentialoperator  $D : \Gamma_0(E) \subset L^2(E) \rightarrow L^2(E)$  ein unbeschränkter Operator. Das heißt, er lässt sich nicht stetig auf  $L^2$  fortsetzen.

Das Spektrum eines elliptischen Operators:

Sei  $P : \Gamma_0(E) \subset L^2(E) \rightarrow L^2(E)$  ein linearer Operator.

**Definition.** Im Folgenden sei

$$\begin{aligned}\varrho(P) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid P_\lambda := P - \lambda \cdot \text{id} \text{ ist injektiv, } \text{IM}(P_\lambda) \subset L^2(E) \text{ ist dicht und} \\ \text{man kann } P_\lambda^{-1} : \mathfrak{D}(P_\lambda) \rightarrow L^2(E) \text{ zu einem stetigen Operator auf } L^2(E) \\ \text{fortsetzen} \}\end{aligned}$$

und  $\text{spec}(P) := \mathbb{C} \setminus \varrho(P)$ .

**Bemerkung:** Für einen linearen Operator  $L : V \rightarrow V$  auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  gilt

$$\text{spec}(L) = \text{EW}(L) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid L_\lambda \text{ nicht injektiv} \}.$$

Das gilt aber im Allgemeinen nicht.

**Definition.** Ein linearer Operator  $P : \Gamma_0(E) \rightarrow \Gamma_0(E)$  heißt formal selbstadjungiert, falls  $\forall s, t \in \Gamma_c(E)$  gilt:

$$(Ps, t)_{L^2} = (s, Pt)_{L^2}.$$

**Satz 5.18.** Sei  $(M, g)$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Sei  $E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit positiv definiter Bündelmetrik und  $D : \Gamma_0(E) \subset L^2(E) \rightarrow L^2(E)$  ein formal-selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator. Dann gilt:

- (1)  $\text{spec}(D) = EW(D)$
- (2)  $\text{spec}(D) \subset \mathbb{R}$  ist diskret und es gilt sogar

$$\text{spec}(D) = \{0 \leq |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots \rightarrow \infty\}$$

- (3) Die Eigenräume sind endlich-dimensional und bestehen aus glatten Schnitten und es existiert ein vollständiges ON-System  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  aus Eigenschnitten, das heißt

$$\text{cl}(\text{span}\{s_j\}) = L^2(E).$$

Regularität elliptischer Differentialoperatoren:

**Definition.** Eine Distribution auf  $E$  ist eine lineare, stetige Abbildung  $L : \Gamma_0(E) \rightarrow \mathbb{R}$ , das heißt  $\exists c > 0$  mit  $\|Ls\| \leq c \cdot \|s\|$ .

Die Menge aller Distributionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}'(E)$ .

**Bemerkung:** Sei  $s \in \Gamma(E)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} L_s : \Gamma_0(E) &\rightarrow \mathbb{R} \\ L_s(t) &:= (t, s)_{L^2} \end{aligned}$$

eine Distribution.

**Definition.** Eine Distribution von diesem Typ heißt glatte Distribution.

Sei nun  $D := \Gamma_0(E) \rightarrow \Gamma_0(E)$  ein Differentialoperator. Dann kann man  $D$  fortsetzen zu

$$D' : \mathcal{D}'(E) \rightarrow \mathcal{D}'(E)$$

vermittels  $(D'L)(s) := L(D^*s)$ , wobei  $D^*$  der zu  $D$  formal adjungierte Operator ist, das heißt

$$(Ds, t)_{L^2} = (s, D^*t)_{L^2} \forall s, t \in \Gamma_0(E).$$

**Bemerkung:** Ist  $L = L_s$  glatt, dann gilt:

$$\begin{aligned} (D'L_s)(t) &= L_s(D^*t) \\ &= (D^*t, s)_{L^2} \\ &= (t, Ds)_{L^2} \\ &= L_{Ds}(t), \end{aligned}$$

das heißt  $D'L_s = L_{D_s}$ .

**Definition.** Eine Distribution heißt *schwache Lösung* von

$$Ds = s_0, \quad (\text{DG})$$

wenn gilt:  $DL = L_{s_0}$ .

**Bemerkung:** Ist  $L = L_s$ , so gilt:

$$L \text{ schwache Lösung von (DG)} \Leftrightarrow s \text{ ist Lösung von (DG)}.$$

**Satz 5.19.** (*Regularitätssatz*) Sei  $D : \Gamma_0(E) \rightarrow \Gamma_0(E)$  ein elliptischer Differentialoperator und  $s_0 \in \Gamma_0(E)$  und sei weiter  $L$  eine schwache Lösung von (DG), so ist  $L$  eine glatte Distribution.

## 5.5 Satz von Hodge und Anwendungen

**Definition.** Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnung

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \Delta_k \omega = 0\} = \text{Ker } \Delta_k$$

und  $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$  heißt harmonische Form.

Sei  $M^n$  eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass in jeder Kohomologieklass  $c \in H_{DR}^k(M; \mathbb{R})$  genau eine harmonische  $k$ -Form existiert, d.h., dass  $H_{DR}^k(M; \mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^k(M)$  gilt.

**Satz 5.20** (Theorem von Hodge). *Es sei  $(M^n, g)$  eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $0 \leq k \leq n$ . Dann gilt:*

- 1) Für den Raum  $\mathcal{H}^k(M)$  der harmonischen  $k$ -Formen gilt  $\dim \mathcal{H}^k(M) < \infty$ .
- 2) Der Raum  $\Omega^k(M)$  der  $k$ -Formen zerlegt sich in folgende bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$  orthogonale Summe:

$$\begin{aligned} \Omega^k(M) &= \mathcal{H}^k(M) \oplus \Delta_k \left( \Omega^k(M) \right) \\ &= \mathcal{H}^k(M) \oplus d \left( \Omega^{k-1}(M) \right) \oplus \delta \left( \Omega^{k+1}(M) \right). \end{aligned}$$

Insbesondere hat die Differentialgleichung

$$\Delta_k \omega = \alpha, \quad \alpha \in \Omega^k(M) \text{ gegeben,}$$

genau dann eine  $C^\infty$ -Lösung, wenn  $\alpha \perp \mathcal{H}^k(M)$  ist.

*Beweis.* 1) Da  $\Delta_k$  auf *Riemannschen* Mannigfaltigkeiten elliptisch ist und  $M$  geschlossen ist, folgt sofort, dass  $\mathcal{H}^k(M)$  endlich-dimensional ist. (Spektraltheorie elliptischer Operatoren auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten)

2) Beh.: Es gilt  $Im d \perp Im \delta \perp Ker \Delta_k$ :

Wegen  $d^* = \delta$  gilt

$$\langle d\omega, \delta\sigma \rangle = \langle dd\omega, \sigma \rangle = 0,$$

womit  $Im d \perp Im \delta$  bewiesen ist.

Sei nun  $\sigma \in Ker \Delta_k$ , d.h., es gelte  $\Delta_k \sigma = 0$ . Dann gilt

$$0 = \langle \Delta_k \sigma, \sigma \rangle = \langle (d\delta + \delta d)\sigma, \sigma \rangle = \|d\sigma\|^2 + \|\delta\sigma\|^2$$

und damit  $d\sigma = \delta\sigma = 0$ . Daraus folgt

$$\langle d\omega, \sigma \rangle = \langle \omega, \delta\sigma \rangle = 0.$$

Also gilt  $Im d \perp Ker \Delta_k$ .

Wir müssen also nur noch zeigen, dass

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \Delta_k \left( \Omega^k(M) \right)$$

gilt. Dazu betrachten wir die Zerlegung des Vektorraumes  $(\Omega^k(M), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$  in

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus_{\perp} \mathcal{H}^k(M)^{\perp}.$$

$\mathcal{H}^k(M)$  ist nach 1) ein endlichdimensionaler Vektorraum, also abgeschlossen. Damit folgt

$$\begin{aligned} L^2 \left( \Lambda^k T^* M \right) &= \mathcal{H}^k(M) \oplus (\mathcal{H}^k(M))^{\perp} \\ \Rightarrow \Omega^k(M) &= \mathcal{H}^k(M) \oplus \underbrace{(\mathcal{H}^k(M))^{\perp} \cap \Omega^k(M)}_{=: \mathcal{H}_k^{\perp}} \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen:  $\mathcal{H}_k^{\perp} = Im(\Delta_k)$ . Zunächst zeigen wir  $Im(\Delta_k) \subseteq \mathcal{H}_k^{\perp}$ :

Sei  $\omega \in ker(\Delta_k)$ ,  $\sigma \in \Omega^k(M)$ . Dann gilt:

$$0 = \langle \Delta_k \omega, \sigma \rangle_{L^2} = \langle \omega, \Delta_k \sigma \rangle_{L^2}$$

d.h.  $Im(\Delta_k) \perp ker(\Delta_k)$ .

Nun zu  $\mathcal{H}_k^{\perp} \subseteq Im(\Delta_k)$ . Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1.Schritt: Behauptung:  $\forall \omega \in \mathcal{H}_k^{\perp} : \|\omega\|_{L^2} \leq c \|\Delta_k \omega\|_{L^2}$

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann existiert eine Folge  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_k^\perp$  mit  $\|\omega_n\|_{L^2} = 1$  und  $\|\omega_n\|_{L^2} > n \|\Delta_k \omega_n\|_{L^2}$ . Das heißt

$$\Delta_k \omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{in } L^2$$

Mit der Gårdingschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\omega_n\|_2 &\leq \hat{c}(\|\Delta_k \omega_n\|_{L^2} + \|\omega_n\|_{L^2}) \\ \Rightarrow \|\omega_n\|_2 &\leq \hat{c} \end{aligned}$$

d.h.  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^2(M)$  ist beschränkt. Mit dem Satz von Rellich gilt:  $H^2 \hookrightarrow L^2$  ist eine kompakte Abbildung. Daraus folgt, dass  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2$  relativ kompakt ist d.h.  $\text{cl}(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist kompakt, also folgenkompakt. Damit existiert eine Teilfolge  $(\omega_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$  die in  $L^2(M)$  konvergiert. Also konvergiert auch  $\langle \omega_{n_j}, \eta \rangle_{L^2}$  für alle  $\eta \in L^2$ . Wir definieren eine Distribution  $L$  wie folgt:

$$L(\eta) := \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \omega_{n_j}, \eta \rangle_{L^2} \quad \forall \eta \in \Omega^k(M)$$

- $L$  ist linear
- $|L(\eta)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\langle \omega_{n_j}, \eta \rangle_{L^2}| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|\omega_{n_j}\|_{L^2} \|\eta\|_{L^2} = \|\eta\|_{L^2}$

Damit folgt  $L \in D'(\Lambda^k T^*M)$ .

Behauptung:  $L$  ist schwache Lösung von  $\Delta_k \omega = 0$ .

$$\begin{aligned} \Delta_k L(\eta) = L(\Delta_k^* \eta) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \omega_{n_j}, \Delta_k^* \eta \rangle_{L^2} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \Delta_k \omega_{n_j}, \eta \rangle_{L^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Regularitätssatz folgt, es existiert ein  $\omega \in \Omega^k(M)$ , so dass  $L = L_\omega = \langle \cdot, \omega \rangle_{L^2}$ . Also gilt für alle  $\eta \in \Omega^k(M)$ :

$$\begin{aligned} \langle \eta, \omega \rangle_{L^2} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \omega_{n_j}, \eta \rangle_{L^2} \\ &= \langle \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{n_j}, \eta \rangle_{L^2} \\ \Rightarrow \omega &= \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{n_j} \text{ weil } \Omega^k(M) \subset L^2(\Lambda^k T^*M) \text{ dicht liegt} \end{aligned}$$

Da weiter  $(\omega_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_k^\perp$  und  $\mathcal{H}_k^\perp$  abgeschlossen ist, gilt damit  $\omega = \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{n_j} \in \mathcal{H}_k^\perp$ .

Aber andererseits gilt  $\Delta_k L_\omega = 0$ , das heißt  $\Delta_k \omega = 0$  also  $\omega \in \mathcal{H}^k(M)$  und damit  $\omega = 0$  dies ist jedoch ein Widerspruch zu  $\|\omega_{n_j}\| = 1$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

2. Schritt:  $\mathcal{H}_k^\perp \subset \text{Im}(\Delta_k)$ .

Sei  $\omega \in \mathcal{H}_k^\perp$  gegeben. Wir müssen zeigen, dass ein  $\alpha \in \Omega^k(M)$  existiert mit  $\omega = \Delta_k \alpha$ . Dazu konstruieren wir zunächst eine Distributionenlösung auf einem Unterraum. Sei

$$\begin{aligned} L: \Delta_k(\Omega^k(M)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \Delta_k \alpha &\mapsto \langle \omega, \alpha \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Angenommen es existiert eine Lösung von  $\Delta_k \alpha = \omega$ . Dann würde gelten

$$\begin{aligned} (\Delta'_k L \alpha)(\beta) &= L_\alpha(\Delta_k \beta) \\ &= \langle \Delta_k \beta, \alpha \rangle_{L^2} \\ &= \langle \beta, \omega \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

- $L_\omega$  ist wohldefiniert: seien  $\alpha, \hat{\alpha}$  mit  $\Delta_k \alpha = \Delta_k \hat{\alpha}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta_k \alpha - \Delta_k \hat{\alpha} &= 0 \text{ d.h. } \alpha - \hat{\alpha} \in \mathcal{H}^k(M) \\ \Rightarrow 0 &= \langle \alpha, \omega \rangle_{L^2} - \langle \hat{\alpha}, \omega \rangle_{L^2} \text{ da } \omega \in \mathcal{H}_k^\perp \end{aligned}$$

- $L_\omega$  ist linear und es gilt:

$$\begin{aligned} |L_\omega(\Delta_k \alpha)| &= |\langle \omega, \alpha \rangle_{L^2}| \\ &= \underbrace{|\langle \omega, \text{proj}_{\mathcal{H}^k} \alpha \rangle_{L^2}|}_{=0} + |\langle \omega, \text{proj}_{\mathcal{H}_k^\perp} \alpha \rangle_{L^2}| \\ &\stackrel{CSU}{\leq} \|\omega\|_{L^2} \|\text{proj}_{\mathcal{H}_k^\perp} \alpha\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{Schritt 1}}{\leq} \|\omega\|_{L^2} \cdot c \cdot \|\Delta_k \text{proj}_{\mathcal{H}_k^\perp} \alpha\|_{L^2} \\ &= \underbrace{\|\omega\|_{L^2} \cdot c}_{=const} \|\Delta_k \alpha\|_{L^2} \end{aligned}$$

Damit ist aber  $L_\omega$  eine lineare stetige Abbildung  $L_\omega : \Delta_k(\Omega^k(M)) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir nutzen nun den Satz von Hahn-Banach: Sei  $(X, \|\cdot\|)$  normierter Vektorraum,  $X_0 \subset X$  Unterraum und  $f : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  linear und stetig. Dann existiert eine Fortsetzung von  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls linear und stetig. Also existiert in unserer Situation  $L \in D'(\Lambda^k T^*M)$ , so dass

$$L|_{\Delta_k \Omega^k} = L_\omega$$

Behauptung:  $L$  ist schwache Lösung von  $\Delta_k \alpha = \omega$ . Denn es gilt:

$$(\Delta'_k L)(\eta) = L(\Delta_k \eta) = L_\omega(\Delta_k \eta) = \langle \eta, \omega \rangle_{L^2} = L_\omega(\eta)$$

Und aus der Regularität folgt: es existiert ein  $\alpha \in \Omega^k(M)$  mit  $L = L_\alpha$  d.h.  $\Delta_k \alpha = \omega$ . □

**Bemerkung:** Wenn man im Satz von Hodge auf die genauere Zerlegung

$$\text{Im } \Delta_k = \text{Im } d \oplus \text{Im } \delta$$

verzichtet, haben wir nur Eigenschaften elliptischer Differentialoperatoren verwendet. Die Aussagen gelten also allgemein für diese.

## 5.6 Greensche Operatoren

Im Folgenden definieren wir die „Inverse“ zu  $\Delta_k$  auf  $\mathcal{H}^k(M)^\perp$ .

**Definition.** Wir definieren den Operator  $G : \Omega^k(M) \rightarrow \mathcal{H}^k(M)^\perp \subset \Omega^k(M)$  so, dass für  $\alpha \in \mathcal{H}^k(M)^\perp$ ,  $G\alpha$  die eindeutige Lösung  $\omega$  von

$$\Delta_k \omega = \alpha - \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)}(\alpha) \quad (*)$$

im Raum  $\mathcal{H}^k(M)^\perp$  ist. D.h., für  $\Delta_k : \mathcal{H}^k(M)^\perp \rightarrow \mathcal{H}^k(M)^\perp$  ist

$$G := \left( \Delta|_{\mathcal{H}^k(M)^\perp} \right)^{-1} \circ \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)^\perp}.$$

$G$  heißt *Greenscher Operator* zu  $\Delta_k$ .

**Bemerkung 5.21.**  $(*)$  ist eindeutig lösbar: Nach dem Satz von Hodge (Satz 5.20) existiert ein  $\omega \in \Omega^k(M)$  mit

$$\Delta_k \omega = \alpha - \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)^\perp}(\alpha) \in \mathcal{H}^k(M)^\perp.$$

Seien  $\omega_1, \omega_2$  zwei Lösungen von  $(*)$ . Dann ist  $\omega_1 - \omega_2 \in \mathcal{H}^k(M)$  und es gilt

$$\tilde{\omega}_i := \omega_i - \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)}(\omega_i) \in \mathcal{H}^k(M)^\perp, \quad i = 1, 2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2 &= \omega_1 - \omega_2 - \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)}(\omega_1) + \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)}(\omega_2) \\ &= (\omega_1 - \omega_2) - \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)}(\omega_1 - \omega_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.22.** Man kann Folgendes zeigen:  $G$  ist linear und beschränkt, selbstadjungiert und kompakt. ( $\rightarrow$  Funktionalanalysis)

**Satz 5.23.** Der Greensche Operator  $G$  kommutiert mit allen Operatoren, mit denen auch  $\Delta_k$  kommutiert, insbesondere mit  $d$ ,  $\delta$  und  $\Delta_k$ .

*Beweis.* Sei  $T : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$  ein linearer Operator und es gelte  $T\Delta_k = \Delta_k T$ . Nach Definition ist

$$G := \left( \Delta|_{\mathcal{H}^k(M)^\perp} \right)^{-1} \circ \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)^\perp}.$$

Aus

$$\begin{aligned} T\Delta_k &= \Delta_k T \\ \Delta_k \left( \Omega^k(M) \right) &= \mathcal{H}^k(M)^\perp \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} T \left( \mathcal{H}^k(M) \right) &\subset \mathcal{H}^k(M), \\ T \left( \mathcal{H}^k(M)^\perp \right) &\subset \text{Im } \Delta_k = \mathcal{H}^k(M)^\perp. \end{aligned}$$

Also kommutiert  $T$  mit  $\text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)^\perp}$  und  $\Delta_{\mathcal{H}^k(M)^\perp}$  sowie  $\left( \Delta_{\mathcal{H}^k(M)^\perp} \right)^{-1}$  und somit auch mit  $G$ .  $\square$

**Satz 5.24.** *Sei  $(M^n, g)$  eine geschlossene orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

*In jeder De Rham-Kohomologiekategorie  $c \in H_{DR}^k(M; \mathbb{R})$  existiert genau eine harmonische  $k$ -Form ( $0 < k \leq n$ ).*

*Beweis.* Sei  $\alpha \in \Omega^k(M)$  beliebig. Nach Definition des Greenschen Operators  $G$  gilt

$$\Delta G\alpha = \alpha - \text{proj}_{\mathcal{H}^k(M)}\alpha =: \alpha - \alpha_{\mathcal{H}^k(M)}.$$

Dann ist

$$\alpha = \Delta G\alpha + \alpha_{\mathcal{H}^k(M)} = d\delta G\alpha + \delta dG\alpha + \alpha_{\mathcal{H}^k(M)} \stackrel{\text{Satz 5.23}}{=} d(\delta G\alpha) + \delta Gd\alpha + \alpha_{\mathcal{H}^k(M)}.$$

Existenz: Ist  $[\alpha] = c \in H_{DR}^k(M)$ , d.h., gilt  $d\alpha = 0$ , so folgt  $\alpha = d(\delta G\alpha) + \alpha_{\mathcal{H}^k(M)}$ , d.h.,  $[\alpha] = [\alpha_{\mathcal{H}^k(M)}] = c$ ,  $\alpha_{\mathcal{H}^k(M)} \in \mathcal{H}^k(M)$ .

Eindeutigkeit: Es seien  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{H}^k(M)$  und es gelte  $[\beta_1] = [\beta_2] \in H_{DR}^k(M)$ . Dann existiert ein  $\sigma \in \Omega^{k-1}(M)$  mit  $\beta_1 - \beta_2 = d\sigma$ . Da  $\mathcal{H}^k(M) \perp \text{Im } d$  ist, folgt  $\beta_1 - \beta_2 = 0$ .  $\square$

**Satz 5.25** (Poincaré-Dualität für die De Rham-Kohomologie). *Sei  $M^n$  eine geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : H_{DR}^k(M) \times H_{DR}^{n-k}(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] \times [\sigma] &\mapsto \int_M \omega \wedge \sigma \end{aligned}$$

*eine nicht-ausgeartete Paarung. Die De Rham-Kohomologiegruppen  $H_{DR}^k(M)$  und  $H_{DR}^{n-k}(M)$  sind isomorph.*

*Beweis.* Die Definition von  $\varphi$  ist korrekt. Es sei  $\omega \in H_{DR}^k$  und  $\sigma \in H_{DR}^{n-k}(M)$ . Dann gilt für  $\tilde{\omega} := \omega + d\alpha$  und  $\tilde{\sigma} := \sigma + d\beta$  (wobei  $\alpha \in \Omega^{k-1}$ ,  $\beta \in \Omega^{n-k-1}$ ) wegen  $d\omega = d\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \int_M \tilde{\omega} \wedge \tilde{\sigma} &= \int_M (\omega \wedge \sigma + d\alpha \wedge \sigma + \omega \wedge d\beta + d\alpha \wedge d\beta) \\ &= \int_M (\omega \wedge \sigma + d(\alpha \wedge \sigma) + d(\omega \wedge \beta) \pm d(\alpha \wedge d\beta)). \end{aligned}$$

Da  $M$  geschlossen ist, folgt mit dem Satz von Stokes  $\int_M \tilde{\omega} \wedge \tilde{\sigma} = \int_M \omega \wedge \sigma$ .

nicht-ausgeartet: Sei  $[\eta] \in H_{dR}^{n-k}(M)$ . Wähle  $\hat{\eta} \in [\eta]$  harmonisch. Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta_k \hat{\eta}, \hat{\eta} \rangle_{L^2} = \langle d\hat{\eta}, d\hat{\eta} \rangle_{L^2} + \langle \delta\hat{\eta}, \delta\hat{\eta} \rangle_{L^2} \\ \Rightarrow & \quad d\hat{\eta} = 0, \delta\hat{\eta} = 0 \end{aligned}$$

Betrachte nun  $*\hat{\eta} \in \Omega^k(M)$ . Dann gilt  $d(*\hat{\eta}) = \pm *(\delta\hat{\eta}) = 0$ . Damit folgt  $[\hat{\eta}] \in H_{dR}^k(M)$  und  $\int_M *\hat{\eta} \wedge \hat{\eta} = \int_M \langle \hat{\eta}, \hat{\eta} \rangle dM > 0$   $\square$

### Eigenwertabschätzungen für $\Delta_0, \Delta_1$ und geometrische Folgerungen

**Voraussetzungen:** Sei im folgenden  $(M^n, g)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit die orientiert, zusammenhängend, ohne Rand  $\partial M = \emptyset$  und kompakt ist. Dann ist  $(\Omega^k(M), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$  ein Prähilbertraum mit Vervollständigung  $L^2(\Lambda^k T^*M)$ . Somit ist

$$\Delta_k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

ein elliptischer Differentialoperator. Dann gilt für

$$\sigma(\Delta_k)_\xi = -g(\xi^\#, \xi^\#) \text{id}_{\Lambda^k T^*M}$$

wegen  $g$  Riemannsch, dass  $\sigma(\Delta_k)_\xi : \Lambda^k T^*M \rightarrow \Lambda^k T^*M$  ein Isomorphismus ist für alle  $\xi \neq 0$ .

Weiter ist  $\Delta_k$  formal-selbstadjungiert. Daraus folgt

- 1) Das Spektrum von  $\Delta_k$  besteht nur aus Eigenwerten von  $\Delta_k$ , die Eigenwerte sind reell und haben endliche Vielfachheit.
- 2) Der Hilbertraum  $(L^2(\Lambda^k T^*M), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$  hat ein vollständiges Orthonormalsystem aus glatten Eigenformen von  $\Delta_k$ .

**Definition.** Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) &:= \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \Delta_k \omega = 0\} \text{ die harmonischen } k\text{-Formen} \\ \mathcal{P}^k(M) &:= \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \nabla \omega = 0\} \text{ die parallelen } k\text{-Formen} \end{aligned}$$

Dann gilt:

1) nach Satz 5.8  $\mathcal{P}^k(M) \subset \mathcal{H}^k(M)$ , denn

$$\begin{aligned} (d\omega)(X_0, \dots, X_k) &= - \sum_{i=0}^k (\nabla_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k) \text{ und} \\ (\delta\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) &= - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \omega)(e_i, X_1, \dots, X_{k-1}) \text{ wobei } e_1, \dots, e_n \text{ ONB} \end{aligned}$$

d.h. aus  $\omega \in \mathcal{P}^k(M)$  folgt  $d\omega = 0$  und  $\delta\omega = 0$ , also  $\Delta_k \omega = 0$ .

2) Mit Stokes:  $\mathcal{H}^0(M) = \{f | f \in C^\infty(M), f \text{ konstant}\}$

3) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) &= H_{dR}^k(M, \mathbb{R}) \\ \omega_{\mathcal{H}} &\leftrightarrow [\omega] \end{aligned}$$

$\omega_{\mathcal{H}}$  sind bestimmte harmonische  $k$ -Formen in  $[\omega]$ . Damit gilt

$$\dim \mathcal{H}^k(M) = b_k(M) := \dim H_{dR}^k(M, \mathbb{R})$$

d.h.  $\dim \mathcal{H}^k(M)$  ist eine topologische Invariante.

4) Die Eigenwerte von  $\Delta_k$  liegen in  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Sei  $\Delta_k \omega = \lambda \omega$  mit  $\omega \neq 0$  (d.h.  $\lambda$  Eigenwert von  $\Delta_k$ ). Denn

$$\begin{aligned} \lambda \|\omega\|_{L^2}^2 &= \langle \lambda \omega, \omega \rangle_{L^2} \\ &= \langle \Delta_k \omega, \omega \rangle_{L^2} \\ &= \int_M \langle \Delta_k \omega, \omega \rangle_{\Lambda^k T^* M} dM \\ &= \langle (d\delta + \delta d)\omega, \omega \rangle_{L^2} \\ &= \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle_{L^2} + \langle d\omega, d\omega \rangle_{L^2} \\ &= \|\delta\omega\|_{L^2}^2 + \|d\omega\|_{L^2}^2 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{\|\delta\omega\|_{L^2}^2 + \|d\omega\|_{L^2}^2}{\|\omega\|_{L^2}^2} \geq 0 \end{aligned}$$

**Satz 5.26.** Sei  $(M^n, g)$  eine orientierte, zusammenhängende, kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt:

1) Ist  $\text{Ric} \geq 0$  dann gilt

a)  $\mathcal{H}^1(M) = \mathcal{P}^1(M)$  d.h. jede harmonische 1-Form ist parallel

b)  $\dim \mathcal{H}^1(M) \leq \dim(M) = n$

$\dim \mathcal{H}^1(M) = n \Leftrightarrow M$  ist isometrisch zum flachen Torus

2) Gilt  $\text{Ric} \geq c > 0$  für eine Konstante  $c$ , dann gilt für alle Eigenwerte von  $\Delta_1$ , dass  $\lambda \geq c$ . Insbesondere ist  $\mathcal{H}^1(M) = \{0\}$ , d.h.  $b_1(M) = 0$ .

*Beweis.* Wir benutzen die Weitzenböck-Formel für  $\Delta_1$ :

$$\Delta_1 = \underbrace{\Delta^{\nabla^{LC}}}_{=\nabla^* \circ \nabla} + \text{Ric}$$

Wobei hier und im weiteren  $\nabla = \nabla^{LC}$ . D.h. für alle  $\omega \in \Omega^1(M)$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Delta_1 \omega, \omega \rangle_{L^2} &= \int_M \langle \Delta_1 \omega, \omega \rangle dM \\ &= \int_M \langle \nabla^* \circ \nabla \omega, \omega \rangle dM + \int_M \langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle dM \\ &= \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + \langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle_{L^2} \quad (*) \end{aligned}$$

$\text{Ric} \geq c$  bedeutet:  $\langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle_{L^2} \geq c \langle \omega, \omega \rangle_{L^2} \forall \omega \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ric}(X, X) \geq cg(X, X) \forall X \neq 0$ .

1) Es gilt  $\text{Ric} \geq 0$  und damit für alle  $\omega \in \Omega^1(M)$ :

$$\langle \text{Ric} \omega, \omega \rangle_{L^2} \geq 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \langle \Delta_1 \omega, \omega \rangle_{L^2} \geq \|\nabla \omega\|_{L^2}^2$$

Sei also  $\omega \in \mathcal{H}^1(M)$ . Dann folgt aus  $\langle \Delta_1 \omega, \omega \rangle_{L^2} = 0 \geq \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 \geq 0$  (da  $\langle, \rangle$  positiv definit):

$$\|\nabla \omega\|_{L^2}^2 = 0 \Rightarrow \nabla \omega = 0 \Rightarrow \omega \in \mathcal{P}^1(M)$$

Dann gilt auch  $\dim \mathcal{P}^1(M) \leq n$ , denn die Differentialgleichung  $\nabla \omega = 0$  ist eine lineare DGL 1. Ordnung in  $\omega$  und die Lösung ist durch die Anfangswerte in einem Punkt eindeutig bestimmt.

Genauer gesagt: Sei  $\omega$  auf Vektoren in  $T_x M$  festgelegt. Seien  $y \in M$  und  $v \in T_y M$  beliebig. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine Geodäte von  $x$  nach  $y$  mit  $\gamma'(b) = v$ . Dann stellen wir zunächst fest:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\gamma'(t)} \omega(\gamma'(t)) = \gamma'(t)(\omega(\gamma'(t))) - \omega(\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)) \\ &= \gamma'(t)(\omega(\gamma'(t))). \end{aligned}$$

Und

$$\frac{d}{dt} \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \gamma'(t)(\omega(\gamma'(t))) = 0.$$

(Dies sieht man ein, wenn man  $\gamma'$  in einer lokalen Basis darstellt) Also ist  $\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$  konstant und insbesondere der Wert  $\omega_y(v)$  durch den Wert von  $\omega$  auf einem Vektor in  $T_x M$  definiert.

Damit gilt

$$\dim \mathcal{P}^1(M) \leq \dim \Lambda^1 T_x^* M = n$$

Sei nun  $\dim \mathcal{P}^1(M) = n$ . D.h. es existieren linear unabhängige 1-Formen  $\omega_1, \dots, \omega_n$  auf  $M$  mit  $\nabla\omega_1 = 0, \dots, \nabla\omega_n = 0$ . (linear unabhängig bedeutet hier:  $\omega_1(p), \dots, \omega_n(p)$  ist Basis in  $\Lambda_p^1 T^*M \forall p \in M$ ). Seien  $X_i = \omega_i^\# \in \mathfrak{X}(M)$  d.h.  $g(X_i, Y) = \omega_i(Y) \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Damit gilt

- $X_1(p), \dots, X_n(p)$  sind linear unabhängig  $\forall p \in M$
- $\nabla\omega_i = 0 \Leftrightarrow \nabla X_i = 0$

Behauptung: Dann gilt  $R^g = 0$ , denn

$$R_p^g(v_1, v_2, v_3, v_4) = 0 \quad v_i = \sum_{j=1}^n \xi_{ji} X_j(p)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{j_1, \dots, j_4=1}^n \xi_{1j_1} \cdot \dots \cdot \xi_{4j_4} R(X_{j_1}, \dots, X_{j_4})(p)$$

und es gilt  $R(X, Y, Z, W) = 0$  wenn  $X, Y, Z, W$  parallel sind. D.h. ist  $\mathcal{P}^1(M) = \dim \mathcal{H}^1(M) = \beta_1(M) = n$ , dann ist  $R = 0$  d.h. die Schnittkrümmung von  $(M, g)$  ist Null. Nach dem Klassifikationssatz für Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Schnittkrümmung (Kap. 5) folgt nun, dass  $(M^n, g)$  isometrisch zu  $\mathbb{R}^n/\Gamma$ . Wobei  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})$  der euklidische Raum und

$$\Gamma \stackrel{\text{diskrete UG}}{\subset} \underbrace{\text{Isom}(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n})}_{=E(n)=O(n) \times \mathbb{R}^n (f(x)=Ax+x_0)}$$

Seien nun  $X_1, \dots, X_n$  linear unabhängige parallele Vektorfelder auf  $M$ . Wir definieren  $\tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\tilde{X}_i(p) := (d\pi_p)^{-1}(X_i(\pi(p)))$$

Da  $\pi$  eine Isometrie ist und die  $X_i$  parallel sind, sind auch die  $\tilde{X}_i$  parallel. Also sind  $\tilde{X}_i$  konstante Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^n$ .

$$\tilde{X}_i(p) \equiv a_i \quad (a_1, \dots, a_n) \text{ sind linear unabhängig}$$

Da  $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$  Lift von Vektorfeldern auf  $M$  und  $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$  folgt für  $\gamma \in \Gamma$ :

$$d\gamma_p(\tilde{X}_i(p)) = \tilde{X}_i(\gamma(p)) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \forall \gamma \in \Gamma \text{ gilt } d\gamma_p(a_i) = a_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \gamma \text{ ist Translation auf } \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^n \text{ ist diskrete abelsche Untergruppe}$$

$$\Rightarrow \Gamma \simeq \mathbb{Z}^k$$

$$\Rightarrow M = \mathbb{R}^n/\Gamma = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

Und da  $M$  kompakt ist folgt also  $k = n$  und somit ist  $M \simeq \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  der flache Torus.

2) Sei  $\text{Ric} \geq c > 0$ . Dann gilt wegen (\*):

$$\begin{aligned} \langle \Delta_1 \omega, \omega \rangle_{L^2} &= \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + \langle \text{Ric}(\omega), \omega \rangle_{L^2} \\ &\geq \|\nabla \omega\|_{L^2}^2 + c \|\omega\|_{L^2}^2 \quad (**) \end{aligned}$$

Sei  $\lambda$  Eigenwert von  $\Delta_1$ , d.h. es existiert  $\omega \neq 0$  mit

$$\Delta_1 \omega = \lambda \omega$$

Setze diese Eigenform  $\omega$  in (\*\*) ein, dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda \|\omega\|_{L^2}^2 &\geq c \underbrace{\|\omega\|_{L^2}^2}_{\neq 0} \\ \Rightarrow \lambda &\geq c \\ \Rightarrow \dim \mathcal{H}^1(M) &= \beta_1(M) = 0 \end{aligned}$$

□

### Anwendung auf Killing-Vektorfelder kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit.

$$X \in \mathfrak{Kill}(M, g) \Leftrightarrow L_X g = 0$$

Und es gilt

$$(L_X g(Y, Z)) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X)$$

Weiter bezeichnet  $\text{Isom}(M, g)$  die Isometriegruppe von  $(M, g)$  mit  $\dim \text{Isom}(M, g) \leq \frac{1}{2}n(n+1)$  mit der Lie-Algebra  $\mathfrak{Kill}_c(M, g)$  der vollständigen Killingfelder. Ist  $M$  kompakt, dann ist jedes Vektorfeld vollständig, d.h.

$$LA(\text{Isom}(M, g)) = \mathfrak{Kill}(M, g)$$

**Satz 5.27.** *Sei  $(M^n, g)$  kompakte, zusammenhängende, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann gilt:*

1) *Ist  $\text{Ric} \leq 0$ , dann gilt*

$$\mathfrak{Kill}(M, g) = \mathcal{P}(M, g) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid \nabla^g X = 0\}$$

*d.h.  $\dim \mathfrak{Kill}(M^n, g) \leq n$ .*

2) *Ist  $\text{Ric} < 0$ , dann gilt*

$$\mathfrak{Kill}(M, g) = \{0\}$$

*d.h. die Isometriegruppe ist diskret (insbesondere endlich da  $\text{Isom}(M, g)$  kompakt).*

3) Ist  $\text{Ric} = 0$ , dann gilt

$$\dim \mathfrak{K}ill(M, g) = \dim \text{Isom}(M, g) = \dim \mathcal{H}_{dR}^1(M) = \beta_1(M)$$

*Beweis.* a) Behauptung: Sei  $V \in \mathfrak{K}ill(M, g)$ , dann gilt:

$$\nabla_Y \nabla_{\bullet} V = R(Y, U) \bullet : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Nach Satz 3.23 gilt:  $V \in \mathfrak{K}ill(M, g)$  genau dann, wenn  $\nabla_{\bullet} V : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  schiefssymmetrisch ist, d.h.

$$0 = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (*)$$

Sei  $J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  ein 1-1-Tensorfeld. Dann ist auch  $\nabla_X J : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  ein 1-1-Tensorfeld. Es gilt:

$$(\nabla_X J)(Y) = \nabla_X(J(Y)) - J(\nabla_X Y)$$

wir leiten (\*) nach einem Vektorfeld  $Z$  ab. Sei dazu  $p \in M$  und  $X, Y, Z$   $p$ -synchrone Vektorfelder auf  $M$ . (damit  $(\nabla_X Y)(p) = 0, [X, Y] = 0$ ) In  $p \in M$  gilt:

$$0 = g(\nabla_Z \nabla_X V, Y) + g(\nabla_X V, \nabla_Z Y) + g(X, \nabla_Z \nabla_Y V)$$

Durch zyklische Vertauschung von  $X, Y, Z$  erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_X \nabla_Y V, Z) + g(Y, \nabla_X \nabla_Z V) \\ 0 &= g(\nabla_Y \nabla_Z V, X) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X V) \\ 0 &= -g(\nabla_Z \nabla_X V, Y) - g(X, \nabla_Z \nabla_Y V) \end{aligned}$$

Durch Aufaddieren erhält man in  $p \in M$

$$0 = g(R^g(X, Z)V, Y) + g(R^g(Y, Z)V, X) + g(R^g(X, Y)V, Z) + 2g(\nabla_Y \nabla_X V, Z)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y \nabla_X V, Z) &= R^g(X, Z, Y, V) + R^g(Y, Z, X, V) + R^g(X, Y, Z, V) \\ &= R^g(X, Z, Y, V) + R^g(Y, Z, X, V) + R^g(X, Y, Z, V) \\ &\quad + R^g(Z, X, Y, V) - R^g(Z, X, Y, V) \\ &\stackrel{1. \text{ Biancci}}{=} 2R^g(X, Z, Y, V) \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y \nabla_X V, Z) &= R^g(Y, V, X, Z) \\ &= g(R^g(Y, V)X, Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M) \text{ } p\text{-synchron} \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
& \nabla_Y \nabla_X V = R^g(Y, V)X \\
\Rightarrow & \nabla_Y (\nabla_X V) - \underbrace{\nabla_{\nabla_Y X} V}_{=0 \text{ in } p} = R^g(Y, V)X \\
\Rightarrow & \nabla_Y (\nabla_{\bullet} V) = R^g(Y, V) \bullet \quad \text{im Punkt } p \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ } p\text{-synchron} \\
\Rightarrow & \nabla_Y (\nabla_{\bullet} V) = R^g(Y, V) \bullet \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ (wegen tensoriell)}
\end{aligned}$$

b) Behauptung: Sei  $V \in \mathfrak{Kil}(M, g)$ , dann gilt

$$\text{Ric}(V, X) = g(\Delta^{\nabla^g} V, X)$$

Wobei  $\Delta^{\nabla^g} := (\nabla^g)^* \nabla^g$  der Bochner-Laplace-Operator auf  $(TM, \nabla^g)$  ist. Denn: für eine lokale ONB  $s_1, \dots, s_n$  gilt

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(V, X) &= \sum_{i=1}^n R^g(s_i, V, X, s_i) \\
&= - \sum_{i=1}^n g(R^g(s_i, V) s_i, X) \\
&\stackrel{1)}{=} - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{s_i} (\nabla V)(s_i), X)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\text{Ric}(V, X) = - \sum_{i=1}^n g(\nabla_{s_i} \nabla_{s_i} V - \nabla_{\nabla_{s_i} s_i} V, X)$$

Es gilt  $\sum_{i=1}^n \nabla_{s_i} s_i = \sum_{i=1}^n \text{div}(s_i) s_i$  und damit

$$\begin{aligned}
\text{Ric}(V, X) &= g\left( \underbrace{- \sum_{i=1}^n \nabla_{s_i} \nabla_{s_i} V - \text{div}(s_i) \nabla_{s_i} V}_{=\Delta^{\nabla} V}, X \right) \\
&= -g(\Delta^{\nabla} V, X)
\end{aligned}$$

1) Zum Beweis von 1): zu zeigen:  $\text{Ric} \leq 0 \Rightarrow \mathfrak{Kil}(M, g) = \mathcal{P}(M, g)$

Sei  $V \in \mathcal{P}(M, g)$ , dann gilt  $V \in \mathfrak{Kil}(M, g)$  da  $\nabla V$  schiefssymmetrisch ist.

Sei nun  $V \in \mathfrak{Kill}(M, g)$  und  $V \neq 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \text{Ric}(V, V) dM = \int_M g(\underbrace{\Delta^\nabla}_{=\nabla^*\nabla} V, V) dM \\ &= \int_M g(\nabla V, \nabla V) dM \\ &= \int_M \|\nabla V\|^2 dM \quad (*) \end{aligned}$$

Damit folgt, da  $g$  Riemannsch:

$$\|\nabla V\|^2 = 0 \Rightarrow \nabla V = 0 \Rightarrow V \in \mathcal{P}(M, g)$$

2) Zum Beweis von 2)

Sei  $\text{Ric} < 0$ , dann gilt für alle  $V \in \mathfrak{Kill}(M, g)$  mit  $V \neq 0$  nach (\*)

$$0 > \int_M \text{Ric}(V, V) dM = \int_M \|\nabla V\|^2 dM$$

Widerspruch zu  $g$  Riemannsch, also gilt  $\mathfrak{Kill}(M, g) = \{0\}$

3) Zum Beweis von 3). Sei  $\text{Ric} = 0$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{Kill}(M, g) &= \dim \mathcal{P}(M, g) && \text{nach dem ersten Teil dieses Satzes} \\ &= \dim \mathcal{P}^1(M) && \text{durch Dualisieren der Vektorfelder} \\ &= \dim \mathcal{H}^1(M) && \text{nach Satz 1.11, weil Ric} \geq 0 \\ &= \dim H_{dR}^1(M, \mathbb{R}) && \text{nach Satz 5.24.} \end{aligned}$$

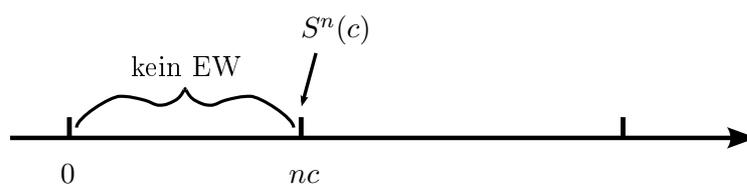
□

## 5.7 Theoreme von Lichnerowicz und Obata

Sei  $(M^n, g)$  eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Ric} \geq c(n-1) \cdot g$  wobei  $c > 0$  konstant ist. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass dann für den ersten positiven Eigenwert  $\lambda_1$  des Laplace-Operators  $\Delta_0$  gilt

$$\lambda_1(M^n, g) \geq n \cdot c,$$

und das Gleichheit genau dann vorliegt, wenn  $(M^n, g)$  isometrisch zur Sphäre  $S^n(c)$  mit der Schnittkrümmung  $c$  ist.

**Beispiel 5.28.**

- 1) Ist  $(M^n, g)$  ein Einstein-Raum mit positiver Schnittkrümmung  $R$ , d.h., es gilt

$$\text{Ric} = \frac{R}{n} \cdot g$$

, so ist

$$(\lambda_1)(M^n, g) \geq \frac{R}{n-1}.$$

- 2) Betrachte  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  mit induzierter Riemannscher Metrik. Dann ist die Schnittkrümmung gleich 1. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{spec}(\Delta_0, S^n) &= \{k(n+k-1) | k \in \mathbb{N}_0\} \\ &= \{0, n, 2(n+1), \dots\} \end{aligned}$$

Damit gilt  $\lambda_1(\Delta_0, S^n) = n = nC$  und die Eigenfunktionen zu  $\lambda_1 = n$  sind

$$f_v(x) \langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

**Satz 5.29** (Lichnerowicz). Sei  $(M^n, g)$  eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{Ric} \geq c(n-1)g$ , wobei  $c = \text{const.} > 0$  ist. Dann gilt

$$\lambda_1(M^n, g) \geq n \cdot c.$$

Ist  $f \in C^\infty(M)$  eine Eigenfunktion mit  $\Delta_0 f = nc \cdot f$ , so gilt  $\text{Hess } f = -cf \cdot g$ .

*Beweis.* Sei  $f \in C^\infty(M)$  und  $\nabla = \nabla^{LC}$  der Levi-Civita-Zusammenhang.  $\text{Hess } f := \nabla(df) \in \mathfrak{X}^{2,0}(M)$  ist symmetrisch,

$$\text{Hess } f(X, Y) = (\nabla_X(df))(Y) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y).$$

Für jede Bilinearform  $B$  auf einem Euklidischen Vektorraum gilt

$$(\text{tr}(B))^2 \leq n \cdot \|B\|^2 \quad (*)$$

Gleichheit tritt genau dann auf, wenn  $B = \alpha \langle \cdot, \cdot \rangle$  ist, denn aus

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B)^2 &= \left( \sum_i a_{ii} \right)^2 = \sum_i a_{ii}^2 + \sum_{i < j} 2a_{ii}a_{jj} \\ \|B\|^2 &= \sum_i a_{ii}^2, \end{aligned}$$

folgt sofort

$$\left( \sum_i a_{ii} \right)^2 \leq n \cdot \sum_i a_{ii}^2$$

bzw.

$$0 \leq \sum_i (n-1)a_{ii}^2 - 2 \sum_{i < j} a_{ii}a_{jj} = \sum_{i < j} (a_{ii} - a_{jj})^2.$$

Deshalb ist  $a_{ii} = a_{jj}$  für alle  $i, j = 1, \dots, n$  damit  $B = \alpha \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Wir wenden nun die Weitzenböckformel für  $\Delta_1$  (Satz 5.13) auf die 1-Form  $df$  an und erhalten mit Satz 5.11, 2),

$$\langle \Delta_1(df), df \rangle_{L^2} = \langle \nabla^* \nabla df, df \rangle_{L^2} + \langle Ric(df), df \rangle_{L^2}.$$

Daraus folgt mit  $\Delta_1 = d\delta + \delta d$  und  $Ric \geq c(n-1)g$

$$\langle d\delta df, df \rangle_{L^2} \geq \langle \nabla df, \nabla df \rangle_{L^2} + c(n-1)\|df\|_{L^2}^2$$

und damit

$$\begin{aligned} \langle \Delta_0 f, \Delta_0 f \rangle_{L^2} &\geq \|Hess f\|_{L^2}^2 + c(n-1)\langle df, df \rangle_{L^2} \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \frac{1}{n} \|tr Hess f\|_{L^2}^2 + c(n-1)\langle \Delta_0 f, f \rangle_{L^2} \quad (**). \end{aligned}$$

Für den Laplace-Operator  $\Delta_0$  auf Funktionen gilt  $tr Hess f = -\Delta_0 f$  (Übungsaufgabe 7). Also folgt aus (\*\*)

$$\frac{n-1}{n} \|\Delta_0 f\|_{L^2}^2 \geq c(n-1)\langle \Delta_0 f, f \rangle_{L^2}, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Ist  $\Delta_0 f = \lambda_1 f$ , so ist  $f \neq 0$ .

Gilt in allen Abschätzungen Gleichheit, so folgt insbesondere

$$(tr Hess f)^2 = n \cdot \|Hess f\|^2$$

und damit

$$Hess f = \alpha \cdot g, \quad \alpha \in C^\infty(M).$$

Wir können nun  $\alpha$  bestimmen, indem wir auf beiden Seiten die Spur bilden und erhalten:

$$n\alpha = \alpha tr g = tr Hess f = -\Delta_0 f = -ncf.$$

Also  $\alpha = -cf$ .

□

Auf die Frage wann in der Abschätzung  $\lambda_1(\Delta_0) \geq n \cdot c$  Gleichheit auftritt gibt der folgende Satz eine Antwort.

**Satz 5.30** (Obata). *Sei  $(M^n, g)$  eine kompakte, zusammenhängende, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Es gelte  $\text{Ric} \geq c(n-1)g$  und es existiere eine Eigenfunktion  $f \in C^\infty(M), f \neq 0$  mit  $\Delta_0 f = n \cdot c \cdot f$ . Dann gilt:  $(M^n, g)$  ist isometrisch zu  $S^n(c)$  (d.h. Schnittkrümmung  $c$  und Radius  $\frac{1}{\sqrt{c}}$ ).*

*Beweis.*

1) Es genügt den Fall  $c = 1$  zu betrachten, denn für  $c = \text{const}$  und  $\hat{g} = c \cdot g$  gilt

$$\begin{aligned} - \Delta \hat{g} &= \frac{1}{c} \Delta g \\ - \nabla_X^{\hat{g}} Y &= \nabla_X^g Y \\ - R^{\hat{g}} &= c \cdot R^g, \text{Ric}^{\hat{g}} = \text{Ric}^g \end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} \text{Ric}^g \geq (n-1) \cdot c \cdot g &\Leftrightarrow \text{Ric}^{\hat{g}} \geq (n-1) \cdot \hat{g} \\ \lambda_1(\Delta_0, (M, g)) = n \cdot c &\Leftrightarrow \lambda_1(\Delta_0, (M, \hat{g})) = n \end{aligned}$$

2) Sei also o.B.d.A.  $c = 1$ . Aus dem Beweis von Satz 5.29 für  $f \in C^\infty(M)$  mit  $\Delta_0 f = n \cdot f$  wissen wir, dass

$$\text{Hess } f = -fg$$

Damit folgt Satz 5.30 aus dem folgenden allgemeineren Satz. □

**Satz 5.31.** *Ist  $(M^n, g)$  kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und  $f \in C^\infty(M), f \neq 0$  mit  $\text{Hess } f = -fg$ . Dann ist  $(M^n, g)$  isometrisch zu  $S^n$  mit induzierter Riemannscher Metrik.*

*Beweis.* Wir geben die Beweisidee. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

1) Sei  $m \in M$  mit  $f(m) = \max\{f(x) | x \in M\}$ . Wir zeigen, dass

$$\exp_m : K(0, \pi) \subset T_m M \rightarrow B(M, \pi) = \{x \in M | d(m, x) < \pi\}$$

ein Diffeomorphismus ist.

2) Wir zeigen:  $M \setminus B(m, \pi) = \{m'\}$

3) Betrachte nun eine lineare Isometrie  $L : T_m M \rightarrow T_N S^n$  und die Polarabbildung

$$\begin{aligned} \phi_L : M \setminus \{m'\} &\rightarrow S^n \setminus \{-N\} \\ x &\mapsto \exp_N^{S^n} \circ L \circ (\exp_m^M)^{-1}(x) \end{aligned}$$

Zeige nun, dass  $\phi_L$  eine Isometrie ist, und damit

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{Schnittkrümmung von } M \text{ ist } 1 \\ &\Rightarrow M \text{ isometrisch zu } S^n/\Gamma, \text{ da } M \setminus \{m'\} \underset{\text{homö.}}{\simeq} S^n \setminus \{-N\} \\ &\Rightarrow S^n \text{ isometrisch zu } M^n \end{aligned}$$

Zum Beweis: sei o.B.d.A.  $\max f = 1$ , ansonsten gehe über zu  $\hat{f} = \frac{f}{\max f}$ .

1) Sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit  $\gamma(0) = m$  und  $\gamma(l) = x$ . Behauptung: dann gilt,

$$f(x) = \cos(l(\gamma))$$

Insbesondere:

$$f(x) = \cos(d(m, x))$$

a) Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine beliebige Geodäte mit  $\gamma(0) = m, \|\gamma'(0)\| = c > 0$ . Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} -f(\gamma(t)) \cdot c^2 &= -f \cdot g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= \text{Hess } f(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\ &= \nabla_{\gamma(t)} df(\gamma'(t)) \\ &= \gamma'(t) df(\gamma'(t)) + df \left( \frac{\nabla \gamma'(t)}{dt} \right) \\ &= (f \circ \gamma)''(t) \end{aligned}$$

Also gilt  $(f \circ \gamma)''(t) = -c^2(f \circ \gamma)(t)$  mit der allgemeinen Lösung:

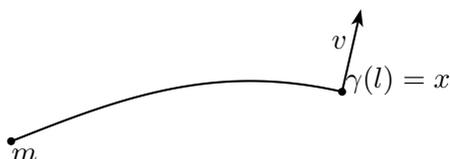
$$f(\gamma(t)) = A \cos(c \cdot t) + B \sin(c \cdot t) \quad \text{für } A, B \in \mathbb{R}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} f(\gamma(0)) &= f(m) = 1 = A \quad \text{und wegen des Maximum in } m: \\ (f \circ \gamma)'(0) &= 0 = c \cdot B \Rightarrow B = 0 \Rightarrow f(\gamma(t)) = \cos(\|\gamma'(0)\| \cdot t) \end{aligned}$$

Da  $\gamma$  beliebig gewählt war mit  $\gamma(0) = m$  folgt damit die Behauptung. Insbesondere gilt: Ist  $\gamma$  Geodäte von  $m$  nach  $x$  mit  $l(\gamma) < \pi$ , dann ist  $\gamma$  minimierende Geodäte von  $m$  nach  $x$  d.h.  $l(\gamma) = d(m, x)$ .

- b) Behauptung:  $\text{grad } f(x) = -\sin(l) \cdot \gamma'(l)$  für jede auf Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit  $\gamma(0) = m$  und  $\gamma(l) = x$ . Sei zunächst  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  mit  $\gamma(l)$  nicht konjugiert zu  $\gamma(0)$  entlang  $\gamma$ . Sei weiter  $v \in T_x M, \|v\| = 1, v \perp \gamma'(l)$ .



Behauptung: Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Jacobifeld  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  mit  $Y(0) = 0, Y(l) = v$ .

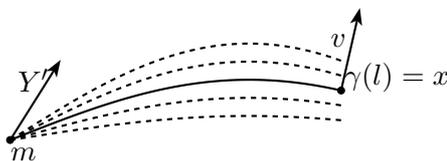
denn:  $Jac_\gamma(M) = \{Y \in Jac_\gamma(M) | Y(0) = 0\}$  ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, denn diese Jacobifelder sind eindeutig bestimmt durch  $Y'(0) \in T_m M$  (d.h. man hat einen  $n$ -dimensionalen Raum von Anfangsbedingungen für lineare DGL). Betrachte

$$\begin{aligned} \Theta : Jac_\gamma(M) &\rightarrow T_x M \\ Y &\mapsto Y(l) \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv, da  $Y(l)$  nicht konjugiert zu  $\gamma(0)$  entlang  $\gamma$  ist, d.h.  $Y(0) = 0$  und  $Y(l) = 0$  impliziert  $Y \equiv 0$ . Daraus folgt  $\Theta$  ist bijektiv.

Sei also  $Y$  das Jacobifeld entlang  $\gamma$  mit  $Y(0) = 0, Y(l) = v$ . Betrachte die geodätische Variation:

$$\begin{aligned} V : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ (t, s) &\mapsto \exp_m(t\gamma'(0) + s \cdot Y'(0)) \end{aligned}$$



Das Variations-Vektorfeld  $X := \frac{\partial V}{\partial s}(\cdot, 0)$  ist ein Jacobifeld (da Variation aus Geo-

däten) mit:

$$\begin{aligned}
 X(0) &= 0 \\
 X'(0) &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial V}{\partial s}(t, s)|_{t=0, s=0} \\
 &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial V}{\partial t}(t, s)|_{t=0, s=0} \\
 &\stackrel{\text{Def. von } V}{=} \frac{\nabla}{ds} (\gamma'(0) + sY'(0))|_{s=0} \\
 &= Y'(0) \\
 \Rightarrow & X = Y
 \end{aligned}$$

Betrachte nun die Längenfunktion für  $V$ :  $l(s) = l(V(\cdot, s))$ . Nach 3.81 gilt:

$$\begin{aligned}
 l'(0) &= \langle Y(l), \gamma'(l) \rangle - \langle Y(0), \gamma'(0) \rangle \\
 &= \langle v, \gamma'(l) \rangle - 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

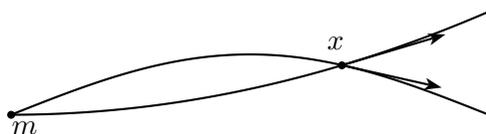
Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine ONB in  $T_x M$  mit  $\gamma'(l) = v_1$ . Damit ist

$$\text{grad } f(x) = \sum_{i=1}^n v_i(f) v_i$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 i = 1 : \quad v_1(f) &= \gamma'(l)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t))|_{t=l} \\
 &\stackrel{1)}{=} \frac{d}{dt}(\cos(t))|_{t=l} \\
 &= -\sin(l)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i > 1 : \quad v_i(f) &= \frac{d}{ds}(f((l(V_i(\cdot, s))))|_{s=0} \\
 &= \frac{d}{ds} \cos(l_i(s))|_{s=0} \\
 &= -\sin(l_i(0)) \underbrace{l'_i(0)}_{=0} = 0
 \end{aligned}$$



Damit gilt  $\text{grad } f(x) = -\sin(l)\gamma'(l)$  und somit die Behauptung unter b).

- c) Behauptung: Die Abbildung  $\exp_m : K(0, \pi) \subset T_m M \rightarrow B(m, \pi) \subset M$  ist bijektiv
- i) surjektiv:  $x \in B(m, \pi) \Rightarrow d(x, m) < \pi$ , da  $(M, g)$  vollständig ist existiert eine minimierende Geodäte  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  mit  $l(\gamma) = d(m, x) < \pi$  auf Bogenlänge parametrisiert.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \exp_m(l \cdot \gamma'(0)) &= x \\ \Rightarrow \quad \|v\| = l = d(m, x) &< \pi \end{aligned}$$

- ii) injektiv: Seien  $v_1, v_2 \in T_m M$ ,  $v_1 \neq v_2$  mit  $x = \exp_m(v_1) = \exp_m(v_2)$ ,  $\|v_1\|, \|v_2\| < \pi$ . Seien  $\gamma_{v_k} : I \rightarrow M$  radiale Geodäten mit  $\gamma_{v_k}(0) = m, \gamma'_{v_k}(0) = v_k$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad l(\gamma_{v_k}) &= \|v_k\| < \pi \\ \Rightarrow \quad \gamma_{v_k} &\text{ ist minimierende Geodäte von } m \text{ nach } x \text{ (nach 1))} \\ \Rightarrow \quad l(\gamma_{v_1}) = l(\gamma_{v_2}) &= l = d(m, x) \\ \Rightarrow \quad \text{grad } f(x) &= -\sin(l)\gamma'_{v_k}(l) \\ \Rightarrow \quad \gamma'_{v_1}(l) = \gamma'_{v_2}(l), \gamma_{v_1}(l) &= \gamma_{v_2}(l) \Rightarrow \gamma_{v_1} = \gamma_{v_2} \Rightarrow v_1 = v_2 \end{aligned}$$

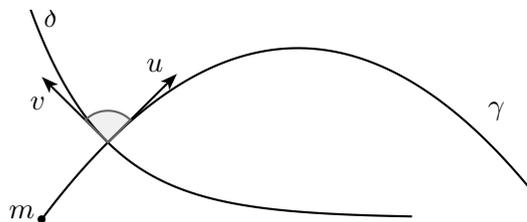
- d) Behauptung: Die Abbildung  $\exp_m : K(0, \pi) \subset T_m M \rightarrow B(m, \pi) \subset M$  ist ein lokaler Diffeomorphismus. Wir müssen zeigen, dass auf den auf BL parametrisierten radialen Geodäten mit Anfangspunkt  $m$  auf  $(0, \pi)$  kein konjugierter Punkt liegt.

Dazu die Behauptung: Sei  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  eine auf BL parametrisierte Geodäte mit  $\gamma(0) = m$  und  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  ein Jacobifeld entlang  $\gamma$  mit  $Y(0) = 0, Y \perp \gamma', Y \neq 0$ . Dann gilt

$$\|Y(t)\| = \sin(t) \underbrace{\|Y'(0)\|}_{\neq 0}$$

d.h. insbesondere  $\gamma(t)$  ist zu  $\gamma(0)$  entlang  $\gamma$  konjugiert  $\Leftrightarrow t \in \mathbb{Z}\pi$ .

Beweis der Behauptung: Sei  $t_0 \in (0, \pi)$ , so dass  $\gamma(t_0)$  nicht konjugiert zu  $\gamma(0)$  entlang  $\gamma$  ist. Damit gilt  $Y(t_0) \neq 0, Y \perp \gamma'$ .



Sei nun  $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Geodäte mit  $\delta(0) = \gamma(t_0)$ ,  $\delta'(0) = Y(t_0)$ . Da  $l(\gamma|_{[0, t_0]}) = t_0 < \pi$  gilt für  $\varepsilon$  hinreichend klein, dass  $d(m, \delta(s)) < \pi$ . Nach c) existiert dann eine Kurve  $\hat{V}(s) \subset K(0, \pi) \subset T_m M$  mit  $\exp_m(\hat{V}(s)) = \delta(s)$ . Betrachte nun die Variation von  $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$ :

$$V(t, s) = \exp_m \left( \frac{t}{t_0} \cdot \hat{V}(s) \right)$$

Es gilt:

- $V(\cdot, s)$  ist Geodäte
- $V(0, s) = m \forall s$
- $V(t_0, s) = \exp_m(\hat{V}(s)) = \delta(s)$

Betrachte nun wieder  $l(s) := l(V(\cdot, s))$ , wiederum aus Kapitel 5? ist bekannt:

$$\begin{aligned} l'(0) &= 0 \\ l''(0) &= \langle Y(t_0), Y'(t_0) \rangle \quad (1) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun  $l''(0)$  nochmals unter Verwendung der Formel in 1):

$$\begin{aligned} f(\delta(s)) &= \cos(l(V(\cdot, s))) \\ &= \cos(l(s)) \end{aligned}$$

Dies gilt für jede Geodäte von  $m \rightarrow \delta(0)$ . Da  $\delta$  eine Geodäte ist folgt:

$$\begin{aligned} (f \circ \delta)''(s) &= \text{Hess } f_{\delta(s)}(\delta'(s), \delta'(s)) \\ &= -f(\delta(s)) \cdot g(\delta'(s), \delta'(s)) \\ \Rightarrow (f \circ \delta)''(0) &= -f(\delta(0)) \cdot g(\delta'(0), \delta'(0)) \\ &= -f(\gamma(t_0)) \cdot g(Y(t_0), Y(t_0)) \\ &= -\cos(\gamma(t_0)) \cdot g(Y(t_0), Y(t_0)) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \delta)'(s) &= -\sin(l(s)) \cdot l'(s) \\ (f \circ \delta)''(s) &= -\cos(l(s)) \cdot (l'(s))^2 - \sin(l(s)) \cdot l''(s) \\ \Rightarrow (f \circ \delta)''(0) &= -\cos(l(0)) \cdot \underbrace{(l'(0))^2}_{=0} - \sin(l(0)) \cdot l''(0) \\ \Rightarrow l''(0) &= -\frac{1}{\sin(t_0)} \cdot (f \circ \delta)''(0) \\ \Rightarrow l''(0) &= \frac{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} \langle Y(t_0), Y(t_0) \rangle \quad (2) \end{aligned}$$

Mit (1) und (2) folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} \langle Y(t_0), Y(t_0) \rangle &= \langle Y(t_0), Y'(t_0) \rangle \\ \Rightarrow \frac{\cos(t_0)}{\sin(t_0)} &= \frac{\langle Y(t_0), Y'(t_0) \rangle}{\langle Y(t_0), Y(t_0) \rangle} \\ &= \frac{\frac{d}{dt} \|Y(t)\|_{|t=t_0}}{\|Y(t_0)\|} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (\ln(\sin(t)))_{|t=t_0} &= \frac{d}{dt} (\ln(\|Y(t)\|))_{|t=t_0} \end{aligned}$$

Und zwar für alle  $t_0 \in (0, \pi)$  für die  $\gamma(t_0)$  nicht konjugiert zu  $\gamma(0)$  entlang  $\gamma$  ist.

Fakt: Die konjugierten Punkte auf Geodäten in Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind diskret verteilt auf den Definitionsbereich von  $\gamma$ . (ohne Beweis)

Damit gilt  $\frac{d}{dt} (\ln(\sin(t))) = \frac{d}{dt} (\ln(\|Y(t)\|))$  auch in einer Umgebung von  $t_0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \ln(\|Y(t)\|) &= \ln(\sin(t)) + \text{const} \\ \Rightarrow \|Y(t)\| &= \sin(t) \cdot \text{const} \quad \text{const} = c \neq 0 \\ \Rightarrow \|Y(t)\|^2 &= \sin^2(t) \cdot c^2 \\ \frac{d^2}{dt^2} \Rightarrow \|Y'(t)\| &= c \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\|Y(t)\| = \sin(t) \cdot \|Y'(t)\|$$

für alle  $t \in (0, \pi)$  für die  $\gamma(t)$  nicht konjugiert zu  $\gamma(0)$  entlang  $\gamma$  ist. Damit gilt dies aber für alle  $t \in (0, \pi)$ , da beide Seiten stetig sind. Das heißt die konjugierten Punkte  $\gamma(t)$  liegen bei  $t \in \mathbb{Z}\pi$  und damit folgt, dass

$$\exp_m : K(0, \pi) \rightarrow B(m, \pi)$$

ein Diffeomorphismus ist. Damit ist der erste Schritt bewiesen.

2) Behauptung:  $M \setminus B(m, \pi) = \{m'\}$

Wir zeigen: Seien  $\gamma_1, \gamma$  auf BL parametrisierte Geodäten mit  $\gamma(0) = \gamma_1(0) = m$ , dann gilt  $\gamma(\pi) = \gamma_1(\pi)$ .

Seien  $\gamma_1'(0) \neq \gamma'(0)$  und sei  $e_1, e_2$  ONB in  $\text{span}(\gamma'(0), \gamma_1'(0)) \subset T_m M$  mit  $e_1 = \gamma'(0)$ . Betrachte die Variation

$$V(t, s) = \exp_m(t \underbrace{(\cos(s)e_1 + \sin(s)e_2)}_{=:u(s)})$$

Dann ist  $V(\cdot, 0) = \gamma$  und  $V(\cdot, s_0) = \gamma_1$  für ein fixes  $s_0$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $V(\pi, s) = \text{constant}$ . Sei dazu  $Y_s$  das Variationsvektorfeld von  $V$  entlang der Geodäte  $V_s = V(\cdot, s)$ .

$$\begin{aligned} Y_s(t) &= \frac{d}{ds}(V(t, s)) \\ &= (d \exp_m)_{t \cdot u(s)}(t \underbrace{(-\sin(s)e_1 + \cos(s)e_2)}_{\perp u(s)}) \end{aligned}$$

Dann folgt mit dem Gauß-Lemma ( $\exp_m$  ist eine radiale Isometrie)

$$Y_s(t) \perp \frac{d}{dt}(V_s(t))$$

Wir wenden nun d) auf die Geodäte  $V_s$  und das Yacobifeld  $Y_s$  an. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|Y_s(t)\| &= \sin(t)\|Y_s'(0)\| \Rightarrow Y_s(\pi) = 0 \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \Rightarrow \frac{d}{ds}(V(\pi, s)) &= 0 \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ \Rightarrow V(\pi, s) &= \text{constant} \end{aligned}$$

Damit gilt aber  $\gamma_1(\pi) = \gamma(\pi)$  und somit  $\{x \in M \mid d(m, x) = \pi\} = \{m'\}$ .

Bemerkung: setzt man die Bedingungen von Satz 5.30 voraus, nämlich  $\text{Ric} \geq (n-1)g$  kann man jetzt mit dem Satz von Bonnet-Myers schließen, dass  $\text{diam}(M, g) \leq \pi$  und damit  $M = B(m, \pi) \cup \{m'\}$ . Damit folgt 2), ohne Krümmungsbedingung schließt man wie folgt:

Wir müssen zeigen, dass kein Punkt  $x \in M$  existiert mit  $d(m, x) > \pi$ . In  $m'$  gilt  $d(m', m) = \pi$  und damit:

$$f(m') \stackrel{1)}{=} \cos(\pi) = -1 = \min\{f(x) \mid x \in M\}$$

Benutzen wir nun 1a)-1d) für das Minimum  $m'$  analog und erhalten

$$\{x \in M \mid d(m', x) = \pi\} = \{m\}$$

Sei  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow M$  Geodäte durch  $m'$  und  $x$  mit  $\delta(0) = m'$ , auf BL parametrisiert. Wir unterteilen  $\mathbb{R}$  in Intervalle  $[k\pi, (k+1)\pi]$ . Dann existiert ein  $k$  mit  $r \in (k\pi, (k+1)\pi)$ , so dass  $\delta(r) = x$ , denn auf den Randpunkten der Intervalle nimmt  $\delta$  die Werte  $m, m'$  an. Damit folgt  $d(m, x) < \pi$  und somit

$$M = B(m, \pi) \cup \{m'\}$$

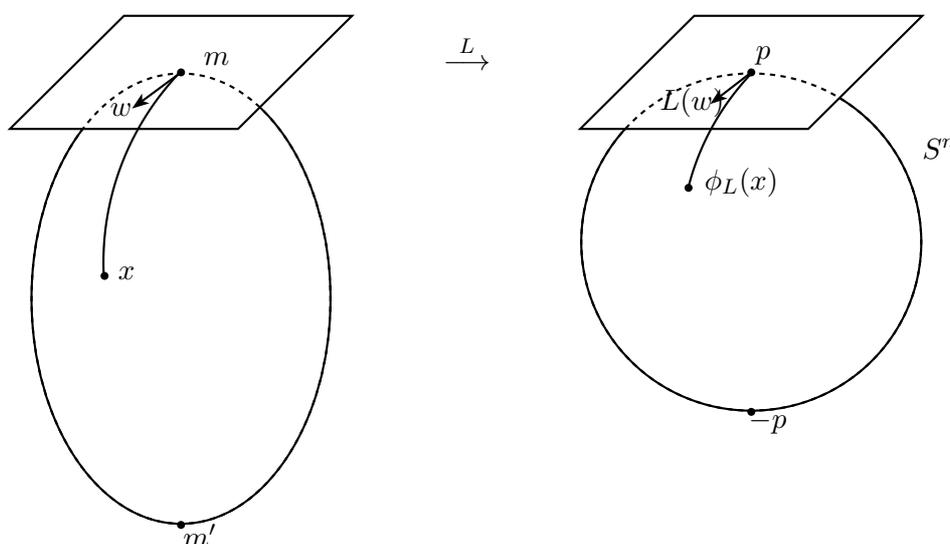
und also 2).

3) Sei  $L : T_m M \rightarrow T_p S^n$  eine lineare Isometrie und

$$\begin{aligned} \phi_L : M \setminus \{m'\} &\rightarrow S^n \setminus \{-p\} \\ x &\mapsto \exp_N^{S^n} \circ L \circ (\exp_m^M)^{-1}(x) \end{aligned}$$

die Polarabbildung.  $\phi_L$  ist ein Diffeomorphismus.

Behauptung:  $\phi_L : M \setminus \{m'\} \rightarrow S^n \setminus \{-p\}$  ist eine Isometrie für  $g$  auf  $M$  und  $g_* = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$  auf  $S^n$ .



Zu zeigen:  $x \in M, x \neq m', v \in T_x M \Rightarrow \|d\phi_x(v)\|_{S^n} = \|v\|_{g_x}$ . (\*)

Mit dem Gauß-Lemma gilt (\*), wenn  $v$  tangential an eine radiale Geodäte von  $m \rightarrow x$  ist. Es genügt also zu zeigen, dass (\*) gilt für  $v \perp$  auf radiale Geodäte von  $m \rightarrow x$ .

Sei also  $\gamma$  radiale Geodäte auf BL von  $m \rightarrow x, w = \gamma'(0)$ . Da  $(d\exp_m)_{t_0 w}$  ein Isomorphismus ist, sei  $z \in T_m M$  mit  $(d\exp_m)_{t_0 w}(t_0 z) = v$ . Sei weiter  $Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$  das Jacobifeld entlang  $\gamma$  mit  $Y \perp \gamma', Y'(0) = z$ , dann ist  $Y(t_0) = v$ . Nach 1d) gilt dann

$$\begin{aligned} \|Y(t)\| &= \sin(t)\|Y'(0)\| = \sin(t)\|z\| \\ &= \sin(t)\|L(z)\| \\ \Rightarrow \|v\| &= \sin(t_0)\|L(z)\| \quad (3) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|d\phi(v)\| &= \|d\exp_p^{S^n} \circ L \circ \underbrace{(d\exp_m^M)^{-1}}_{=t_0z}(v)\| \\ &= \|(d\exp_p^{S^n})_{t_0L(z)}(t_0L(z))\| \\ &= \|\hat{Y}(t_0)\| \end{aligned}$$

wobei  $\hat{Y}$  das Jacobifeld entlang  $\phi_L \circ \gamma$  auf  $S^n$  mit  $\hat{Y}(0) = 0, \hat{Y}'(0) = L(z)$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \text{Übungsaufgaben} &\Rightarrow \hat{Y}(t) = \sin(t)Z(t), Z(t) = \mathcal{P}_{\phi_L \circ \gamma}^{S^n}(L(z)) \\ &\Rightarrow \|d\phi_x(v)\| = \|\hat{Y}(t_0)\| = \sin(t_0)\|Z(t_0)\| = \sin(t_0)\|L(z)\| \stackrel{(3)}{=} \|v\| \end{aligned}$$

damit ist  $\phi_L$  eine Isometrie von  $M \setminus \{m'\}$  auf  $S^n \setminus \{p\}$ . Damit hat  $M \setminus \{m'\}$  Schnittkrümmung  $K = 1$  und es folgt  $K = 1$  auf ganz  $M$ . Damit gilt

$$M \underset{Isom.}{\cong} S^n/\Gamma \Rightarrow M \underset{Isom.}{\cong} S^n \text{ da } M \setminus \{pt.\} \underset{Hom.}{\cong} S^n \setminus \{pt.\}$$

□

# 6 Geometrie semi-Riemannscher Immersionen

Motivation: Unser Ziel ist es, Mannigfaltigkeiten mit speziellen geometrischen Eigenschaften global zu konstruieren. Interessante Eigenschaften sind zum Beispiel

- Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie:  $\text{Ric} = 0$ ,
- MF mit spezieller Holonomiegruppe,
- MF derart, dass spezielle Differentialgleichungen eine Lösung haben.

Sei zum Beispiel  $\tilde{M}$  eine Raumzeit und  $M \subset \tilde{M}$  eine raumartige Hyperfläche, und sei  $\tilde{g}$  Metrik auf  $\tilde{M}$  mit folgender Form:

$$\tilde{g} = -\beta^2(t, x) \cdot dt^2 + g_t,$$

wobei  $g_t$  eine glatte Familie Riemannscher Metriken auf  $M$  ist. (Jede global-hyperbolische Mannigfaltigkeit hat zum Beispiel eine solche Darstellung  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ) Dann:

Geometrieigenschaften von  $\tilde{M} \longrightarrow$  Geometrieigenschaften von  $M$

(*constraint conditions*) Das Vorgehen zur Konstruktion von  $\tilde{M}$  ist dann:

- (1) Suche eine MF  $(M, g)$ , die die *constraint conditions* erfüllt.
- (2) Lösen eine Evolutionsgleichung auf  $M \times (-\epsilon, \epsilon)$ :

$$\tilde{g} = -\beta^2(t, x) \cdot dt^2 + g_t,$$

Dabei kennen wir  $g_0, \dot{g}_0, \beta(0, \cdot), \dot{\beta}(0, \cdot)$ . Wir bestimmen nun eine Lösung für  $g_t, \beta(t, \cdot)$  aus den Anfangsbedingungen.

- (3) Zeigen Eindeutigkeit und Maximalität der Lösung.

Im Folgenden beschäftigen wir uns also mit der Frage, wie die Geometrie einer Immersion durch die Geometrie des Totalraums festgelegt wird.

**Definition.** Eine Abbildung  $f : (M^n, g) \rightarrow (\hat{M}^N, \hat{g})$  heißt semi-Riemannsche Immersion, wenn

- 1)  $f$  ist eine Immersion
- 2)  $f^*\hat{g} = g$

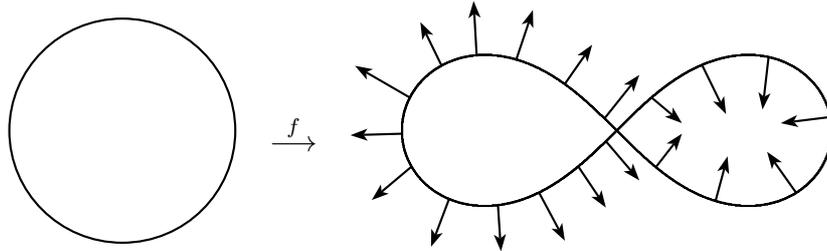
**Beispiel 6.1.**

- 1) Sei  $(\hat{M}, \hat{g})$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $f : M \rightarrow \hat{M}$  Immersion, so dass  $df_x(T_x M) \subset T_{f(x)} \hat{M}$  nicht ausgeartet bezüglich  $\hat{g}_{f(x)}$  ist. Dann ist mit  $g := f^* \hat{g}$  die Abbildung  $f : (M, g) \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$  semi-Riemannsche Immersion.
- 2) Sei  $\gamma : I \rightarrow \hat{M}$  eine reguläre Kurve,  $\gamma'(t) = d\gamma_t \left( \frac{\partial}{\partial t}(t) \right)$  nicht lichtartig, dann ist  $\gamma : I \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$  eine semi-Riemannsche Immersion.
- 3) Sei  $(\hat{M}, \hat{g})$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $M \subset \hat{M}$  Untermannigfaltigkeit, so dass  $T_x M \subset T_x \hat{M}$  nicht ausgeartet ist. Dann ist  $i : M \hookrightarrow \hat{M}$  mit  $g = i^* \hat{g}$  eine semi-Riemannsche Immersion ( $i$  ist hier die Inklusion)

**Definition.** Sei  $f : (M, g) \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$  eine semi-Riemannsche Immersion. Wir benutzen folgende Bezeichnungen. Sei  $x \in M$ , dann zerfällt

$$T_{f(x)} \hat{M} = \underbrace{df_x(T_x M)}_{=: Tf_x} \oplus \underbrace{df_x(T_x M)^{\perp \hat{g}}}_{=: Nf_x}$$

- $Tf_x$  heißt Tangentialraum an  $f$  in  $x \in M$
- $Nf_x$  heißt Normalenraum an  $f$  in  $x \in M$
- $Tf_x \simeq T_x M$  ist eine lineare Isometrie bezüglich  $\hat{g}_{f(x)}$  und  $g_x$
- $Tf := \bigcup_{x \in M} Tf_x$  Vektorbündel über  $M$  (Tangentialbündel an  $f$ )
- $Nf := \bigcup_{x \in M} Nf_x$  Vektorbündel über  $M$  (Normalenbündel an  $f$ )
- $\mathfrak{X}_f(M) := \left\{ \begin{array}{l} X : M \rightarrow T\hat{M}, C^\infty \\ x \mapsto X(x) \in T_{f(x)} \hat{M} \end{array} \right\}$  sind die Vektorfelder entlang von  $f$



- $\mathfrak{X}_f(M)^{tan} = \{X \in \mathfrak{X}_f(M) | X(x) \in Tf_x \forall x \in M\}$  heißen tangentielle Vektorfelder entlang von  $f$ . Oft wird  $\mathfrak{X}(M)$  und  $\mathfrak{X}_f(M)^{tan}$  identifiziert.

$$\begin{aligned} \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M) &\simeq \mathfrak{X}_f(M)^{tan} \simeq \Gamma(Tf) \\ X &\mapsto (x \in M \mapsto df_x(X(x))) \\ (x \in M \mapsto (df_x)^{-1}(Z(x))) \in T_x M &\leftarrow Z \end{aligned}$$

- $\mathfrak{X}_f^\perp(M) := \{X \in \mathfrak{X}_f(M) \mid X(x) \in Nf_x \forall x \in M\}$  heißen normale Vektorfelder entlang von  $f$ .
- $\mathfrak{X}_f(M) \simeq \mathfrak{X}_f(M)^{\text{tan}} \oplus_\perp \mathfrak{X}_f^\perp(M) \simeq \mathfrak{X}(M) \oplus_\perp \mathfrak{X}_f^\perp(M)$
- $\text{tan} : \mathfrak{X}_f(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  ist die tangentielle Projektion

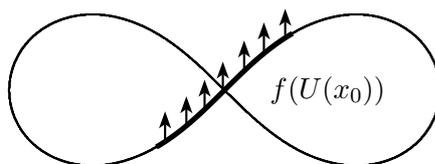
$$(\text{tan } X)(x) = (df_x)^{-1}(\underbrace{\text{proj}_{Tf_x}(X(x))}_{\in T_{f(x)}M}) \in T_x M$$

- $\text{nor} : \mathfrak{X}_f(M) \rightarrow \mathfrak{X}_f^\perp(M)$  ist die normale Projektion

$$(\text{nor } X)(x) := \text{proj}_{Nf_x}(X(x)) \in Nf_x$$

**Lemma 6.2.** Sei  $Z \in \mathfrak{X}_f(M)$  ein Vektorfeld entlang  $f$ . Dann existiert für jeden Punkt  $x_0 \in M$  eine Umgebung  $U(x_0) \subset M$  und ein VF  $\hat{Z}_{x_0} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$ , so dass

$$Z(x) = \hat{Z}_{x_0}(f(x)) \forall x \in U(x_0)$$



*Beweis.* Da  $f : M \rightarrow \hat{M}$  eine Immersion ist, existieren offene Umgebungen  $\hat{U}(x_0) \subset M$ , so dass

$$f|_{\hat{U}(x_0)} : \hat{U}(x_0) \rightarrow \hat{M}$$

eine Einbettung ist. Damit ist  $f(\hat{U}(x_0))$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\hat{M}$ . D.h. um  $f(x_0)$  existiert eine Karte  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  von  $\hat{M}$  mit  $\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap f(\hat{U}(x_0))) = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{U})\}$ . Damit gilt für alle  $x \in \hat{U}(x_0)$  mit  $f(x) \in \tilde{U}$ :

$$\underbrace{Z(x)}_{\in T_{f(x)}M} = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}(f(x)) \quad \tilde{\varphi} = (x_1, \dots, x_N)$$

Definiere nun  $\hat{Z} \in \mathfrak{X}(\tilde{U})$  durch

$$\hat{Z}(\tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_N)) := \sum_{i=1}^n \xi_i(f^{-1}(\tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0))) \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_N))$$

$$\Rightarrow Z(x) = \hat{Z}(f(x)) \quad \forall x \in \hat{U}(x_0) \text{ mit } f(x) \in \tilde{U}$$

Sei  $\tilde{V} \subset \tilde{U}$  eine Umgebung mit  $f(x_0) \in \tilde{V}$ ,  $\text{cl } \tilde{V} \subset \tilde{U}$  und  $h \in C^\infty(\hat{M})$  mit  $h|_{\tilde{V}} \equiv 1$  und  $\text{supp } h \subset \tilde{U}$ . Betrachte das globale Vektorfeld

$$\hat{Z}_{x_0} := h \cdot \hat{Z} \in \mathfrak{X}(\hat{M})$$

Dafür gilt  $\hat{Z}_{x_0}(f(x)) = Z(x)$  für alle  $x \in U(x_0) := f^{-1}(\tilde{V} \cap f(\hat{U}(x_0)))$  □

Lemma 6.2 erlaubt es Vektorfeld entlang  $f$  kovariant abzuleiten. Sei  $\hat{\nabla}$  eine kovariante Ableitung auf  $\hat{M}$ ,  $\hat{\nabla}$  definiert eine kovariante Ableitung von Vektorfeldern aus  $\mathfrak{X}_f(M)$ . Sei  $Z \in \mathfrak{X}_f(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}_f(M)^{\text{tan}} \subset \mathfrak{X}_f(M)$ . Definiere nun  $\hat{\nabla}_X Z \in \mathfrak{X}_f(M)$  durch

$$(\hat{\nabla}_X Z)(x_0) := \left( \hat{\nabla}_{\hat{X}_{x_0}} \hat{Z}_{x_0} \right) (f(x_0)) \quad \text{für } x_0 \in M$$

dabei hat man  $X \in \mathfrak{X}(M)$  als tangentiales Vektorfeld entlang  $f$  betrachtet. Es ist  $\hat{\nabla}_X Z \in \mathfrak{X}_f M$  unabhängig von den gewählten Fortsetzungen  $\hat{X}_{x_0}$  und  $\hat{Z}_{x_0}$ . Man spricht von der „kovarianten Ableitung von  $Z$  in Richtung  $X$ “.

**Lemma 6.3.** *Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $h \in C^\infty(M)$  für  $\hat{\nabla}_X : \mathfrak{X}_f(M) \rightarrow \mathfrak{X}_f(M)$  gilt:*

- 1)  $\hat{\nabla}_{hX} Z = h \hat{\nabla}_X Z$ ,  $\hat{\nabla}_{X_1+X_2} Z = \hat{\nabla}_{X_1} Z + \hat{\nabla}_{X_2} Z$
- 2)  $\hat{\nabla}_X (hZ) = X(h)Z + h \hat{\nabla}_X Z$ ,  $\hat{\nabla}_X (Z_1 + Z_2) = \hat{\nabla}_X (Z_1) + \hat{\nabla}_X (Z_2)$
- 3) *Sei  $(\hat{M}, \hat{g})$  eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $\hat{\nabla}$  der Levi-Civita-Zusammenhang von  $(\hat{M}, \hat{g})$ , Dann gilt für  $X, Y \in \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}_f(M)^{\text{tan}}$* 
  - a)  $[X, Y] = \hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X$
  - b)  $X(\hat{g}(Z_1, Z_2)) = \hat{g}(\hat{\nabla}_X Z_1, Z_2) + \hat{g}(Z_1, \hat{\nabla}_X Z_2)$  für  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}_f M, X \in \mathfrak{X}(M)$

*Beweis.* 1) und 2) folgt, da  $\hat{\nabla}$  kovariante Ableitung auf  $\hat{M}$  ist.

3a) Nach Definition und unter Benutzung der Torsionsfreiheit von  $\hat{\nabla}$  gilt

$$\begin{aligned} (\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X)(x_0) &= (\hat{\nabla}_{\hat{X}_{x_0}} \hat{Y}_{x_0} - \hat{\nabla}_{\hat{Y}_{x_0}} \hat{X}_{x_0})(f(x_0)) \\ &\stackrel{\text{torsionsfrei}}{=} [\hat{X}_{x_0}, \hat{Y}_{x_0}](f(x_0)) \end{aligned}$$

Da weiter gilt

$$\begin{aligned} df_x(X(x)) &= \hat{X}_{x_0}(f(x)) & \forall x \in U(x_0) \\ df_x(Y(x)) &= \hat{Y}_{x_0}(f(x)) & \forall x \in U(x_0) \end{aligned}$$

, sind also  $X$  und  $\hat{X}_{x_0}$  sowie  $Y$  und  $\hat{Y}_{x_0}$   $f|_{U(x_0)}$ -verknüpft. Damit sind aber auch  $[X, Y]$  und  $[\hat{X}_{x_0}, \hat{Y}_{x_0}]$   $f|_{U(x_0)}$ -verknüpft. Bei Identifizierung von  $\mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}_f(M)^{\text{tan}}$  gilt dann:

$$\begin{aligned} (\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X)(x_0) &= [\hat{X}_{x_0}, \hat{Y}_{x_0}](f(x_0)) \\ &= df_{x_0}([X, Y](x_0)) \simeq [X, Y](x_0) \end{aligned}$$

3b) Wiederum unter Benutzung der Definition und der Tatsache, dass  $\hat{\nabla}$  metrisch ist folgt

$$\begin{aligned} &\hat{g}(\hat{\nabla}_X Z_1, Z_2)(x_0) + \hat{g}(Z_1, \hat{\nabla}_X Z_2)(x_0) \\ &= \hat{g}(\hat{\nabla}_{\hat{X}_{x_0}} \hat{Z}_{1x_0}, \hat{Z}_{2x_0})(f(x_0)) + \hat{g}(\hat{Z}_{1x_0}, \hat{\nabla}_{\hat{X}_{x_0}} \hat{Z}_{2x_0})(f(x_0)) \\ &\stackrel{\text{metrisch}}{=} \hat{X}_{x_0}(\hat{g}(\hat{Z}_{1x_0}, \hat{Z}_{2x_0})(f(x_0))) \quad (*) \end{aligned}$$

Sei  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = x_0, \gamma'(0) = X(x_0)$ . Dann ist  $f \circ \gamma : I \rightarrow \hat{M}$  mit

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)(0) &= f(x_0) \\ (f \circ \gamma)'(0) &= df_{x_0}(X(x_0)) = \hat{X}_{x_0}(f(x_0)) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{d}{dt} \underbrace{(\hat{g}_{f \circ \gamma(t)}(\underbrace{\hat{Z}_{1x_0}(f \circ \gamma(t))}_{Z_1(\gamma(t))}, \underbrace{\hat{Z}_{2x_0}(f \circ \gamma(t))}_{Z_2(\gamma(t))}))}_{=g_{\gamma(t)}} \Big|_{t=0} \\ &= X(\hat{g}(Z_1, Z_2))(x_0) \end{aligned}$$

□

Sei  $\hat{\nabla}$  eine kovariante Ableitung auf  $\hat{M}$ . Dann definiert  $\hat{\nabla}$  eine kovariante Ableitung auf  $Tf$  und auf  $Nf$  (beides sind Vektorbündel über  $M$ ).

$$\begin{aligned} \nabla^{\text{tan}} : \Gamma(Tf) &\rightarrow \Gamma(T^*M \otimes Tf) \\ Y &\mapsto \nabla^{\text{tan}} Y \quad , \nabla_X^{\text{tan}} := \text{tan}(\hat{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

ist die induzierte kovariante Ableitung auf  $Tf$ .

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \Gamma(Nf) &\rightarrow \Gamma(T^*M \otimes Nf) \\ \eta &\mapsto \nabla^\perp \eta \quad , \nabla_X^\perp \eta := \text{nor}(\hat{\nabla}_X \eta) \end{aligned}$$

ist die induzierte kovariante Ableitung auf  $Nf$ .

**Definition.** Die Abbildung  $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  heißt auch 1. Fundamentalform der Immersion  $f$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{II} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \text{II}(X, Y) := \text{nor}(\hat{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

heißt 2. Fundamentalform von  $f$ .

**Satz 6.4.** Sei  $f : (M, g) \rightarrow (\hat{M}, \hat{g})$  eine semi-Riemannsche Immersion,  $\hat{\nabla}$  der LC-Zusammenhang von  $\hat{g}$  und  $\nabla$  der LC-Zusammenhang von  $g$ . Dann gilt

$$1) \nabla_X Y = \tan(\hat{\nabla}_X Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}_f(\hat{M})^{\text{tan}}$$

2) II ist ein symmetrisches  $(2, 0)$ -Tensorfeld

$$3) \hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \text{II}(X, Y) \text{ Gauß-Formel}$$

*Beweis.*

1) zu zeigen:  $\tan(\hat{\nabla}_X Y) = \nabla_X^{\text{tan}} Y$  ist eine metrische, torsionsfreie, kovariante Ableitung auf  $TM$  (bei Identifizierung  $TM \simeq Tf$ )

– kovariante Ableitung nach Lemma 6.3

– torsionsfrei:

$$\tan(\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X) = \tan([X, Y]) = [X, Y]$$

– metrisch:

$$\begin{aligned} &\hat{g}(\tan(\hat{\nabla}_X Y_1), Y_2) + \hat{g}(Y_1, \tan(\hat{\nabla}_X Y_2)) \\ &= \hat{g}(\hat{\nabla}_X Y_1, Y_2) + \hat{g}(Y_1, \hat{\nabla}_X Y_2) \\ &\stackrel{\text{Lemma 6.3}}{=} X(\hat{g}(Y_1, Y_2)) \end{aligned}$$

$$2) \text{II}(X, Y) - \text{II}(Y, X) = \text{nor}(\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X) = \text{nor}([X, Y]) = 0$$

3) nach Definition

□

**Definition.** Sei  $A_\eta : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  das  $(1, 1)$ -Tensorfeld mit

$$g(A_\eta X, Y) = \text{II}_\eta(X, Y) := g(\text{II}(X, Y), \eta) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

$A_\eta$  heißt Weingarten-Operator von  $f$  bezüglich  $\eta$ .

**Bemerkung:**  $A_\eta$  ist selbstadjungiert bezüglich  $g$ , das heißt

$$g(A_\eta(X), Y) = g(X, A_\eta(Y)).$$

**Satz 6.5.** (Weingarten-Formel) Sei  $\eta \in \Gamma(Nf)$ . Dann ist  $A_\eta X = -\tan \tilde{\nabla}_X \eta \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$ . Das heißt:

$$\tilde{\nabla}_X \eta = \underbrace{-A_\eta X}_{\text{tangential}} + \underbrace{\nabla_X^\perp \eta}_{\text{normal}}$$

*Beweis.* Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} g(A_\eta X, Y) &= \text{II}_\eta(X, Y) \\ &= \tilde{g}(\text{II}(X, Y), \eta) \\ &\stackrel{\text{Gaußformel}}{=} \tilde{g}(\underbrace{\tilde{\nabla}_X Y}_{\text{tangential}} - \underbrace{\nabla_X Y}_{\text{normal}}, \underbrace{\eta}_{\text{normal}}) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \eta) \\ &\stackrel{\tilde{\nabla} \text{ metrisch}}{=} X(\tilde{g}(Y, \eta)) - \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X \eta) \\ &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \eta, Y) \\ &= \tilde{g}(-\tan(\tilde{\nabla}_X \eta), Y) \end{aligned}$$

Und weil  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  beliebig war folgt damit die Behauptung.  $\square$

Vergleich der Krümmungstensoren von  $(M, g)$  und  $(\tilde{M}, \tilde{g})$

**Satz 6.6.** (Gauß-Gleichung) Sei  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  isometrische Immersion,  $\nabla$  der LC-Zsh. von  $(M, g)$  und  $\tilde{\nabla}$  der LC-Zsh. von  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . Dann gilt für  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ :

- (1)  $\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z = \mathcal{R}^\nabla(X, Y)Z + (\tilde{\nabla}_X \text{II})(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \text{II})(X, Z)$ , wobei  $(\tilde{\nabla}_X \text{II})(Y, Z) := \tilde{\nabla}_X(\text{II}(Y, Z)) - \text{II}(\nabla_X Y, Z) - \text{II}(Y, \nabla_X Z)$ .
- (2)  $\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y, Z, W) = \mathcal{R}(X, Y, Z, W) + \tilde{g}(\text{II}(Y, W), \text{II}(X, Z)) - \tilde{g}(\text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z))$ .
- (3) Sei  $E \subset T_x M$  nicht-ausgearteter Unterraum und  $\tilde{E} = df_x(E) \subset T_{f(x)} \tilde{M}$ . Dann gilt für die Schnittkrümmungen von  $(M, g)$  und  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ :

$$\tilde{K}_{\tilde{E}}(f(x)) = K_E(x) - \frac{\tilde{g}(\text{II}(v, v), \text{II}(w, w)) - \tilde{g}(\text{II}(v, w), \text{II}(v, w))}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2},$$

wobei  $E = \text{span}(v, w)$ .

*Beweis.* (1) Benutzen die Gauß-Formel  $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \text{II}(X, Y)$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
&= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \text{II}(Y, Z)) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \text{II}(X, Z)) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \text{II}([X, Y], Z) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + \text{II}(X, \nabla_Y Z) + \tilde{\nabla}_X (\text{II}(Y, Z)) \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_X Z - \text{II}(Y, \nabla_X Z) - \tilde{\nabla}_Y (\text{II}(X, Z)) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \text{II}(\nabla_X Y, Z) + \text{II}(\nabla_Y X, Z) \\
&= \mathcal{R}(X, Y)Z - (\tilde{\nabla}_Y \text{II})(X, Z) + (\tilde{\nabla}_X \text{II})(Y, Z)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{R}}(X, Y, Z, W) \\
&= \tilde{g}(\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z, W) \\
&= \tilde{g}(\mathcal{R}^{\nabla}(X, Y)Z, W) + \tilde{g}((\tilde{\nabla}_X \text{II})(Y, Z), W) - \tilde{g}((\tilde{\nabla}_Y \text{II})(X, Z), W) \\
&= g(\mathcal{R}^{\nabla}(X, Y)Z, W) + \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X (\text{II}(Y, Z)), W) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Y (\text{II}(X, Z)), W) \\
&= \mathcal{R}(X, Y, Z, W) + X \underbrace{(\tilde{g}(\text{II}(Y, Z), W))}_{=0} - \tilde{g}(\text{II}(Y, Z), \tilde{\nabla}_X W) \\
&\quad - Y \underbrace{(\tilde{g}(\text{II}(X, Z), W))}_{=0} + \tilde{g}(\text{II}(X, Z), \tilde{\nabla}_Y W) \\
&= \mathcal{R}(X, Y, Z, W) - g(\text{II}(Y, Z), \underbrace{\text{nor } \tilde{\nabla}_X W}_{=\text{II}(X, W)}) + \tilde{g}(\text{II}(X, Z), \underbrace{\text{nor } \tilde{\nabla}_Y W}_{=\text{II}(Y, W)})
\end{aligned}$$

(3)

$$K_E(x) = \frac{\mathcal{R}_x(v, w, w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

Dann folgt die Behauptung durch Einsetzen von Punkt (2).

□

**Satz 6.7.** (*Codazzi-Minardi-Gleichung*)

$$\text{nor } \mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z = (\nabla_X^\perp \text{II})(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \text{II})(X, Z)$$

für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}_f(M) \leftrightarrow \mathfrak{X}_f(M)$ . Hierbei heißt

$$(\nabla_X^\perp \text{II})(Y, Z) := \nabla_X^\perp (\text{II}(Y, Z)) - \text{II}(\nabla_X Y, Z) - \text{II}(Y, \nabla_X Z).$$

*Beweis.* Nach Punkt (1) aus Satz 6.6 gilt:

$$\begin{aligned} \text{nor}(\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z) &= \nabla^\perp(\text{II}(Y, Z)) - \text{II}(\nabla_X Y, Z) - \text{II}(Y, \nabla_X Z) - \\ &\quad (\nabla^\perp(\text{II}(X, Z)) - \text{II}(\nabla_Y X, Z) - \text{II}(X, \nabla_Y Z)) \\ &= (\nabla_X^\perp \text{II})(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \text{II})(X, Z) \end{aligned}$$

□

**Satz 6.8.** (*Ricci-Gleichung*)

(1)  $\forall \eta \in \mathfrak{X}_f(M)^\perp \simeq \Gamma(Nf), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\text{nor}(\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)\eta) = \mathcal{R}^{\nabla^\perp}(X, Y)\eta + \text{II}(A_\eta X, Y) - \text{II}(X, A_\eta Y)$$

(2)  $\forall \eta, \xi \in \mathfrak{X}_f(M)^\perp \simeq \Gamma(Nf), \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\tilde{\mathcal{R}}(X, Y, \eta, \xi) = \tilde{g}(\mathcal{R}^{\nabla^\perp}(X, Y)\eta, \xi) + g(A_\eta(X), A_\xi(Y)) - g(A_\xi(X), A_\eta(Y))$$

*Beweis.* Benutzen die Weingarten-Formel  $\tilde{\nabla}_X \eta = -A_\eta(X) + \nabla_X^\perp \eta$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)\eta &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y \eta - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X \eta - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}\eta \\ &= \tilde{\nabla}_X(\nabla_X^\perp \eta - A_\eta(X)) - \tilde{\nabla}_Y(\nabla_X^\perp \eta - A_\eta(X)) - \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta + A_\eta([X, Y]) \\ &= \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \eta - A_{\nabla_Y^\perp \eta}(X) - \tilde{\nabla}_X(A_\eta(Y)) - \\ &\quad \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \eta + A_{\nabla_X^\perp \eta}(Y) + \tilde{\nabla}_Y(A_\eta(X)) - \\ &\quad \nabla_{[X, Y]}^\perp \eta + A_n([X, Y]) \\ &= \mathcal{R}^{\nabla^\perp} - \text{II}(X, A_\eta Y) + \text{II}(Y, A_\eta(X)) + \text{tan.-Komponente} \end{aligned}$$

Also

$$\text{nor} \mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)\eta = \mathcal{R}^{\nabla^\perp}(X, Y)\eta - \text{II}(X, A_n(Y)) + \text{II}(Y, A_n(X)).$$

Und Punkt (2) folgt aus der Definition des (4, 0)-Tensors  $\mathcal{R}$ .

□

**Bemerkung:** Für den Tangentialteil von  $\mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)\eta$  gilt damit nach den vorigen Formeln:

$$\text{tan} \mathcal{R}^{\tilde{\nabla}}(X, Y)\eta = A_{\nabla_X^\perp \eta}(Y) - A_{\nabla_Y^\perp \eta}(X) - (\nabla_X A_\eta)(Y) + (\nabla_Y A_\eta)(X).$$

(Wegen Schiefsymmetrie des (4, 0)-Krümmungstensors)

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  eine semi-Riemannschen MF konstanter Schnittkrümmung  $K$  ist. In diesem Fall gilt dann:

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = K \cdot (\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Z})\tilde{Y})$$

für alle  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ . Daher gilt für  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \simeq \mathfrak{X}_f(M)^{tan}$ :

$$\text{nor}(\tilde{\mathcal{R}}(X, Y)Z) = 0$$

und für  $\eta \in \Gamma(Nf)$ :

$$\tilde{\mathcal{R}}(X, Y)\eta = 0.$$

**Satz 6.9.** *Sei  $f : (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  eine isometrische Immersion und es habe  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  die konstante Schnittkrümmung  $K$ . Dann gilt:*

(1) (Gauß-Gleichung) Für alle  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y, Z, W) &= K \cdot (g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)) \\ &\quad + \tilde{g}(\text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z)) - \tilde{g}(\text{II}(Y, W), \text{II}(X, Z)) \end{aligned} \quad (\text{K1})$$

(2) (Codazzi-Minardi-Gleichung) Für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  gilt:

$$(\nabla_X^\perp \text{II})(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \text{II})(X, Z) \quad (\text{K2})$$

(3) (Ricci-Gleichung) Für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\eta \in \Gamma(Nf)$  gilt:

$$\mathcal{R}^{\nabla^\perp}(X, Y)\eta = \text{II}(X, A_\eta(Y)) - \text{II}(A_\eta(X), Y) \quad (\text{K3})$$

Diese drei Gleichungen sind Gleichungen für folgende Objekte:

$$(Nf, \nabla^\perp, \text{II}, h := \tilde{g}|_{Nf \times Nf})$$

**Satz 6.10.** (Hauptsatz für isometrische Immersionen in Räumen konstanter Krümmung)

- Sei  $(M^n, g)$  eine einfach zusammenhängende semi-Riemannsche MF.
- Sei  $E$  ein Vektorbündel vom Rang  $k$  über  $M$ .
- Sei  $\nabla^E$  kovariante Ableitung auf  $E$ .
- Sei  $h$  Bündelmetrik auf  $E$  (das heißt  $h_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}$  ist für alle  $x \in M$  ein Skalarprodukt mit konstanter Signatur  $(k_1, k_2)$ ), sodass  $\nabla^E$  metrisch bezüglich  $h$  ist.
- Sei  $\text{II}^E : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E)$  symmetrisches  $(2, 0)$ -Tensorfeld mit Werten in  $E$ .

Weiterhin erfüllen die Objekte  $(E, \nabla^E, h, \text{II}^E)$  die Gleichungen (K1), (K2), (K3).

(1) Dann existiert eine isometrische Immersion

$$f : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M^{n+k}}, \tilde{g}),$$

wobei  $(\widetilde{M^{n+k}}, \tilde{g})$  ein Raum konstanter Schnittkrümmung der Dimension  $n + k$  ist, der einfach zusammenhängend ist und vollständig ist. Und es existiert ein Vektorraum-Isomorphismus  $\phi : E \rightarrow Nf$ , so dass für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  und für alle  $\eta, \xi \in \Gamma(E)$ :

- $\tilde{g}(\phi(\eta), \phi(\xi)) = h(\eta, \xi)$

- $\nabla_X^\perp \phi(\eta) = \phi(\nabla_X^E \eta)$
- $\text{II}(X, Y) = \phi(\text{II}^E(X, Y))$ .

(2) Seien  $f_1, f_2 : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}^{n+k}, \widetilde{g})$  zwei solche isometrischen Immersionen. Dann existiert eine Isometrie  $\tau : (\widetilde{M}^{n+k}, \widetilde{g}) \rightarrow (\widetilde{M}^{n+k}, \widetilde{g})$  derart, dass

$$f_1 = \tau \circ f_2.$$

Den Beweis findet man zum Beispiel in:

- M. Dajczer: *Submanifolds and Isometric Immersion*, Publ. and Perish, 1990
- Ch. Bär, P. Gauduchon, A. Moroianu: *Generalized cylinders in semi-Riemannian and Spin geometry*, Math. Z., 2005

*Beweis.* Wir besprechen hier eine andere Beweisidee:

Für  $K = 0$ :  $\widetilde{M}^N \simeq \mathbb{R}^N$  mit flacher Riemannscher Metrik. Betrachte das

Vektorbündel  $F := TM \oplus E$  mit  
Bündelmetrik  $k := g \oplus h$ .

Definiere kovariante Ableitung  $\nabla^F$  auf dem Vektorbündel  $F$  durch:

$$\nabla_X^F = \begin{pmatrix} \nabla_X^g & -A^E(X) \\ \text{II}^E(X, \cdot) & \nabla_X^E \end{pmatrix}, \text{ d.h.} \\ \nabla_X^F \begin{pmatrix} Y \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_X^g Y & -A_\xi^E(X) \\ \text{II}^E(X, Y) & \nabla_X^E(\xi) \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

- (1)  $RR^{\nabla^F} = 0$  (wegen (K1), (K2), (K3))
- (2) Dann existieren in  $F$  globale Schnitte  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ , so dass
  - a)  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x))$  Basis in  $F_x$  für alle  $x \in M$ ,
  - b)  $\nabla^F \varphi_i \equiv 0$  für  $i = 1, \dots, N$  (weil  $M$  einfach zsh.),
  - c) Sei  $\alpha \in \Omega^1(M, \mathbb{R}^N)$  die 1-Form

$$\alpha(X) := \begin{pmatrix} h(X, \varphi_1) \\ \vdots \\ h(X, \varphi_N) \end{pmatrix}$$

für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Dann gilt:

- a)  $\alpha$  ist injektiv,
- b)  $d\alpha = 0$ .

- (3) Da  $M$  einfach zsh. ist, gilt nach dem Poincaré-Lemma: Es existiert ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^N)$  mit  $df = \alpha$ .
- (4) Man zeigt, dass  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  die gesuchte Immersion ist.

□