# Kapitel 10

# Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Dozentin: Prof. Dr. Helga Baum

Nach Vorlesungen im Wintersemester 2001/2002 (1. Teil von Analysis III)
und im Wintesemester 2007/08 (2. Teil von Analysis IIIa)

Die erste Fassung des Skriptes wurde von Thomas Leistner ausgearbeitet.

Letzte Änderungen und Ergänzungen: 12.04.2008 von Helga Baum.

# Inhaltsverzeichnis

## 10.1 Aufgabenstellung und allgemeine Begriffe

Wir stellen uns das folgende Problem:

Gegeben sei eine Abbildung $F : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{k-\text{mal}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $k$ Vektoren $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ . Wir wollen eine Abbildung der Klasse $C^k$

$$x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

finden, so dass folgendes gilt:

1. Die $k$–te Ableitung von $x$ erfülle
$$x^{(k)}(t) = F(x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), t) \tag{10.1}$$
für alle $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$.
2. An der Stelle $t_0$ gelte
$$\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & a_0, \\ x^{(1)}(t_0) & = & a_1, \\ & \vdots & \\ x^{(k-1)}(t_0) & = & a_{k-1}. \end{array}\right\} \tag{10.2}$$

(10.1) heißt *gewöhnliche Differentialgleichung $k$–ter Ordnung*, (10.2) heißen *Anfangsbedingungen für die Differentialgleichung (10.1)* und (10.1) mit (10.2) heißt *Anfangswertproblem.*

Wir benutzen auch die folgende **Kurzform** für (10.1):

$$x^{(k)} = F(x, x', \ldots, x^{(k-1)}, t).$$

Im folgenden schreiben wir auch 'DGL' für 'Differentialgleichung' und 'AB' für 'Anfangsbedingung'.

Man ist nun interessiert an den folgenden Fragestellungen bezüglich eines Differentialgleichungsproblems:

1. Unter welchen Bedingungen an $F$ existieren Lösungen?
2. Wann ist eine solche Lösung eindeutig?
3. Welche Eigenschaften haben die Lösungen, z.B. wie hängen sie von den Anfangswerten ab, wie lange existieren Sie (für welche Parameter $t$), gibt es periodische Lösungen ($x(t) = x(t + T_0)$), gibt es stabile Lösungen ($x(t) = const$). ?
4. Wie findet man Lösungen? Welche Typen von DGL lassen sich exakt lösen, d.h. in Termen elementarer Funktionen ausdrücken, welche numerischen Verfahren zur Lösung von DGL gibt es?

Differentialgleichungen trifft man in vielen Bereichen der Mathematik und in vielen Anwendungen. Wir erinnern hier an ein Beispiel aus der Mechanik:
Die Bewegung eines Punktes im Raum wir beschrieben durch eine Kurve im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & x(t) := \text{Lage des Punktes zum Zeitpunkt } t. \end{array}$$

$x'(t)$ gibt dann die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t$ und $x''(t)$ die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t$ an. Auf den Punkt wirke eine Kraft $F$, die vom Ort, der Zeit und der Geschwindigkeit des Punktes abhängt, das heißt $F = F(x, x', t)$. Das Newtonsche Bewegungsgesetz der Mechanik hat dann folgende Form

$$m \cdot x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Unter der Annahme, dass $F$, $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ bekannt sind, versucht man, die Bewegungskurve des Punktes zu bestimmen. Dies ist ein Anfangswertproblem der Form

$$x''(t) = \frac{1}{m} F(x, x', t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

Viele weitere Beispiele aus der Mechanik, der Populationsdynamik, bei chemischen Reaktionen, elektrischen Schaltkreisen usw. finden Sie im Buch von H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag Stuttgart.

Beim Studium von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man sich im Prinzip auf Gleichungen 1. Ordnung beschränken, da man jede Differentialgleichung $k$–ter Ordnung in $n$ Variablen auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung, nun allerdings in $k \cdot n$ Variablen transformieren kann. Dieses Verfahren sei nun kurz beschrieben:

**Reduktion einer Differentialgleichung $k$–ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:**

Gegeben sei eine Abbildung $F : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{k-\mathrm{mal}} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Wir betrachten eine neue Abbildung

$$\begin{aligned} F^* : \mathbb{R}^{n\cdot k} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\cdot k}, \\ F^*(\underbrace{y_0, \ldots, y_{k-1}}_{\in \mathbb{R}^{n\cdot k}}, t) &:= (y_1, \ldots, y_{k-1}, F(y_0, \ldots, y_{k-1}, t)), \end{aligned}$$

wobei $y_j \in \mathbb{R}^n$ für alle $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ sei.

**Satz 10.1** *(a) Ist $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems $k$–ter Ordnung*

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)}(t) &= F(x(t), x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k-1)}(t), t) \\ x(t_0) &= a_0 \\ x'(t_0) &= a_1 \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) &= a_{k-1}, \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

*so ist* $y : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

$$y(t) := (x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))$$

*eine Lösung des Anfangswertproblems erster Ordnung*

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= F^*(y(t), t) \\ y(t_0) &= (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}). \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

*(b) Ist umgekehrt $y(t) = (y_0(t), \ldots, y_{k-1}(t))$ eine Lösung von (10.4), so ist $y_0(t)$ eine Lösung von (10.3).*

**Beweis**: Nach Definition von $F^*$ ist $y'(t) = F^*(y(t), t)$ äquivalent zu

$$y_0'(t) = y_1(t),\ y_1'(t) = y_2(t),\ \ldots,\ y_{k-2}'(t) = y_{k-1}(t),\ y_{k-1}'(t) = F(y_0, \ldots, y_{k-1}, t).$$

Die Behauptung folgt dann sofort durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} x(t) \text{ löst } (10.3) &\implies y(t) = (x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)) \text{ löst } (10.4) \\ y(t) \text{ löst } (10.4) &\implies x(t) = y_0(t) \text{ löst } (10.3). \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung**: Die gleichen Aussagen gelten, wenn $F$ nur auf einer offenen Menge von $\mathbb{R}^{n\cdot k}\times\mathbb{R}$ definiert ist.

**Beispiel für eine Reduktion:** Sei $M$ ein Massenpunkt an einer Feder. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Feder auf der $x$–Achse liegt und $M$ sich in der Gleichgewichtslage in $x = 0$ befindet. Dehnt man die Feder horizontal oder drückt sie zusammen, so wirkt eine Rückstellkraft $K$, die die Feder in die Gleichgewichtslage bringen will. Man stellt fest, dass $K(x)$ proportional zu $-x$ ist, wobei $K(x)$ zum Nullpunkt gerichtet ist, das heißt $K(x) = -k^2 x$ für $k$ konstant und man erhält die Schwingungsgleichung ohne Reibung:

$$m\ x''(t) = -k^2 x. \tag{10.5}$$

Wir haben also folgende Abbildung zu betrachten

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ F(x_1, x_2, t) &= -\frac{k^2}{m} x_1, \end{aligned}$$

das heißt (10.5) entspricht der DGL zweiter Ordnung $x''(t) = F(x, x', t)$. Wir führen nun (10.5) auf eine DGL erster Ordnung zurück

$$\begin{aligned} F^* : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ F^*(y_0, y_1, t) &= (y_1, F(y_0, y_1, t)) = (y_1, -\frac{k^2}{m} y_0) \end{aligned}$$

und erhalten $(y_0'(t), y_1'(t)) = (y_1(t), -\frac{k^2}{m} y_0(t))$. Das heißt, $x(t)$ löst genau dann (10.5), wenn $(y_0(t), y_1(t)) := (x(t), x'(t))$ folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung löst

$$\begin{pmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -\frac{k^2}{m} y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine DGL der Form

$$y'(t) = A \cdot y(t),$$

wobei $A$ eine konstante Matrix ist. Solche DGL'en nennt man DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten. Das Verfahren zur Lösung solcher DGL werden wir in dieser Vorlesung kennenlernen.

**Geometrische Interpretation autonomer Differentialgleichungen**
Wir betrachten jetzt einen speziellen Typ von DGL'en.

**Definition 10.1** *Eine DGL der Form $x^{(k)}(t) = F(x(t), \ldots, x^{(k-1)}(t))$ heißt autonom (das heißt, $F$ hängt nicht mehr von $t$ selbst ab).*

Die Lösung einer solchen DGL kann man wie folgt geometrisch interpretieren.

**Definition 10.2** *Ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $U$ heißt Phasenraum des Vektorfeldes $X$.*

**Definition 10.3** *Eine $C^1$–Kurve $\gamma_{x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$ heißt Integralkurve des Vektorfeldes $X$ durch $x_0 \in U$, falls gilt*

$$\begin{aligned} X(\gamma_{x_0}(t)) &= \gamma_{x_0}'(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \textit{und} \\ \gamma_{x_0}(0) &= x_0. \end{aligned}$$

D.h. $X(\gamma_{x_0}(t))$ ist gleich dem Tangentialvektor der Kurve $\gamma_{x_0}$ in $t$.
Zur Erinnerung: Der Tangentialvektor an eine Kurve $\gamma$ im Parameter $t$ ist definiert als

$$\gamma'(t) := \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} \ \in \ \mathbb{R}^n.$$

Die Integralkurven eines Vektorfeldes $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind also Lösungen der autonomen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X(\gamma(t)) \ \text{ mit der Anfangsbedingung} \\ \gamma(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Die Lösungen einer autonomen DGL erster Ordnung interpretiert man geometrisch als die Integralkurven eines Vektorfeldes in seinem Phasenraum. Die Integralkurven heißen deshalb auch die Phasenkurven der autonomen DGL.

**Beispiel 1**: Wir betrachten das Vektorfeld $X$ auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax, \end{aligned}$$

wobei $a$ konstant sei. Dann sind die Integralkurven von $X$ Lösungen von $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) = a\gamma(t)$ mit $\gamma(0) = x_0$. Wir berechnen nun $\gamma(t)$. Es gilt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = (\ln(|\gamma(t)|)' = a \ \text{ und daher } \ \ln(|\gamma(t)|) = at + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Somit ist $|\gamma(t)| = e^{at} \cdot e^c$, also $\gamma(t) = e^{at} \cdot \tilde{c}$ und folglich $\gamma(t) = e^{at} \cdot x_0$ wegen $\gamma(0) = x_0$.

**Beispiel 2**: Wir betrachten das Vektorfeld $X$ auf $\mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Die Integralkurven von $X$ durch $a_0 \in \mathbb{R}^2$ sind die Kurven

$$\gamma_{a_0}(t) = e^t a_0,$$

denn es ist $\gamma_{a_0}(0) = a_0$ und $\gamma'_{a_0}(t) = e^t a_0 = X(\gamma_{a_0}(t))$.

**Beispiel 3**: Wir betrachten das Vektorfeld $X$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (-x_2, x_1) \end{aligned}$$

Die Integralkurven von $X$ durch $a_0 = r_0 e^{it_0} \in \mathbb{R}^2$ sind die Kreise

$$\gamma(t) = (r_0 \cos(t + t_0), r_0 \sin(t + t_0)),$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \gamma_{a_0}(0) &= (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0) &= r_0 e^{it_0} \ \text{ und} \\ \gamma'_{a_0}(t) &= (-r_0 \sin(t + t_0), r_0 \cos(t + t_0)) &= X(\gamma_{a_0}(t)). \end{aligned}$$

## 10.2 Elementare Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^1$

In diesem Abschnitt sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und wir betrachten eine DGL im $\mathbb{R}^1$ der Form $x'(t) = F(x,t)$.

### 10.2.1 Trennung der Variablen

**Definition 10.4** *Eine DGL mit getrennten Variablen ist eine DGL im $\mathbb{R}^1$ folgenden Typs*

$$\left.\begin{array}{rcl} x'(t) &=& f(t) \cdot g(x(t)) \\ x(t_0) &=& x_0, \end{array}\right\} \tag{10.6}$$

*wobei $f : I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I_2 \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, $g_{|I_2} \neq 0$, $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$ und $I_1, I_2$ offene Intervalle.*

**Formales Vorgehen:** Man ordnet (10.6) nach $x$ und $t$ und integriert beide Seiten, das heißt

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \overset{(10.6)}{\Longrightarrow} \frac{dx}{g(x)} = f(t)\,dt \Longrightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt.$$

Nun kann man $x(t)$ berechnen. Denn sei $G$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(x)}$, so gilt

$$G(x(t)) = G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dx. \tag{10.7}$$

Da $G$ stetig und streng monoton ist, existiert $G^{-1}$. Wendet man nun $G^{-1}$ auf (10.7) an, so erhält man $x(t)$. (10.7) nennt man die implizite Form der Lösung.
Dieses Verfahren wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt:

**Satz 10.2** *Sei das Anfangswertproblem (10.6) mit getrennten Variablen gegeben und $G$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ auf $I_2$. Dann besitzt (10.6) auf einem hinreichend kleinen Intervall $J \subset I_1$ um $t_0$ eine Lösung. Diese ist gegeben durch*

$$x(t) = G^{-1}(G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds).$$

**Bemerkung**: Der Definitionsbereich von $x$ ist durch diejenigen $t$ gegeben, für die

$$G(x_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \quad \in Im(G).$$

**Beweis von Satz 10.2**: Es gilt $x'(t) = f(t) \cdot g(x(t))$. Da $x$ stetig ist und $x(t_0) = x_0 \in I_2$, existiert ein $\delta > 0$, so dass $x(t) \in I_2$ für alle $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Wir integrieren die Gleichung $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$ von $t_0$ bis $T$

$$\int_{t_0}^{T} \frac{x'(t)}{g(x(t))}\,dt = \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt.$$

In dieser Gleichung substituieren wir nun $x = x(t)$ und $dx = x'(t)\,dt$ und erhalten

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{g(x)} & = & \displaystyle\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt \\ \| & & \\ G(x(T)) - G(x_0) & & \text{für } G \text{ die Stammfunktion von } \dfrac{1}{g}. \end{array}$$

Da nun $\frac{1}{g}$ stetig ist und ohne Nullstellen erhält man $\frac{1}{g} > 0$ oder $\frac{1}{g} < 0$. D.h. aber, dass $G$ streng monoton ist und damit injektiv, so dass $G^{-1} : Im(G) \longrightarrow I_2$ existiert. Damit hat man

$$x(T) = G^{-1}(G(x_0) + \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt).$$

$x(T)$ ist definiert für diejenigen $T$, für die $G(x_0 + \int_{t_0}^{T} f(t)\,dt) \in Im(G)$. $\square$

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

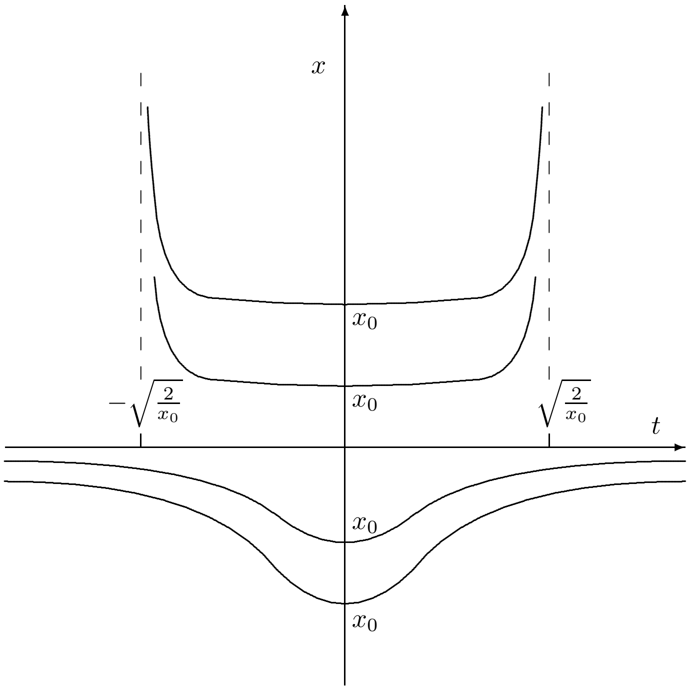
$$x' = tx^2 \text{ mit der Anfangsbedingung } x(0) = x_0. \tag{10.8}$$

Ist $x_0 = 0$, so ist $x \equiv 0$ Lösung auf $\mathbb{R}$. Sei nun $x_0 \neq 0$. Wir nehmen zur Lösung die Trennung der Variablen vor, das heißt $\frac{dx}{x^2} = t\,dt$. Damit ist

$$\begin{array}{ccccc} \int_0^T t\,dt & = & \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^T & = & \frac{1}{2}T^2 \\ \| & & & & \\ \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{x^2} & = & \left[-\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x(T)} & = & -\frac{1}{x(T)} + \frac{1}{x_0}. \end{array}$$

Also ist $x(T) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{T^2}{2}}$ die Lösung des Anfangswertproblems (10.8).

Diese Lösung ist definiert auf $\mathbb{R}$, falls $x_0 < 0$ und auf dem Intervall $(-\sqrt{\frac{2}{x_0}}, \sqrt{\frac{2}{x_0}})$, falls $x_0 > 0$. Das heißt, obwohl die rechte Seite der DGL $F(x,t) = tx^2$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist, kann man nicht alle Lösungen stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Ist der Anfangswert $x_0 > 0$, so strebt die Lösung schon in endlicher Zeit gegen $\infty$. Ist $x_0 < 0$, so strebt die Lösung bei $t \to \infty$ gegen einen Gleichgewichtszustand 0.



### 10.2.2 Euler–homogene Differentialgleichungen

**Definition 10.5** *Eine* <u>*(Euler)–homogene DGL*</u> *ist eine DGL im* $\mathbb{R}^1$ *folgenden Typs*

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \tag{10.9}$$

*wobei* $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig ist. Kurzform:* $x' = f(\frac{x}{t})$.

**Lösungsmethode:** Wir benutzen die Substitution $u(t) = \frac{x(t)}{t}$. Dann erhalten wir

$$u' \;=\; \frac{x' \cdot t - x}{t^2} \;=\frac{1}{t}\left(x'(t) - \frac{x}{t}\right) \stackrel{(10.9) \text{ und Substitution}}{=} \frac{1}{t}\left(f(u) - u\right),$$

das heißt, löst $x(t)$ die Euler–homogene DGL (10.9), so löst $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ die DGL mit getrennten Variablen

$$u'(t) = \frac{1}{t}(f(u) - u). \tag{10.10}$$

Wir bestimmen also $u(t)$ mit der Methode der Trennung der Variablen aus (10.10). Dann löst $x(t) = t \cdot u(t)$ die Euler–homogene DGL (10.9), denn

$$x' \;=\; tu' + u \stackrel{(10.10)}{=} f(u) - u + u \;=\; f\left(\frac{x}{t}\right).$$

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL $x' = 1 + \frac{x}{t}$ mit der Anfangsbedingung $x(1) = x_0$, und wir suchen Lösungen auf $(0, \infty)$. Dann gilt

$$u(t) := \frac{x(t)}{t} \;\Longrightarrow\; u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t^2}(t + x - x) = \frac{1}{t}.$$

Somit ist $u'(t) := \frac{1}{t}$, $u(1) = x_0$ zu lösen. Die Lösung ist aber offensichtlich gegeben durch $u(t) = \ln(t) + x_0$. Folglich erhalten wir als Lösung für $x' = 1 + \frac{x}{t}$, $x(1) = x_0$:

$$x(t) = t(\ln(t) + x_0) \quad \forall t \in (0, \infty).$$

### 10.2.3 Die DGL der Form $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$

Zur Lösung dieser DGL betrachten wir verschiedene Fälle:
(1) Sei $c = \gamma = 0$. Dann gilt

$$x' = f\left(\frac{at + bx}{\alpha t + \beta x}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{x}{t}}{\alpha + \beta\frac{x}{t}}\right) = h\left(\frac{x}{t}\right).$$

Dies ist eine Euler–homogene DGL und mit der Substitution $u = \frac{x}{t}$ lösbar.
(2) Sei $\alpha = \beta = 0$. Dann gilt

$$x' = f\left(\frac{a}{\gamma}t + \frac{b}{\gamma}x + \frac{c}{\gamma}\right). \tag{10.11}$$

Wir nehmen folgende Substitution vor

$$z(t) = \frac{a}{\gamma}t + \frac{b}{\gamma}x(t) + \frac{c}{\gamma} \;\Longrightarrow\; z' = \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma}x'.$$

(10.11) geht somit über in eine DGL mit getrennten Variablen

$$z' = \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma}(f(z)) = h(z).$$

(3) Sei $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ und gelte

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = a\beta - \alpha b = 0,$$

das heißt die Zeilen sind linear abhängig. Somit existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $a = \lambda\alpha$ und $b = \lambda\beta$. Als zu lösende DGL erhalten wir

$$x' = f\left(\frac{\lambda(\alpha t + \beta x) + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right).$$

Substituieren wir durch $z(t) = \alpha t + \beta x$, so erhalten wir

$$z' = \alpha + \beta x' = \alpha + \beta\ f\left(\frac{\lambda z + c}{z + \gamma}\right).$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen.
(4) Sei nun

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rcl} ax_1 + bx_2 + c &=& 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma &=& 0. \end{array}\right\} \tag{10.12}$$

Nach Voraussetzung existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $(\xi,\eta)$ des Gleichungssystems (10.12). Wir nehmen die Substitution $s = t - \xi,\ v = x - \eta$ vor. Dann liefert jede Lösung der DGL

$$x' = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right) \tag{10.13}$$

eine transformierte Funktion $v(s) := x(s+\xi) - \eta$. Diese Funktion hat folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned} v'(s) \ = \ x'(s+\xi) \quad &= \quad f\left(\frac{a(s+\xi) + bx(s+\xi) + c}{\alpha(s+\xi) + \beta x(s+\xi) + \gamma}\right) \\ &= \quad f\left(\frac{a(s+\xi) + b(v+\eta) + c}{\alpha(s+\xi) + \beta(v+\eta) + \gamma}\right) \\ &\overset{10.12}{=} \quad f\left(\frac{as + bv}{\alpha s + \beta v}\right). \end{aligned} \tag{10.14}$$

Dies ist eine DGL vom Typ (1). Löst umgekehrt $v(s)$ (10.14), so löst $x(t) = v(t-\xi) + \eta$ (10.13).

### 10.2.4 Die exakte Differentialgleichung

**Definition 10.6** *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhänged und $P, Q \in C^1(U,\mathbb{R})$ zwei Abbildungen mit $Q \neq 0$ auf $U$. Es gelte:*

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \tag{10.15}$$

*Dann heißt die DGL*

$$x'(t) = -\frac{P(t,x(t))}{Q(t,x(t))} \tag{10.16}$$

*exakte Differentialgleichung. (10.15) ist die Integrabilitätsbedingung.*
*Kurzform:* $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}\ ,\ \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$.

**Satz 10.3** *Sei $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $C^2$–Funktion mit $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$ und $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$. Dann erhält man eine Lösung der exakten DGL (10.16) mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ durch Auflösen der Gleichung*

$$\phi(t, x) - \phi(t_0, x_0) = 0$$

*nach $x$.*

**Beweis:** Da $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) \neq 0$, kann man die Gleichung $\phi(t, x) - \phi(t_0, x_0) = 0$ in einer Umgebung von $(t_0, x_0)$ eindeutig nach $x$ auflösen (Satz über implizite Funktionen aus Analyis II). Das heißt, es existiert eine $C^1$–Funktion $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $x(t_0) = x_0$ und $\phi(t, x(t)) - \phi(t_0, x_0) = 0$. Differenzieren nach $t$ ergibt

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(t, x(t))}_{=P(t,x(t))} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(t, x(t))}_{=Q(t,x(t))} \cdot x'(t) = 0$$

und wir erhalten $x'(t) = -\frac{P(t,x(t))}{Q(t,x(t))}$. Somit erfüllt die Auflösung $x(t)$ die DGL. □

Wir fügen einen Kommentar zur Existenz einer Funktion $\phi$, wie sie im Satz 10.3 benötigt wird, an.

1. Aus der Forderung $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$ und $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$ erhält man notwendigerweise die Integrabilitätsbedingung an die DGL: $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial P}{\partial x_2}$.

2. Ist die Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ zusätzlich sternförmig, so ist die Integralilitätsbedingung $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ notwendig *und* hinreichend für die Existenz einer Abbildung $\phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ mit $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$ und $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$.
   Dies sieht der mit Differentialformen und dem Lemma von Poincare vertraute Leser (siehe Skript über Analysis auf Untermannigfaltigkeiten) folgendermaßen ein:
   Wir betrachten die 1-Form $\omega = P(x_1, x_2)\, dx_1 + Q(x_1, x_2)\, dx_2$ auf $U$. Für das Differential von $\omega$ gilt

   $$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x_2}\, dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

   Die 1-Form $\omega$ ist also genau dann geschlossen, wenn die Abbildungen $P$ und $Q$ die Integrabilitätsbedingung erfüllen. Da $U$ sternförmig ist, gibt es dann eine (bis auf Konstanten eindeutig bestimmte) Funktion $\phi$ auf $U$ mit $d\phi = \omega$. Da

   $$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\, dx_2,$$

   ergibt der Koeffizientenvergleich mit $\omega$: $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$ und $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$.

**Beispiel**: Wir betrachten die DGL

$$x' = -\frac{x + t + 1}{x + t} \tag{10.17}$$

mit $x(t_0) = x_0$ und $t_0 + x_0 > 0$. Wir lösen das Anfangswert-Problem auf der sternförmigen Menge $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 > 0\}$. Die DGL (10.17) ist exakt, denn es gilt

$$P(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1, \quad Q(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \text{ also } \frac{\partial P}{\partial x_2} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Es gibt also eine Abbildung $\phi$ wie im Satz 10.3, die wir nun bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= P(x_1,x_2) = x_1 + x_2 + 1 \qquad \text{und folglich}\\
\phi(x_1,x_2) &= \int \big(x_1 + x_2 + 1\big)\,dx_1 = \frac{x_1^2}{2} + x_1(x_2+1) + c_1(x_2)\\
\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= Q(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \qquad \text{und folglich}\\
\phi(x_1,x_2) &= \int \big(x_1 + x_2\big)\,dx_2 = \frac{x_2^2}{2} + x_1x_2 + c_2(x_1).
\end{aligned}$$

Durch Vergleich beider Formeln ergibt sich

$$\phi(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1x_2 + x_1 + const = \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 + x_1 + const.$$

Wir haben damit die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Funktion $\phi$ gefunden. Nun müssen wir die Gleichung $\phi(t,x) - \phi(t_0,x_0) = 0$, also

$$\frac{1}{2}(t+x)^2 + t - \frac{1}{2}(t_0+x_0)^2 - t_0 = 0$$

nach $x$ auflösen. Wir erhalten $(t+x)^2 = 2(t-t_0) + (t_0+x_0)^2$ und somit

$$x(t) = \sqrt{(t_0+x_0)^2 + 2(t_0-t)} - t,$$

da $x + t > 0$. $x(t)$ ist Lösung der gegebenen DGL und der Definitionsbereich von $x$ ist

$$\{t \in \mathbb{R} \mid t_0 + \frac{(t_0+x_0)^2}{2} \geq t\}.$$

**Verallgemeinerung:** Ist die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ für die DGL $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ nicht erfüllt, so kann die Exaktheit evtl. durch die Multiplikation mit einer Funktion $\lambda \in C^1(U)$ erreicht werden.

**Definition 10.7** *Eine Funktion $\lambda \in C^1(U)$, $\lambda \neq 0$ heißt integrierender Faktor (oder Eulerscher Multiplikator) der DGL $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$, falls*

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x_1}.$$

Existiert ein solcher integrierender Faktor $\lambda$, so kann man die exakte DGL $x' = -\frac{\lambda P(t,x)}{\lambda Q(t,x)}$ wie oben beschrieben lösen.

**Beispiel**: Sei $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1,\ x_2 > 0\}$. Wir betrachten die DGL

$$x' = -\frac{5t^4 + 2x^3}{3tx^2}. \tag{10.18}$$

Hier ist $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 6x_2^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 3x_2^2$, das heißt (10.18) ist nicht exakt. Aber die Funktion $\lambda(x_1,x_2) = x_1$ ist ein integrierender Faktor für die DGL (10.18). Somit können wir die exakte DGL $x' = -\frac{5t^5 + 2tx^3}{3t^2x^2}$ nach Satz 10.3 lösen.

### 10.2.5 Die lineare Differentialgleichung

**Definition 10.8** *Eine lineare DGL ist eine DGL der Form*

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \tag{10.19}$$

*wobei $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem zusammenhängenden offenen Intervall $I$ sind. Ist $q(t) \equiv 0$ so heißt $x'(t) = p(t)x(t)$ homogene, lineare DGL. $x' = p(t)x + q(t)$ heißt inhomogene, lineare DGL, falls $q \neq 0$.*
*Kurzform: $x' = p(t)x + q(t)$.*

**Satz 10.4** *Die Lösungen der homogenen, linearen DGL $x' = p(t)x$ sind die Funktionen*

$$x(t) = c \cdot e^{\int p(t)\,dt},$$

*wobei $c \in \mathbb{R}$ konstant ist. Das Anfangswertproblem $x' = p(t)x,\ x(t_0) = x_0,\ t_0 \in I$ hat genau eine Lösung $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$, nämlich*

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}.$$

**Beweis**: $x' = p(t)x$ ist eine DGL mit getrennten Variablen. Wir lösen die DGL zunächst auf Intervallen $J \subset I$ mit $x(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Auf $J$ gilt dann $\frac{x'}{x} = p(t)$ und mit der Methode der Trennung der Variablen folgt

$$\ln(|x|) + c = \int \frac{dx}{x} = \int p(t)\,dt,$$

also ist $x(t) = c \cdot e^{\int p(t)\,dt}$ die allgemeine Lösung mit $c \in \mathbb{R}$. Die Konstante $c$ bestimmt man durch die Anfangsbedingung.

a) Ist $x(t_0) = x_0 \neq 0$, so integriert man $\frac{x'}{x} = p(t)$ von $t_0$ bis $t$, und erhält

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds.$$

Es folgt

$$\ln(|x|) - \ln(|x_0|) = \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds,$$

und somit $x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$. Dies ist die einzige Lösung des Anfangswert-Problems, sie ist auf dem ganzen Intervall $I$ definiert und hat dort das gleiche Vorzeichen wie $x_0$.

b) Ist $x(t_0) = x_0 = 0$, so ist $x \equiv 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Dies ist die einzige Lösung, da ein Parameter $t_1 \in I$ mit $x(t_1) \neq 0$ nach a) zur Folge hätte, dass $x$ nirgends verschwinden könnte. □

**Satz 10.5** *Sei $x_s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL*

$$x' = p(t)x + q(t), \quad q \neq 0.$$

*Dann erhält man alle Lösungen der inhomogenen DGL durch $x = x_s + x_c$, wobei*

$$x_c(t) = c \cdot e^{\int p(t)\,dt}$$

*mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL $x' = p(t)x$ ist.*

**Beweis**: Seien $x_s$ und $x$ Lösungen der inhomogenen, linearen DGL. Dann löst $x - x_s$ die homogene, lineare DGL $x' = p(t)x$. Somit existiert nach Satz 10.4 ein $c \in \mathbb{R}$ mit $x - x_s = x_c$. $\square$

Aus diesem Satz ergibt sich die Aufgabe, eine spezielle Lösung $x_s$ der inhomogenen, linearen DGL zu finden. Dafür gibt es 2 Methoden:

**1. Methode: Variation der Konstanten**
Wir betrachten die Lösung der homogenen, linearen DGL $x' = p(t)x$:

$$x(t) = c \cdot e^{\int p(t)\,dt}.$$

Wir machen den *Ansatz:* $x_s(t) := c(t)e^{\int p(t)\,dt}$ und bestimmen die jetzt von $t$ abhängende Funktion $c(t)$ so, dass $x_s$ die inhomogene, lineare DGL $x' = p(t)x + q(t)$ löst. Dies ergibt die folgende Bedingung an $c(t)$:

$$\begin{aligned} p(t)x_s + q(t) \;=\; x_s' &= c'(t) \cdot e^{\int p(t)\,dt} + c(t) \cdot p(t) \cdot e^{\int p(t)\,dt} \\ &= c'(t) \cdot e^{\int p(t)\,dt} + p(t) \cdot x_s(t). \end{aligned}$$

Folglich ist $c'(t) = q(t) \cdot e^{-\int p(t)\,dt}$ und somit

$$c(t) = \int q(t) \cdot e^{-\int p(t)\,dt}\,dt.$$

Mit diesem $c(t)$ ist

$$x_s(t) = c(t) \cdot e^{\int p(t)\,dt}$$

eine Lösung der inhomogenen, linearen DGL $x' = p(t)x + q(t)$ (einsetzen und ableiten).

**2. Methode: Spezielle Ansätze für $x_s$ bei konstantem $p(t) = \alpha$**

(1) Ist die Störfunktion $q(t)$ ein Polynom $h(t)$ vom Grad $m$ mit reellen Koeffizienten, so setze für $x_s(t)$ ein Polynom $Q$ vom Grad $m$ an ($\alpha \neq 0$).

(2) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot e^{at}$, $h \in \mathbb{R}[t]$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q(t) \cdot e^{at}$ ($\alpha \neq a$) bzw. $t \cdot Q(t) \cdot e^{at}$ ($\alpha = a$) an.

(3) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot \cos(bt)$ oder $h(t) \cdot \sin(bt)$, $h \in \mathbb{R}[t]$, $b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t) \cdot \cos(bt) + Q_2(t) \cdot \sin(bt)$ an.

(4) Ist $q(t)$ von der Form $h(t) \cdot \cos(bt) \cdot e^{at}$ oder $h(t) \cdot \sin(bt) \cdot e^{at}$, $h \in \mathbb{R}[t]$, $b \neq 0$, so setze für $x_s(t)$ die Funktion $Q_1(t)e^{at} \cdot \cos(bt) + Q_2(t)e^{at} \cdot \sin(bt)$ an.

Dann setzt man den Ansatz in die inhomogene, lineare DGL ein und berechnet die Koeffizienten des Polynoms $Q(t)$ durch Koeffizientenvergleich.

**Beispiel:** Wir betrachten die inhomogene, lineare DGL und das Anfangswertproblem

$$\left.\begin{aligned} x' &= tx + te^{t^2} \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}\right\} \tag{10.20}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL $x' = tx$ ist

$$x(t) = c \cdot e^{\int t\,dt} = c \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Wir bestimmen nun eine spezielle Lösung der inhomogenen, linearen DGL $x' = tx + te^{t^2}$ durch Variation der Konstanten. Sei $x_s(t)$ eine solche spezielle Lösung, mit dem Ansatz $x_s(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$. Dann gilt

$$x_s'(t) \;=\; c'e^{\frac{t^2}{2}} + cte^{\frac{t^2}{2}} \;=\; tx_s + te^{t^2} \;=\; tce^{\frac{t^2}{2}} + te^{t^2}.$$

Folglich ist $c' = te^{t^2-\frac{t^2}{2}} = te^{\frac{t^2}{2}} = (e^{\frac{t^2}{2}})'$ und somit ist $c(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ eine Lösung für $c(t)$ und $x_s(t) = e^{t^2}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen, linearen DGL. Damit ist $x(t) = e^{t^2} + c \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$ allgemeine Lösung der inhomogenen DGL. Wir bestimmen nun noch die Konstante $c$ aus der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$. Es gilt $x_0 = 1 + c$, das heißt $c = x_0 - 1$. Somit ist

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \left(e^{\frac{t^2}{2}} + x_0 - 1\right)$$

die einzige Lösung des Anfangswertproblems (10.20).

### 10.2.6 Die Bernoullischen Differentialgleichungen

**Definition 10.9** *Eine Bernoullische DGL ist eine DGL des folgenden Types*

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t)^{\alpha}, \tag{10.21}$$

*wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$ und $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.*
*Kurzform: $x' = p(t)x + q(t)x^{\alpha}$.*

Für $\alpha = 1$ erhält man eine homogene, lineare und für $\alpha = 0$ eine inhomogene, lineare DGL. Eine Bernoullische DGL wird durch die Substitution $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$ behandelt. Man erhält

$$\begin{aligned} u' &= (1-\alpha)x' \cdot x^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha)x^{-\alpha}(p(t)x + q(t)x^{\alpha}) \\ &= (1-\alpha)q(t) + (1-\alpha)p(t)u. \end{aligned}$$

Für $u(t)$ erhält man also eine lineare DGL

$$u' = (1-\alpha)p(t)u + (1-\alpha)q(t).$$

Diese wird gelöst. Dann erhält man $x(t) = u(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ als Lösung der Bernoullischen DGL.

**Beispiel**: Wir betrachten die DGL

$$x' = -x + t\sqrt{x}\,, \quad \text{d.h. } \alpha = \frac{1}{2}. \tag{10.22}$$

Wir setzen $u(t) := x(t)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' \;=\; \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-x + t\sqrt{x}) \;=\; -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}t \\ &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Für die homogene, lineare DGL $u' = -\frac{1}{2}u$ erhält man nach Trennung der Variablen $\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}dt$ und somit als allgemeine Lösung $u(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.
Um nun eine spezielle Lösung $u_s$ der inhomogenen, linearen DGL (10.23) $u' = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t$ zu finden, machen wir den folgenden Ansatz mit einem Polynom ersten Grades als Lösung: $u_s = at + b$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} a \;=\; u_s' &= -\tfrac{1}{2}u_s + \tfrac{1}{2}t \\ &= -\tfrac{1}{2}(at + b) + \tfrac{1}{2}t. \end{aligned}$$

Dies hat zur Folge, dass $\frac{1}{2}(1-a)t = 0$ für alle $t$ und $a = -\frac{1}{2}b$ gilt und somit gelten muß, dass $a = 1$ und $b = -2$ ist. Damit haben wir mit $u_s(t) = t - 2$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (10.23) gefunden. Somit ist $u(t) = t - 2 + c\, e^{-\frac{1}{2}t}$ eine allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen DGL (10.22), und wir erhalten

$$x(t) = \left(t - 2 + c\, e^{-\frac{1}{2}t}\right)^2$$

als allgemeine Lösung von (10.22).

### 10.2.7 Die Riccatische Differentialgleichung

**Definition 10.10** *Eine Riccatische DGL ist eine DGL der Form*

$$x' = f_0(t)\ x(t)^2 + f_1(t)\ x(t) + f_2(t), \tag{10.24}$$

*wobei $f_0,\ f_1,\ f_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig sind.*

Für $f_2 \equiv 0$ handelt es sich dabei um eine Bernoullische DGL mit $\alpha = 2$.
Die allgemeine Riccatische DGL (10.24) ist in der Regel nicht geschlossen lösbar. Es gilt aber die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 10.6** *Ist $x_s(t)$ eine spezielle Lösung der Riccatischen DGL (10.24), so sind alle Lösungen von (10.24) gegeben durch*

$$x(t) = x_s(t) + u(t), \tag{10.25}$$

*wobei $u(t)$ eine beliebige Lösung der Bernoullischen DGL*

$$u' = [2\ f_0(t)\ x_s(t) + f_1(t)]\, u(t) + f_0(t)\ u(t)^2. \tag{10.26}$$

*ist.*

**Beweis:** Zunächst gilt für $u = x - x_s$ die folgende Gleichung

$$x^2 - x_s^2 \ =\ (x + x_s)(x - x_s)\ =\ (u + 2\ x_s)\ u. \tag{10.27}$$

Man zeigt nun beide Richtungen.
a) Hier zeigt man, dass, wenn $x$ und $x_s$ Lösungen von (10.24) sind, $u := x - x_s$ eine Lösung von (10.26) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} u' &= x' - x_s' \\ &= f_0\ x^2 + f_1\ x - f_0\ x_s^2 - f_1\ x_s \\ &= f_0\left(x^2 - x_s^2\right) + f_1\ u \\ &\overset{(10.27)}{=} f_0\ u^2 + (2\ f_0\ x_s + f_1)\, u, \end{aligned}$$

d.h. (10.26) gilt.
b) Hier zeigt man, dass, wenn $u$ eine Lösung von (10.26) ist, $x := x_s + u$ eine Lösung von (10.24) ist. Man hat

$$\begin{aligned} x' &= x_s' + u' \\ &= f_0 x_s^2 + f_1 x_s + f_2 + (2\ f_0 x_s + f_1)\, u + f_0 u^2 \\ &= f_0 x_s^2 + f_1 x_s + f_2 + 2\ f_0 x_s x - 2\ f_0 x_s + f_1 x - f_1 x_s + f_0 x^2 + f_0 x_s - 2\ x x_0 f_0 \\ &= f_0\ x^2 + f_1\ x + f_2, \end{aligned}$$

und somit erfüllt $x = x_s + u$ die DGL (10.24). $\square$

Dieser Satz liefert eine Methode zur Lösung einer Riccatischen DGL:

- Finde (durch Probieren oder Raten) eine spezielle Lösung von (10.24).
- Löse (10.26) mit der Methode für eine Bernoullische DGL.

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$x' = (1-t)\,x^2 + (2t-1)\,x - t \tag{10.28}$$

Zunächst errät man die spezielle Lösung $x_s \equiv 1$. Um die allgemeine Lösung dieser DGL zu erhalten, hat man die Bernoullische DGL

$$u' \;=\; (2\,(1-t) + (2t-1))\,u + (1-t)\,u^2 \;=\; u + (1-t)u^2 \tag{10.29}$$

zu lösen. Das ist eine Bernoullische DGL mit $p(t) \equiv 1$, $q(t) = 1-t$ und $\alpha = 2$ in Formel (10.21). Dazu betrachtet man die Transformation $z(t) = \frac{1}{u}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{u'}{u^2} \;=\; -\frac{1}{u^2}\left(u + (1-t)u^2\right) \\ &= -z + (t-1). \end{aligned} \tag{10.30}$$

Dies ist eine inhomogene, lineare DGL. Die Lösung der entsprechenden linearen DGL $z' = z$ ist $z(t) = c\;e^{-t}$.
Um eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden, machen wir den polynomialen Ansatz $z_s(t) = at + b$. Damit erhält man wie im Beispiel aus dem vorigen Abschnitt $a = 1$ und $b = -2$, d.h. $z_s(t) = t - 2$. Somit erhält man als

$$\begin{aligned} \text{Lösung von (10.30)} &: \; z(t) = t - 2 + c\;e^{-t}, \\ \text{Lösung von (10.29)} &: \; u(t) = \tfrac{1}{t-2+c\;e^{-t}} \\ \text{und damit als Lösung von (10.28)} &: \; x(t) = x_s + u = 1 + \tfrac{1}{t-2+c\;e^{-t}}. \end{aligned}$$

## 10.3 Allgemeine qualitative Aussagen über Differentialgleichungen

### 10.3.1 Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems

Wir betrachten eine Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} x' &= F(x,t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{10.31}$$

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen an $F$ dieses Anfangswertproblem eine Lösung besitzt, bzw. unter welchen Bedingungen an $F$ es eine eindeutig bestimmte (maximale) $C^1$-Lösung $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ gibt. Wir betrachten zunächst zwei Beispiele.

**Beispiele:**

1. Im vorigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass für das AWP einer linearen DGL

$$\begin{aligned} x' &= p(t)\, x + q(t) \quad \text{mit } p,q : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

   genau eine Lösung $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, die $C^1$ ist.

2. Das AWP $x' = 2\sqrt{|x|}$ mit $x(0) = 0$ hat unendlich viele auf $\mathbb{R}$ definierte $C^1$-Lösungen, und zwar die folgenden:

$$x_a(t) = \begin{cases} (t-a)^2 & : \ t \geq a, \\ 0 & : \ t < a, \end{cases} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+.$$

   Dies ist klar, denn es ist

$$\sqrt{|x_a(t)|} = \begin{cases} (t-a) & : \ t \geq a, \\ 0 & : \ t < a, \end{cases}$$

   und somit $x_a' = 2\sqrt{|x_a|}$.
   Außerdem ist $x_a(0) = 0$. $x_a$ ist eine $C^1$-Funktion, denn es ist

$$x_a'(t) = \begin{cases} 2(t-a)^2 & : \ t \geq a, \\ 0 & : \ t < a. \end{cases}$$

   Somit ist $x_a'$ in $t = a$ und damit überall stetig.

In diesem Abschniitt wollen die folgenden Aussagen beweisen:

1. Ist $F$ stetig, so existiert immer eine Lösung (Satz von Cauchy-Peano).
2. Ist $F$ Lipschitz-stetig, so existiert genau eine Lösung (Satz von Picard-Lindelöf).

Den Beweis dieser Sätze kann man auf das Studium von Fixpunktproblemem auf Räumen stetiger Abbildungen zurückführen. Dies werden wir in dem nächsten Satz erläutern.

**Satz 10.7** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ und $(x_0, t_0) \in U$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es existiert eine $C^1$-Funktion $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die das Anfangswertproblem*
$$x' = F(x,t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \tag{10.32}$$
*löst.*

2. *Es existiert eine stetige Funktion $x : I \to \mathbb{R}^n$, die folgende Integralgleichung löst*
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds. \tag{10.33}$$

**Beweis :**

($\Longrightarrow$) Sei $x'(s) = F(x(s), s)$. Beide Seiten sind stetig, d.h. es existiert das Riemann-Integral
$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{t_0}^{t} x'(s)\, ds & = & \displaystyle\int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds \\ \| & & \\ x(t) - x(t_0) & = & x(t) - x_0. \end{array}$$

($\Longleftarrow$) Da $F$ und $x$ stetig sind, ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Abbildung
$$\begin{aligned} G : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\ ds \end{aligned}$$
stetig differenzierbar mit $G'(t) = F(x(t), t)$. Damit ist $x(t) := x_0 + G(t)$ stetig differenzierbar, und es gilt $x'(t) = F(x, t)$ und $x(t_0) = x_0$. □

**Folgerung:** *Sei $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ der Vektorraum der stetigen Abbildungen von einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ und*
$$\begin{aligned} H : C^0(I, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n) \\ x &\longmapsto Hx \end{aligned}$$
*der durch*
$$Hx(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds$$
*gegebene Operator. Dann löst $x \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ genau dann das Anfangswertproblem $x' = F(x,t)$ , $x(t_0) = x_0$ , wenn $Hx = x$ gilt, d.h. wenn $x$ ein Fixpunkt des Operators $H$ ist.*

Der eben bewiesene Satz zeigt, dass Fixpunktsätze zum Studium der Lösbarkeit von Differentialgleichungen nützlich sein können. Wir kennen bereits den Banachschen Fixpunktsatz, der Aussagen über die Existenz von Fixpunkten kontraktiver Abbildungen in Banachräumen macht. Wir werden im nächsten Abschnitt weitere Fixpunktsätze kennenlernen, die nur die Stetigkeit der Abbildung erfordern, den Brouwerschen und die Schauderschen Fixpunktsätze. Diese Fixpunktsätze werden zum Beweis der Existenz von Lösungen von DGL nützlich sein.

#### 10.3.1.1 Fixpunktsätze

Aus der Analysis-Vorlesung kennen wir bereits den Banach'schen Fixpunktsatz (Skript Analysis $I^*$, Satz 4.24). Wir wiederholen ihn hier nochmal.

**Satz 10.8 (Banach'scher Fixpunktsatz)** *Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \to X$ eine kontraktive Abbildung , d.h. es existiert ein $L \in \mathbb{R},\ 0 < L < 1$, so dass*

$$d\,(Tx, Ty) \leq L\ d\,(x, y) \qquad \textit{für alle} \quad x, y \in X.$$

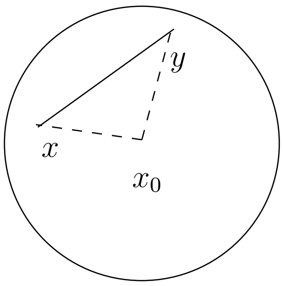
*Dann hat $T$ genau einen Fixpunkt $x^* \in X$, d.h. $T\,(x^*) = x^*$.*

Der Fixpunkt $x^*$ wurde mit Hilfe des Verfahrens der sukzessiven Approximation gefunden. Dazu betrachtet man zu einem beliebigen Startpunkt $x_0 \in X$ die Folge $x_n := T\,(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(x_n)$ gegen $x^*$. Für die Konvergenzgeschwindigkeit gilt

$$d\,(x^*, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d\,(x_0, x_1)\,.$$

Wir benötigen nun weitere Fixpunktsätze, die auch für stetige Abbildungen zwischen normierten Vektoräumen gelten. Dafür muß man sich auf bestimmte Mengen, sogenannte konvexe Mengen einschränken.

**Definition 10.11** *Sei $E$ ein reeller Vektorraum. Eine Menge $K \subset E$ heißt konvex, wenn die Strecke $\overline{xy} := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ zwischen beliebigen Punkten $x$ und $y$ aus $K$ ebenfalls vollständig in $K$ liegt.*




**Beispiel:** Kugeln in normierten Vektoräumen sind konvex, wie eine einfache Rechnung unter Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt.

Wir stellen nun die Frage, wann stetige Abbildungen auf konvexen Teilmengen eines normierten Vektorraumes Fixpunkte haben. Eine Antwort darauf geben die folgenden Fixpunktsätze.

**Satz 10.9 (Brouwerscher Fixpunktsatz)** *Sei $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : B^n \longrightarrow B^n$ mindestens einen Fixpunkt.*

**Zum Beweis:** Es gibt viele Beweise dieses Satzes. Einen analytischen Beweis finden Sie im Buch von H. Heuser: Analysis II, §228, Seiten 593-599. Dieser Beweis benutzt eine Approximation durch Polynome. Einen anderen Beweis finden Sie in einem Skript über Fixpunktsätze von Prof. Kummer (auf seiner homepage).
Wir geben hier die Idee eines sehr schönen, nahezu dreizeiligen Beweises an, der die Grundidee der algebraischen Topologie benutzt, die wir bei dieser Gelegenheit etwas erläutern wollen.

Die algebraische Topologie ist ein mathematische Gebiet, in dem Eigenschaften topologischer Räume und stetiger Abbildungen durch zugeordnete algebraische Größen studiert werden. Dabei wird jedem topologischen Raum $X$ eine Gruppe $G(X)$ und jeder stetigen Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen ein entsprechender Gruppenhomomorphismen zugeordnet:

$$\begin{array}{rcl} X \ \text{topologischer Raum} & \longmapsto & G(X) \ \text{Gruppe} \\ f : X \to Y \ \text{stetige Abbildung} & \longmapsto & f_* : G(X) \to G(Y) \ \text{Gruppenhomomorphismus} \end{array}$$

Die Zuordnung ist dabei so gemacht, dass für die Gruppenhomomorphismen folgende Regeln gelten:

$$id_* = id \quad \text{und} \quad (h \circ f)_* = h_* \circ f_*.$$

In der algebraischen Topologie werden verschiedene solche Zuordnungen konstruiert. Eine davon ist z.B. die sogenannte $k$. Homologiegruppe $H_k(X)$, wobei $k$ eine beliebige natürliche Zahl ist. Man kann die Homologiegruppen für die Einheitskugel $B^n$ und ihren Rand, die Sphäre $S^{n-1}$, leicht ausrechnen. Man erhält z.B.

$$\begin{array}{rcl} H_{n-1}(B^n) & = & 0, \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & = & \mathbb{Z}. \end{array}$$

Mit diesen Informationen kann man den Brouwerschen Fixpunktsatz dann folgendermaßen beweisen. Wir nehmen an, es gäbe keinen Fixpunkt von $f : B^n \longrightarrow B^n$. Dann können wir die folgende stetige Abbildung $g : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ definieren:

$$\begin{array}{rcll} g \ : \ B^n & \longrightarrow & S^{n-1} & \\ x & \longmapsto & \overrightarrow{f(x)\,x} \cap S^{n-1} = & \text{der eindeutig definierte Schnittpunkt} \\ & & & \quad \text{des Strahls von } f(x) \text{ durch } x \text{ mit } S^{n-1} \end{array}$$

Sei außerdem

$$\begin{array}{rcl} i \ : \ S^{n-1} & \to & B^n \\ x & \to & x \end{array}$$

die Einbettung, die ebenfalls stetig ist. Dann betrachtet man die folgende Verknüpfung stetiger Abbildungen

$$id = g \circ i \ : \quad S^{n-1} \xrightarrow{i} B^n \xrightarrow{g} S^{n-1} \qquad (\textit{Zeile 1})$$

und geht zu den Homologiegruppen über

$$\begin{array}{lccccc} id = id_* = (g \circ i)_* \ : & H_{n-1}\left(S^{n-1}\right) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}\left(B^n\right) & \xrightarrow{g_*} & H_{n-1}\left(S^{n-1}\right) & (\textit{Zeile 2}) \\ & \| & & \| & & \| & \\ & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} & (\textit{Zeile 3}). \end{array}$$

Das heißt aber nichts anderes als $0 = id = id_* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, was ein Widerspruch ist. □

**Bemerkung:** Der Satz gilt natürlich auch für Kugeln mit beliebigem Radius.

Der nächste Fixpunktsatz ist eine Folgerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

**Satz 10.10 (Fixpunktsatz für kompakte, konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$)**
*Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann hat jede stetige Abbildung $f : A \to A$ mindestens einen Fixpunkt.*

**Beweis:** Da $A$ kompakt ist, ist $A$ abgeschlossen. Da $A$ abgeschlossen und konvex ist, existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ genau ein Punkt $p_A(x) \in A$ mit

$$\|p_A(x) - x\| = \operatorname{dist}(A, x) := \inf_{y \in A} \|y - x\| .$$

Dann ist der Projektionsoperator

$$\begin{array}{rcl} p_A : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & A. \\ x & \longmapsto & p_A(x) =: \text{„Lot von } x \text{ auf } A\text{“} \end{array}$$

stetig. (Für den Beweis dieser Stetigkeit verallgemeinere man den Beweis von Satz 2.51 von Analysis I für den Fall, dass $A \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum in einem Hilbertraum ist, auf den Fall, dass $A$ konvex ist. Siehe auch D.Werner: Funktionalanalysis, Satz V.3.2.) Da $A$ kompakt ist, ist $A$ auch beschränkt, d.h. es existiert ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$A \subset B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}.$$

Wir schränken nun den Projektionsoperator auf die Kugel $B_r^n$ ein und betrachten die Abbildung

$$H := i \circ f \circ p_A \; : \; B_r^n \xrightarrow{p_A} A \xrightarrow{f} A \overset{i}{\hookrightarrow} B_r^n .$$

$H$ ist stetig. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert mindestens ein Fixpunkt $y_0 \in B_r^n$ von $H$ mit

$$y_0 \; = \; H(y_0) \; = \; f \circ p_A(y_0) .$$

Da das Bild von $f$ in $A$ liegt, folgt $y_0 \in A$ und somit $p_A(y_0) = y_0$. Damit ist aber $f(y_0) = y_0$, d.h. $y_0$ ist ein Fixpunkt von $f$. □

Nun beweisen wir analoge Fixpunktsätze für beliebige normierte Vektorräume $E$, die nicht notwendig endlich-dimensional sein müssen, und die wir später auf den Vektorraum der stetigen Abbildungen $E = C(I, \mathbb{R}^n)$ anwenden können.

**Satz 10.11 (1. Schauderscher Fixpunktsatz)** *Sei $E$ ein beliebiger normierter Vektorraum, $K \subset E$ eine konvexe und $A \subset K$ eine nicht leere, kompakte Teilmenge. Dann besitzt jede stetige Abbildung $f : K \to A \subset K$ mindestens einen Fixpunkt $z \in A : f(z) = z$.*

**Beweis:** Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir zeigen zunächst die folgende

$$\underline{\text{Behauptung:}} \qquad \text{Es existiert ein } y_\varepsilon \in K \text{ mit } \|f(y_\varepsilon) - y_\varepsilon\| < \varepsilon. \tag{10.34}$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die offene Überdeckung
$\mathcal{U} := \{K(x, \varepsilon)\}_{x \in A}$. Da $A$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung aus $\mathcal{U}$, d.h. es existieren $x_1, \ldots, x_p \in A$, so dass

$$A \subset K(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup K(x_p, \varepsilon) .$$

Wir betrachten nun die konvexe lineare Hülle von $x_1, \ldots, x_p$ :

$$\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p) \; := \; \left\{ \sum_{\mu=1}^{p} \lambda_\mu x_\mu \;\middle|\; \lambda_\mu \in \mathbb{R}^{\geq 0} \, , \, \sum_{\mu} \lambda_\mu = 1 \right\} .$$

Die konvexe Hülle von endlich vielen Elementen eines normierten Raumes ist konvex und kompakt (Übungsaufgabe). Außerdem liegt sie in einem endlich-dimensionalen Unterraum:

$$\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p) \;\subset\; \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(x_1, \ldots, x_p) \;\cong\; \mathbb{R}^q, \quad \text{wobei } q \le p < \infty.$$

Wir definieren nun die folgenden stetigen Abbildungen von $A$ nach $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x) &:= \begin{cases} 0 & : \|x - x_\mu\| \ge \varepsilon \\ \varepsilon - \|x - x_\mu\| & : \|x - x_\mu\| < \varepsilon \end{cases}, \\ \varphi &:= \sum_{\mu=1}^{p} \varphi_\mu, \\ \psi_\mu &:= \frac{\varphi_\mu}{\varphi}. \end{aligned}$$

Alle drei Abbildungen sind stetig, und es gilt $0 \le \psi_\mu(x) \le 1$ und $\sum_{\mu=1}^{p} \psi_\mu(x) = 1$ für alle $x \in A$. Die Abbildungen $(\psi_\mu)$ sind also eine stetige Zerlegung der 1. Mit Hilfe dieser Zerlegung der 1 definieren wir die Abbbildung

$$\begin{aligned} h \;:\; A &\longrightarrow \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p) \\ x &\longmapsto \textstyle\sum_{\mu=1}^{p} \psi_\mu(x) \cdot x_\mu. \end{aligned}$$

Dann gilt die folgende Behauptung:

$$\|h(x) - x\| \;\le\; \varepsilon \quad \text{für alle } x \in A. \tag{10.35}$$

Um dies einzusehen, betrachten wir

$$h(x) - x \;=\; \sum_{\mu=1}^{p} \psi_\mu (x_\mu - x) \;=\; \sum_{\substack{c'_\mu \in \{1,\ldots,p\}, \\ x \in K\left(x_{\mu'}, \varepsilon\right)}} \psi_{\mu'}(x)\,(x_{\mu'} - x).$$

Damit ergibt sich $\|h(x) - x\| \;\le\; \underbrace{\sum_{\mu'} \psi_{\mu'}(x)}_{=1} \underbrace{\|x_{\mu'} - x\|}_{<\varepsilon} \;<\; \varepsilon.$

Einer stetigen Abbildung $f : K \longrightarrow A \subset K$ können wir nun die folgende stetige Abbildung zuordnen:

$$h \circ f \;:\; K \xrightarrow{f} A \xrightarrow{h} \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p) \;\subset\; K.$$

Nun sind $x_1, \ldots, x_p \in A \subset K$ und $K$ ist konvex. Die konvexe Hülle $C := \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p)$ ist die kleinste konvexe Menge, die $x_1, \ldots, x_p$ enthält, somit ist $C$ eine Teilmenge von $K$. Damit ist die Abbildung

$$\hat{h} = h \circ f_{|\operatorname{conv}(x_1,\ldots,x_p)} \;:\; C = \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p) \;\longrightarrow\; C = \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p)$$

eine stetige Abbildung auf einer konvexen, kompakten und nichtleeren Teilmenge $C$ in einem endlich dimensionalen normierten Vektorraum. Nach Satz 10.10 existiert mindestens ein Fixpunkt $y \in C$ von $\hat{h}$

$$\hat{h}(y) = y = h \circ f(y).$$

Da $y \in C$ ist $f(y) \in A$. Damit folgt aus (10.35)

$$\|h \circ f(y) - f(y)\| = \|y - f(y)\| < \varepsilon.$$

Damit haben wir folgendes gezeigt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $y(\varepsilon) \in K$, so dass $\|f(y(\varepsilon)) - y(\varepsilon)\| < \varepsilon$. Mit Hilfe dieser

Eigenschaft konstruieren wir nun einen Fixpunkt von $f$. Dazu setzt man $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und erhält eine Folge $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ in $K$ mit $\|f(y_n) - y_n\| < \frac{1}{n}$. Nun ist $(f(y_n))_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in der kompakten, also folgenkompakten Menge $A$, d.h. es existiert eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ von $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ mit

$$\lim_{x\to\infty} f(y_{n_k}) \; = \; z \; \in \; A. \tag{10.36}$$

Die Behauptung ist nun, dass $z$ ein Fixpunkt von $f$ ist. Man hat

$$\|y_{n_k} - z\| \;\leq\; \underbrace{\|y_{n_k} - f(y_{n_k})\|}_{\leq \frac{1}{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} 0} \;+\; \underbrace{\|f(y_{n_k}) - z\|}_{\overset{k\to\infty}{\to} 0 \text{ wegen (10.36)}}$$

und somit $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = z$. Die Abbildung $f$ ist stetig, folglich konvergiert $f(y_{n_k})$ gegen $f(z)$. Mit (10.36) hat man dann $f(z) = z$, also ist $z$ ein Fixpunkt. □

Der letzte Fixpunktsatz ist eine direkte Folgerung aus dem ersten Schauderschen Fixpunktsatz.

**Satz 10.12 (2. Schauderscher Fixpunktsatz)** *Sei $E$ ein normierter VR, $K \subset E$ <u>konvex</u> und nicht leer und $f : K \to K$ stetig. Ist*

*a) $K$ kompakt <u>oder</u>*

*b) $K$ abgeschlossen und $f(K)$ relativ kompakt (d.h. der Abschluss cl $f(K)$ kompakt),*

*so hat $f$ mindestens einen Fixpunkt.*

**Beweis:** a) Da $K$ kompakt ist, ist aufgrund der Stetigkeit von $f$ auch $f(K)$ kompakt. Dann wendet man den ersten Schauderschen Fixpunktsatz auf

$$f \;:\; K \;\longrightarrow\; f(K) =: A \;\subset\; K$$

an.
b) Hier ist $K$ abgeschlossen und $f(K) \subset K$. Damit gilt für den kompakten Abschluss, dass $\mathrm{cl}f(K) \subset \mathrm{cl}K = K$. Nun wendet man den ersten Schauderschen Fixpunktsatz auf

$$f \;:\; K \;\longrightarrow\; \mathrm{cl}f(K) =: A \;\subset\; K$$

an. □

Zum Beweis von Fixpunkten für den Integraloperator $H$ aus Abschnitt 10.3.1 benötigen wir noch ein Kriterium für die relative Kompaktheit von Mengen stetiger Abbildungen, das wir nun behandeln werden.

#### 10.3.1.2 Kompaktheit von Mengen stetiger Abbildungen (Satz von Arzela/Ascoli)

Wir erinnern zunächst die folgenden Ergebnisse der Analysis I Vorlesung.

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff$ $A$ abgeschlossen und beschränkt. (Analysis I, Satz 2.39)
2. Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:
   $A \subset X$ kompakt $\iff$ $A$ abgeschlossen und total beschränkt. (Analysis I, Satz 2.40)

3. Sei $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum und $E$ ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum. Dann ist $C(X, E)$ ein Banachraum bezüglich der Norm $\|f\|_\infty := \max_{x\in X} \|f(x)\|_E$.

Für Teilmengen des Banachraumes $C(X, E)$ hat man das folgende Kompaktheitskriterium

$$\mathcal{M} \subset C(X; E) \text{ kompakt} \iff \mathcal{M} \text{ abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Dies ist die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 10.13 (Satz von Arzela-Ascoli)** *Sei $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum, $E$ ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum und $C(X, E) := \{f : X \to E |\, f \text{ stetig}\}$ der Banachraum der stetigen Abbildungen mit der Maximumnorm:*

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in X} \|f(x)\|_E .$$

*Dann gilt: $\mathcal{M} \subset C(X, E)$ ist kompakt $\iff$ $M$ ist*

- *beschränkt,*
- *abgeschlossen und*
- *gleichgradig stetig, d.h.*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \text{ so dass für } d(x, y) < \delta \text{ folgt, dass } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon\ \forall\, f \in \mathcal{M}.$$

**Beweis:** Wir beweisen nur die Richtung ($\Longleftarrow$), da wir im folgenden nur diese benötigen. Den Beweis der anderen Richtung findet man in jedem Buch über Funktionalanalysis.
Sei also $\mathcal{M} \subset C(X, E)$ beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig.
Behauptung: $\mathcal{M}$ ist kompakt.
Nach Satz 2.33 der Vorlesung Analysis I gilt aber: $(X, d)$ kompakt $\Longrightarrow$ $X$ ist separabel, d.h. es existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge $A := (x_1, x_2, \ldots)$ in $X$. D.h., für $\mathcal{M}$ ist zu zeigen:

> Sei $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{M}$. Dann existiert eine bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{M}$, d.h. eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von $(f_n)_{n=1}^\infty$ in $X$.

Sei nun $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{M}$.
Da $\mathcal{M}$ beschränkt ist, existiert ein $c > 0$ so, dass: $\|f_n\|_\infty \leq c$. D.h. aber, dass $\|f_n(x_i)\|_E \leq \|f_n\|_\infty \leq c$ für alle $i, n$ aus $\mathbb{N}$.
Die Menge $\{f_n(x_1)\,|n \in \mathbb{N}\} \subset E$ ist also beschränkt in $E \cong \mathbb{R}^n$. Damit ist aber deren Abschluss $\mathrm{cl}\{f_n(x_1)\,|n \in \mathbb{N}\}$ abgeschlossen und beschränkt in $E \simeq \mathbb{R}^n$. Da nun $E$ endlich-dimensional ist, ist dieser Abschluss kompakt und damit folgenkompakt. Wir haben also eine konvergente Teilfolge $(f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), \ldots)$.
Dann ist ebenfalls die Folge $(f_n(x_2)|n \in \mathbb{N})$ beschränkt in $E$, d.h. sie enthält wieder eine konvergente Teilfolge $f_{m_1}(x_2), f_{m_2}(x_2), \ldots$.
Analog existiert eine konvergente Teilfolge $f_{p_1}(x_3), f_{p_2}(x_3), \ldots$ von $(f_n(x_3))$ usw.
Man definiert nun die folgende Menge von Funktionen (mit Hilfe des Diagonalisierungsverfahrens):

$$\hat{f}_1 = f_{n_1},\ \hat{f}_2 = f_{m_2},\ \hat{f}_3 = f_{p_3},\ \ldots$$

Dann konvergiert die Folge $(\hat{f}_i(x_n))_{i=1}^\infty$ für alle fixierten $n \in \mathbb{N}$.
Wir beweisen nun die folgende

Behauptung: Die Folge $(\hat{f}_i)_{i=1}^{\infty}$ ist in $(C(X;E), \|\cdot\|_\infty)$ konvergent.

Wegen der Vollständigkeit des normierten Raumes $(C(X;E), \|\cdot\|_\infty)$ genügt es zu zeigen, dass $(\hat{f}_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist.

Dazu benötigen wir die folgenden beiden Fakten.

- Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathcal{M}$ gleichgradig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y$ mit $d(x,y) < \delta$ gilt, dass $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
- Da $X$ kompakt ist, existieren endlich viele Kugeln $K_1 \ldots, K_d$ vom Radius $\frac{\delta}{2}$, die $X$ überdecken.

Da die Menge $A := \{x_1, x_2, \ldots\}$ dicht ist in $X$, enthält jede dieser Kugeln einen Punkt $x_i$ aus $A$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x_{k_l} \in K_l$ für $l = 1, \ldots, d$.
Da nun die Folge $(\hat{f}_i(x_{k_l}))_{i=1}^{\infty}$ in $E$ konvergiert, ist sie eine Cauchy-Folge in $E$, d.h. es existiert ein $i_0\left(\varepsilon\right)$, so dass

$$\left\|\hat{f}_i\left(x_{k_l}\right) - \hat{f}_j\left(x_{k_l}\right)\right\| < \varepsilon \quad \forall i, j \geq i_0\left(\varepsilon\right), \, l = 1, \ldots, d. \tag{10.37}$$

Sei nun $x \in X$ ein beliebiger Punkt. Dann existiert ein $K_{l_0}$ mit $x \in K_{l_0}$, d.h. $d\left(x, x_{k_{l_0}}\right) < \delta$. Da $\mathcal{M}$ gleichgradig stetig ist hat man

$$\|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(x_{k_{l_0}})\| \leq \varepsilon \text{ für alle } i \in \mathbb{N}. \tag{10.38}$$

Folglich gilt nach (10.37) und (10.38) für $i, j \geq i_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_j(x)\| &\leq \|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(x_{k_{l_0}})\| + \|\hat{f}_i(x_{k_{l_0}}) - \hat{f}_j(x_{k_{l_0}})\| + \|\hat{f}_j(x_{k_{l_0}}) - \hat{f}_j(x)\| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&= 3\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Das heißt aber, dass $\|\hat{f}_i - \hat{f}_j\|_\infty \leq 3\,\varepsilon$ für alle $i, j \geq i_0$. Damit ist $(\hat{f}_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $C(X, E)$ und konvergiert somit gegen ein $f \in C(X, E)$. Da nun aber $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist, liegt $f$ auch in $\mathcal{M}$. Damit hat die beliebige Folge $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ eine in $\mathcal{M}$ konvergente Teilfolge $(\hat{f}_{m_i})_{i=1}^{\infty}$. $\mathcal{M}$ ist also kompakt. □

Wir werden im nächsten Abschnitt die folgende Variante des Satzes von Arzela-Ascoli benutzen, die wir mit dem letzten Beweis ebenfalls gezeigt haben:

**Satz 10.14 (Satz von Arzela-Ascoli-2)** *Sei $(X, d)$ ein kompakter metrischer Raum, $E$ ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum und $C\left(X, E\right)$ der Banachraum der stetigen Abbildungen mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt:*
*Ist $\mathcal{M} \subset C\left(X, E\right)$ eine beschränkte, gleichgradig stetige Teilmenge von Abbildungen, so ist $\mathcal{M}$ relativ kompakt.*

Wir haben nun alle Vorbereitungn zusammen, um die Existenz- und Eindeutigkeitssätze für unsere Differentialgleichungen zu beweisen.

#### 10.3.1.3 Der Existenzsatz von Cauchy und Peano

Nun beweisen wir den Satz über die Lösbarkeit des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$.

**Satz 10.15 (Existenzsatz von Cauchy und Peano)**
*Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $(x_0, t_0 \in U$. Die Abbildung $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig auf dem kompakten Bereich*

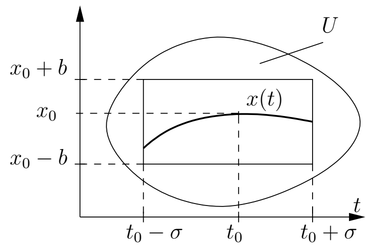
$$Q \;:=\; \{(y,t) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \; \|y - x_0\| \le b, \, |t - t_0| \le a\} \;\subset U.$$

*Sei weiterhin*

$$\begin{aligned} M &:= \max_{(y,t)\in Q} \|F(y,t)\| \qquad \textit{und} \\ \sigma &:= \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \end{aligned}$$

*Dann existiert <u>mindestens eine</u> $C^1$-Lösung*

$$\begin{aligned} x \;:\; & [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^n \\ \textit{des AWP's} \quad & x' = F(x,t), \\ & x(t_0) = x_0, \end{aligned}$$




*und diese erfüllt $\|x(t) - x_0\| \le b$ für alle $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.*

**Beweis:** Nach Satz 10.7 ist die Existenz einer stetigen Abbildung $x \in C([t_0 - \sigma, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ mit

$$x(t) \;=\; x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s) ds,$$

d.h. mit $H(x) = x$ zu beweisen.
Sei $I := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$, und $f_{x_0} \in C(I, \mathbb{R}^n)$ sei die konstante Abbildung $f_{x_0} \equiv x_0$. Wir betrachten nun die abgeschlossene Kugel um $f_{x_0}$ in $C(I, \mathbb{R}^n)$ von Radius $b$ bzgl. $\|.\|_\infty$:

$$\begin{aligned} K &:= \{ f \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid \|f - f_{x_0}\|_\infty \le b\} \\ &= \{ f \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid \|f(t) - x_0\| \le b \; \forall \; t \in I\}. \end{aligned}$$

$K$ ist konvex und abgeschlossen.
Desweiteren betrachten wir den Integraloperator

$$\begin{aligned} H \;:\; C(I, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C(I, \mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto Hx \quad \text{wobei} \quad Hx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s) \, ds. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun der Reihe nach die folgenden <u>Behauptungen</u>:

1. $H(K) \subset K$ für die konvexe, abgeschlossene Menge $K$,

2. $H : K \to K$ ist stetig und

3. $H(K)$ relativ kompakt in $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_\infty)$.

Wäre diese Behauptungen bewiesen, so würde aus dem 2. Schauderschen Fixpunktsatz folgen, dass $H$ mindestens einen Fixpunkt $x$ hat, d.h. dass eine Lösung $x \in K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ von

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds$$

existiert. Da die Lösung in der Kugel $K$ liegt, gilt $\|x(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in I$.

**Beweis von 1.** Für $x \in K$ folgt $\|x - f_{x_0}\| = \max_{t \in I} \|x(t) - x_0\| \leq b$. Damit ist $(x(s), s) \in Q$ für alle $s \in I$, und somit gilt nach Definition von $M$, dass $\|F(x(s), s)\| \leq M$ für alle $x \in K,\ s \in I$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|Hx - f_{x_0}\|_\infty &= \max_{t \in I} \|Hx(t) - x_0\| \\
&= \max_{t \in I} \| \int_{t_0}^{t} F(x(s), s)\, ds \| \\
&\leq \max_{t \in I} | \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|F(x(s), s)\|}_{\leq M} ds | \\
&\leq \max_{t \in I} |M(t - t_0)| \\
&\leq M \cdot \sigma \\
&\leq b,
\end{aligned}$$

d.h. $Hx \in K = \mathrm{cl}(K(f_{x_0}, b))$.

**Beweis von 2.** Wir haben zu zeigen, dass $H : K \longrightarrow K$ stetig ist.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $Q$ kompakt ist, ist $F_{|Q} : Q \to \mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|F(y_1, t) - F(y_2, t)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{\delta} \text{ für alle } (y_1, t), (y_2, t) \in Q \text{ mit } \|y_1 - y_2\| < \delta. \tag{10.39}$$

Seien nun $f, h \in K = \mathrm{cl}\ K(f_{x_0}, b)$ zwei Funktionen mit $\|f - h\|_\infty < \delta$. Dann kann man die folgende Behauptung beweisen:

$$\|Hf - Hh\|_\infty < \varepsilon \ \text{ (d.h. } H \text{ ist auf } K \text{ sogar gleichmäßig stetig) :}$$

Wegen $\|f - h\| = \max_{t \in I} \|f(t) - h(t)\| < \delta$ gilt, dass $\|f(t) - h(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ für alle $t \in I$ und somit aufgrund von (10.39)

$$\|F(f(t), t) - F(h(t), t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \text{ für alle } t \in I.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\|Hf - Hh\|_\infty &= \max_{t \in I} \|Hf(t) - Hh(t)\| \\
&= \max_{t \in I} \| \int_{t_0}^{t} F(f(s), s) - F(h(s), s)\, ds \| \\
&\leq \max_{t \in I} | \int_{t_0}^{t} \|F(f(s), s) - F(h(s), s)\|\ ds | \\
&\leq \max_{t \in I} | \frac{\varepsilon}{\delta}\ (t - t_0) | \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist 2. gezeigt.

**Beweis von 3.** Es ist zu zeigen, dass $H(K)$ relativ kompakt ist.
Wir betrachten die Menge von Funktionen

$$\mathcal{M} := H(K) = \{Hf \mid f \in K\} \subset C(I, \mathbb{R}^n)$$

und wenden darauf den Satz 10.14 von Arzela-Ascoli an, der besagt: Ist $\mathcal{M}$ beschränkt und gleichgradig stetig, so ist $\mathcal{M}$ relativ kompakt. $\mathcal{M} = H(K) \subset K$ ist beschränkt, da die Kugel $K$ beschränkt ist.Wir haben also noch zu zeigen, dass $\mathcal{M}$ gleichgradig stetig ist.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und sei $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$. Dann gilt für $t_1, t_2 \in I$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$ und $f \in K$:

$$\begin{aligned}
\|Hf(t_1) - Hf(t_2)\| &= \| \int_{t_0}^{t_1} F(f(s), s)\, ds - \int_{t_0}^{t_2} F(f(s), s)\, ds \| \\
&= \| \int_{t_1}^{t_2} F(f(s), s)\, ds \| \\
&\leq | \int_{t_1}^{t_2} \|F \underbrace{(f(s), s)}_{\in Q}\|\, ds | \\
&\leq | \int_{t_1}^{t_2} M ds | \\
&= |t_2 - t_1| M \\
&< \delta\, M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{M}$ gleichgradig stetig.
Wir haben also

$$\begin{array}{cccccc}
H: & K & \longrightarrow & H(K) \subset K & \text{stetig} \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \text{abgeschlossen, konvex} & & \text{relativ kompakt}\,. &
\end{array}$$

Damit existiert mindestens ein Fixpunkt $x \in K$ von $H$ und somit eine Lösung der Integralgleichung (10.33). □

#### 10.3.1.4 Der Satz von Picard–Lindelöf

Wie das Beispiel am Anfang dieses Abschnittes gezeigt hatte, können mehrere, sogar unendlich viele Lösungen eines Anfangswertproblems existieren. Daraus ergibt sich das folgende **Problem**: Unter welchen Bedingungen an $F$ existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x, t),\ x(t_0) = x_0$?

**Definition.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ offen, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$. $F$ erfüllt die Lipschitzbedingung bzgl. der $x$–Variablen auf einer Teilmenge $Q \subset U$, falls eine Konstante $L_Q > 0$ existiert, so dass gilt*

$$\|F(x_1, t) - F(x_2, t)\| \leq L_Q \|x_1 - x_2\| \quad \forall\, (x_1, t),\ (x_2, t) \in Q. \tag{10.40}$$

Es ist bekannt, dass eine Funktion aus $C^1([a, b], \mathbb{R})$ die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Dies wird verallgemeinert durch den folgenden Satz.

**Satz 10.16** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine $C^1$–Abbildung, $W \times [a, b] \subset U$, $W \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, konvexe Teilmenge. Dann erfüllt $F$ die Lipschitzbedingung bzgl. der $x$–Variablen auf $Q := W \times [a, b]$.*

**Beweis**: Sei $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Da $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt für die Komponenten von $F$:

$$F_k(.,t) \in C^1(W, \mathbb{R}) \;\text{ für alle } t \in [a,b] =: I.$$

Nun wenden wir den Mittelwertsatz (Satz 6.11) an. Seien $x_1, x_2 \in W,\ t \in [a,b],\ F \in C^1$. Dann existiert ein $\xi_{[k]} \in \overline{x_1 x_2} \subset W$, so dass

$$F_k(x_1,t) - F_k(x_2,t) = \langle \ \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^n} F_k(\xi_{[k]},t), x_1 - x_2 \ \rangle.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|F(x_1,t) - F(x_2,t)\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |F_k(x_1,t) - F_k(x_2,t)|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\| \ \mathrm{grad}_{\mathbb{R}^n} F_k(\xi_{[k]},t) \ \|^2}_{\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\xi_k,t) \ \right|^2} \|x_1 - x_2\|^2 \\
&\leq \underbrace{\max_{\substack{\xi \in W, t \in I \\ k,j=1\dots n}} \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\xi,t) \right|}_{\text{Dieser Ausdruck existiert, da } W \times I \text{ kompakt und } \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \text{ stetig ist.}} \ \|x_1 - x_2\|^2.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|F(x_1,t) - F(x_2,t)\| \ \leq \ L_Q \ \|x_1 - x_2\|$. $\square$

**Satz 10.17 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf)**
*Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine offene Menge und $(x_0, t_0) \in U$. Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und zusätzlich Lipschitz-stetig bzgl. der $x$-Variablen auf der kompakten Menge*

$$Q := \{(y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|y - x_0\| \leq b, \ |t - t_0| \leq a\} \subset U.$$

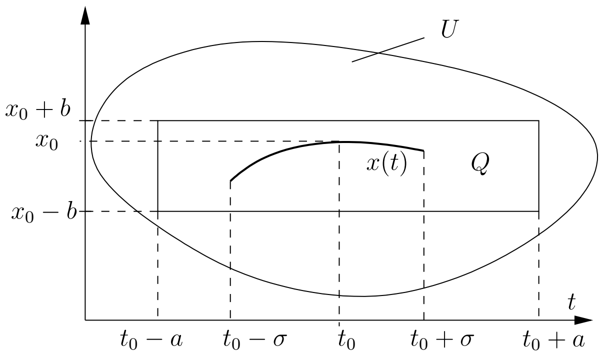
*Bezeichne desweiteren*

$$\begin{aligned}
M &:= \max_{(y,t) \in Q} \|F(y,t)\| \qquad \textit{und} \\
\sigma &:= \min\left(a, \frac{b}{M}\right).
\end{aligned}$$

*Dann hat das Anfangswertproblem $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0$ genau eine $C^1$-Lösung*

$$x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*mit der Eigenschaft $\|x(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$.*



**Beweis:** Sei $I := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$. Wir betrachten wie im Satz 10.15 von Cauchy-Peano den Integraloperator

$$\begin{aligned} H \ : \ C(I, \mathbb{R}^n) \ &\longrightarrow \ C(I; \mathbb{R}^n) \\ x \ &\mapsto \ Hx \qquad \text{wobei} \quad Hx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(x(s), s) ds. \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden. Dazu betrachten wir wieder die abgeschlossene Kugel $K$ in $E = C(I, \mathbb{R}^n)$ um die konstante Abbildung $f_{x_0}$:

$$K \ = \ \{\varphi \in C\left(I, \mathbb{R}^n\right) \ | \ \|\varphi(t) - x_0\| \leq b \quad \text{für alle } t \in I\}.$$

Da $K$ vollständig und $K \subset E$ abgeschlossen ist, ist $K$ selbst ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik

$$d_\infty(\varphi_1, \varphi_2) \ = \ \max_{t \in I} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_\infty.$$

Nun wissen wir aus Satz 10.15, dass $H : K \to K$ stetig ist. Da jetzt die Abbildung $F$ sogar eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, erhalten wir mehr. Bezeichne $L$ die Lipschitz-Konstante von $F$ auf $Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|H\varphi_1\left(t\right) - H\varphi_2\left(t\right)\| \ &\leq \ \left|\int_{t_0}^{t} \|F\left(\varphi_1\left(s\right), s\right) - F\left(\varphi_2\left(s\right), s\right)\| \, ds\right| \\ &\leq \ L \cdot \left|\int_{t_0}^{t} \|\varphi_1\left(s\right) - \varphi_2\left(s\right)\| \, ds\right|. \end{aligned} \tag{10.41}$$

Damit ist $\|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_\infty \leq L \ \sigma \ \ \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$, d.h. $H : K \longrightarrow K$ ist eine Lipschitz-stetige Abbildung mit der Lipschitz-Konstanten $L \cdot \sigma$.

Nun ist $H$ aber im Allgemeinen nicht kontraktiv, es sei denn wir verkleinern die Intervall-Länge $\sigma$ so dass $L\sigma < 1$. Dies wollen wir aber nicht tun. Statt dessen umgehen wir dieses Problem, indem wie eine andere, zu $\|.\|_\infty$ äquivalente Norm definieren, bezüglich der $H$ kontraktiv ist:

Sei $\alpha \in C\left(I, \mathbb{R}\right)$ und $\alpha\left(I\right) \subset [r, s]$. Dann definiert man

$$\|\varphi\|_{\infty,\alpha} := \max_{t \in I} \| \ e^{\alpha(t)} \ \ \varphi\left(t\right) \|.$$

Für diese Norm gilt $e^r \|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{\infty,\alpha} \leq e^s \|\varphi\|_\infty$, d.h. $\|.\|_\infty$ und $\|.\|_{\infty,\alpha}$ sind äquivalente Normen. Damit ist $(C(I, \mathbb{R}^n), \|.\|_{\infty,\alpha})$ ein Banachraum und $K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen bezüglich $\|.\|_{\infty,\alpha}$. Es ist also

$$(K, d_{\infty,\alpha}) \quad \text{mit } d_{\infty,\alpha}\left(\varphi_1, \varphi_2\right) := \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\alpha}$$

ein vollständiger metrischer Raum für alle $\alpha \subset C(I, \mathbb{R})$.

Wir betrachten diese Norm für $\alpha\left(t\right) = -L \cdot |t - t_0|$, also $e^\alpha\left(I\right) \subset \left[e^{-L\sigma}, 1\right]$, da $e^{\alpha(t_0)} = 1$.

Multiplizieren wir nun (10.41) mit $e^{-L|t-t_0|}$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} & e^{-L \cdot |t-t_0|} \cdot \|H\varphi_1\left(t\right) - H\varphi_2\left(t\right)\| \\ & \leq \ L \cdot e^{-L|t-t_0|} \cdot \left|\int_{t_0}^{t} e^{L \cdot |s-t_0|} \cdot e^{-L|s-t_0|} \, \|\varphi_1\left(s\right) - \varphi_2\left(s\right)\| \ \ ds\right| \\ & \leq \ L \cdot e^{-L|t-t_0|} \cdot \underbrace{\left|\int_{t_0}^{t} e^{L|s-t_0|} \ ds \ \right|}_{= \frac{1}{L}\left(e^{L|t-t_0|} - 1\right)} \ \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\alpha} \\ & \leq \ \left(1 - e^{-L \cdot \sigma}\right) \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\alpha} \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle $t \in I$. Setzt man $q := (1 - e^{-L\sigma})$ so erhält man

$$\|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_{\infty,\alpha} \;\leq\; q \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty,\alpha}$$

mit $0 < q < 1$ und für alle $\varphi_1,\, \varphi_2 \in K$. D.h. aber, dass $H$ kontraktiv bezüglich der Metrik $d_{\infty,\alpha}$ ist. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz hat $H$ also einen Fixpunkt $x \in K$ hat. Es existiert somit genau eine Lösung $x$ des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)\,,\; x(t_0) = x_0$ mit dem Definitionsbereich $I = [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ und der Bedingung $\|x(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in I$. □

Wir fügen hier einen Kommentar zur Eindeutigkeit der Lösung an. Im letzten Satz haben wir bewiesen, dass es eine eindeutige Lösung des Fixpunktproblems *auf der Kugel $K$* gibt. Es könnte aber eine weitere Lösung $y : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des AWP geben, die nicht in $K$ liegt. Da aber die Anfangsbedingung $y(t_0) = x_0$ erfüllt ist, gibt es auf jeden Fall eine positive Zahl $\widetilde{\sigma} < \sigma$ so dass $\|y(t) - x_0\| \leq b$ für alle $t \in \widetilde{I} := [t_0 - \widetilde{\sigma}, t_0 - \widetilde{\sigma}]$. In diesem Fall wenden wir den Satz 10.17 mit dem Intervall $\widetilde{I}$ auf $x, y : \widetilde{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ an und erhalten $x = y$ auf $\widetilde{I} \subset I$.

**Folgerung 10.3.1** *Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 10.17 erfüllt. Dann gibt es eine positive Zahl $\widetilde{\sigma} \leq \sigma$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $x$ des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)\,,\; x(t_0) = x_0$ mit dem Definitionsbereich $\widetilde{I} = [t_0 - \widetilde{\sigma}, t_0 - \widetilde{\sigma}]$ . Dabei ist $\widetilde{\sigma}$ gleich $\sigma$ oder die kleinste Zahl kleiner als $\sigma$, für die $x(\widetilde{I}) \cap \partial K(x_0, b) \neq \emptyset$ gilt.*

**Folgerung 10.3.2** *Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 10.17 erfüllt. Die eindeutig bestimmte Lösung $x^* : I \longrightarrow cl\, K(x_0, b)$ des Anfangswertproblems $x' = F(x,t), x(t_0) = x_0$ erhält man durch folgendes Iterationsverfahren: Es sei $(\varphi_n)$ die iterativ definierte Funktionenfolge*

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0 \\ \varphi_n(t) &= H\varphi_{n-1}(t) \end{aligned}$$

*Dann konvergiert die Folge $(\varphi_n)$ gleichmäßig gegen die Lösung $x^*$ und es gilt folgende Fehlerabschätzung*

$$\|x^*(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{M\,L^n}{(n+1)!}|t - t_0|^{n+1},$$

*wobei $L$ die Lipschitzkonstante für $F$ und $M$ die Schranke von $F$ auf $Q$ ist.*

**Beweis:** Wir führen den Beweis durch Induktion über $n$:
$n = 0$:

$$\|x^*(t) - x_0\| \;=\; \left| \int_{t_0}^{t} F(x^*(s), s)\, ds \right| \;\leq\; M\,|t - t_0|$$

$n \longmapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} \|x^*(t) - \varphi_n(t)\| &= \|Hx^*(t) - H\varphi_{n-1}(t)\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \big\|\, F(x^*(s), s) - F(\varphi_{n-1}(s), s) \,\big\|\, ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \big\|x^*(t) - \varphi_{n-1}(t)\big\| ds \right| \\ &\overset{I.Vor}{\leq} \frac{L \cdot M\,L^{n-1}}{n!} \left| \int_{t_0}^{t} |s - t_0|^n ds \right| \\ &= \frac{M\,L^n}{(n+1)!}\;|t - t_0|^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Abschließend beweisen wir den *lokalen* Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöff.

**Definition 10.12** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine offene Menge und $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. F heißt lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen, falls es zu jedem Punkt $(x_0, t_0) \in U$ eine Umgebung $V(x_0, t_0) \subset U$ und eine positive Zahl $L_V$ gibt, so dass*

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| \leq L_V \, \|x - y\| \qquad \textit{für alle } (x,t), (y,t) \in V.$$

Wie oben folgt wiederum, dass jede $C^1$-Abbildung $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen ist. Wir überlassen dem Leser die folgende Feststellung als Übungsaufgabe (Übungsaufgabe III.47, Analysis IIIa im WS07/08):

**Lemma 10.3.1** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Dann ist F genau dann lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen, wenn F Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset U$ ist.*

**Satz 10.18 (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf)**
*Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die zusätzlich lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen ist. Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, t_0) \in U$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutige Lösung*

$$\varphi_{x_0} : \; (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}^n$$

*des Anfangswertproblems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$.*

**Beweis:** Wir wählen für $(x_0, t_0) \in U$ einen kompakten Bereich $Q \subset V(x_0, t_0) \subset U$ wie im Satz von Picard-Lindelöf und wenden die Folgerung 10.3.1 darauf an. Dann erfüllt z.B. $\varepsilon = \widetilde{\sigma}$ die Behauptung. □

.

### 10.3.2 Die Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von den Anfangswerten

Es sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen. Mit $\varphi_{x_0}$ bezeichnen wir die (lokal) eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems
$x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$. Wir untersuchen nun die Frage, wie sich die Lösung $\varphi_{x_0}$ ändert, wenn man den Anfangswert $x_0$ variiert?
Ein wichtiges Hilfsmittel ist die folgende Ungleichung.

**Lemma 10.3.2 (Gronwall–Ungleichung)**
*Seien $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ stetige, nichtnegative Funktionen und gelte*

$$v(t) \leq c + \int_a^t v(s) u(s)\, ds \quad \forall t \in [a,b],\; c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \textit{ konstant.}$$

*Dann gilt*

$$v(t) \leq c \cdot e^{\int_a^t u(s)\, ds} \qquad \forall t \in [a,b].$$

**Beweis**:
1. Fall: $c > 0$. Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := c + \int\limits_a^t v(s)u(s)\,ds.$$

Dann gilt $0 < c \leq f(t)$ und $v(t) \leq f(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Desweiteren folgt

$$f'(t) = v(t) \cdot u(t) \leq f(t) \cdot u(t)$$

und, da $f(t) > 0$ ist, gilt $\frac{f'(t)}{f(t)} \leq u(t)$. Durch Integration erhält man

$$\ln(f(t)) - \ln(f(a)) \leq \int\limits_a^t u(s)\,ds, \;\text{ also }\; f(t) \leq f(a) \cdot e^{\int\limits_a^t u(s)\,ds} = c \cdot e^{\int\limits_a^t u(s)\,ds}.$$

Folglich ist $v(t) \leq c \cdot e^{\int\limits_a^t u(s)\,ds}$.
2. Fall: $c = 0$. Hier ist zu zeigen, dass $v(t) \equiv 0$. Nach Voraussetzung ist

$$v(t) \leq \int\limits_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b]$$

und somit

$$v(t) \leq \varepsilon + \int\limits_a^t v(s)u(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b],\ \varepsilon > 0.$$

Nach dem 1. Fall folgt dann

$$0 \leq v(t) \leq \varepsilon \cdot e^{\int\limits_a^t u(s)\,ds} \qquad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Lassen wir $\varepsilon$ gegen 0 laufen, so folgt $v(t) \equiv 0$. □

**Satz 10.19 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von der Anfangsbedingung)**
*Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ auf $U$ stetig und Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen mit der Lipschitzkonstanten $L$. Seien $(x_0, t_0),\ (x_0^*, t_0) \in U$ und*

$$\varphi_{x_0}\ ,\ \varphi_{x_0^*} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*Lösungen der Differentialgleichung $x' = F(x,t)$ mit den Anfangsbedingungen $\varphi_{x_0}(t) = x_0$ bzw. $\varphi_{x_0^*}(t) = x_0^*$. Dann gilt*

$$\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t)\| \leq \|x_0 - x_0^*\| \cdot e^{L|t-t_0|} \qquad \forall\, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

**Beweis**: $v(t) := \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t)\|^2$ ist differenzierbar. Für $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} v(t) &= v(t_0) + \int\limits_{t_0}^t v'(s)\,ds \\ &= v(t_0) + 2\int\limits_{t_0}^t \langle \varphi_{x_0}(s) - \varphi_{x_0^*}(s), \varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{x_0^*}(s)\rangle\,ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \quad v(t_0) + 2\int\limits_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{x_0^*}(s)\| \cdot \|\varphi'_{x_0}(s) - \varphi'_{x_0^*}(s)\| \; ds \\
&= \quad v(t_0) + 2\int\limits_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{x_0^*}(s)\| \cdot \|F(\varphi_{x_0}(s), s) - F(\varphi_{x_0^*}(s), s)\| \; ds \\
&\leq \quad v(t_0) + 2L\int\limits_{t_0}^{t} \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{x_0^*}(s)\|^2 \, ds \\
&\leq \quad v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \underbrace{2L}_{=:u(s)} \cdot v(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Aus der Gronwall–Ungleichung folgt dann

$$
v(t) \leq v(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} 2L\, ds} = v(t_0) \cdot e^{2L(t-t_0)}.
$$

Damit erhält man die Behauptung

$$
\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t)\| \leq \|x_0 - x_0^*\| \cdot e^{L(t-t_0)}
$$

für alle $t_0 \leq t < t_0 + \varepsilon$. Analog geht man für $t_0 - \varepsilon < t \leq t_0$ vor. □

**Folgerung 10.3.3** *Seien die Voraussetzungen von Satz 10.19 erfüllt. Sei $\{x_n^*\}$ eine Folge von Anfangsbedingungen, die gegen die Anfangsbedingung $x_0$ konvergiert. Sei $\varphi_{x_n^*}$ die Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_n^*$. Dann konvergiert $\{\varphi_{x_n^*}\}$ gleichmäßig gegen $\varphi_{x_0}$ auf jedem kompakten Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, auf dem alle Lösungen definiert sind.*

Die Lösungen hängen also stetig von den Anfangswerten ab. Man kann auch zeigen: Ist $F(.,t) : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine $C^k$–Abbildung, so hängen die Lösungen $k$–fach differenzierbar von den Anfangswerten ab.

Wir formulieren nun einen weiteren Abhängigkeitssatz, ohne ihn zu beweisen. Der Beweis erfolgt jedoch mit analogen Methoden.

**Satz 10.20 (Th. Bröcker: Analysis III, Kapitel 1.2)**
*Sei $F : \underbrace{W \times I \times V}_{offen} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $k$-mal stetig differenzierbar, $0 < k \leq \infty$. Wir betrachten das Anfangswert-Problem*

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= F(x(t), t, \underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}_{:= \lambda \text{ Parameter in der DGL}}) \\
x(t_0) &= x_0
\end{aligned}
$$

*und dessen eindeutig bestimmte, lokale $C^1-$ Lösung*

$$
\varphi_{x_0,\lambda} : I_\varepsilon := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n.
$$

*Dann ist $\varphi_{x_0,\lambda}$ $k$-mal stetig differenzierbar auf $I_\varepsilon$ und die Abbildung*

$$
\begin{aligned}
\varphi \ : \ \tilde{W}(x_0) \times \tilde{I}(t_0) \times \tilde{V}(\lambda) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
(x, t, \lambda) &\longmapsto \varphi_{x,\lambda}(t) := \text{ Lösung mit AB } x(t_0) = x \text{ und Parameter } \lambda
\end{aligned}
$$

*ist in allen Variablen k-mal stetig differenzierbar.*
*Die Lösung hängt also k-mal stetig differenzierbar von den Anfangswerten und den Parametern ab.*

### 10.3.3 Die Fortsetzbarkeit der Lösung einer Differentialgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir den *maximal* möglichen Definitionsbereich der Lösung einer Differentialgleichung untersuchen. Modelliert die Differentialgleichung z.B. ein physikalisches System oder einen Prozess, so fragen wir also nach der Lebensdauer dieses Prozesses oder dieses Systems.

Wir setzen im gesamten Abschnitt voraus, dass $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen lokal Lipschitz-stetige Abbildung auf der offenen Menge $U$ ist. Ist $(x_0, t_0) \in U$, so gibt es nach dem lokalen Satz von Picard und Lindelöf eine eindeutige *lokale* Lösung des Anfangswert-Problems

$$x' = F(x,t),\ x(t_0) = x_0.$$

Wir betrachten nun die nichtleere Familie

$$\mathcal{F} = \{((a_i, b_i), \varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$$

bestehend aus allen Paaren der Form

(1) $I_i = (a_i, b_i)$ sind Intervalle mit $t_0 \in (a_i, b_i)$,

(2) $\varphi_i : (a_i, b_i) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind $C^1$-Abbildungen, die das Anfangswertproblem $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ lösen.

Wir wollen nun Lösungen mit verschiedenen Definitionsbereichen zusammenkleben. Dass dies möglich ist, zeigt das nächste Lemma.

**Lemma 10.3.3** *Seien $(I_i = (a_i, b_i), \varphi_i)$ und $I_j = ((a_j, b_j), \varphi_j)$ zwei Elemente der Lösungsmenge $\mathcal{F}$. Dann gilt*

$$\varphi_i(t) = \varphi_j(t) \quad \forall\, t \in I = I_i \cap I_j = (\max(a_i, a_j), \min(b_i, b_j)).$$

**Beweis**: Wir betrachten die Menge $\Sigma := \{t \in I |\ \varphi_i(t) = \varphi_j(t)\} \subset I$. Dann gilt

- $\Sigma \neq \emptyset$, da $t_0 \in \Sigma$.
- $\Sigma$ ist abgeschlossen in $I$, denn $\varphi_i$ und $\varphi_j$ sind stetig und $\Sigma = (\varphi_i - \varphi_j)^{-1}(0)$ .
- $\Sigma$ ist offen in $I$: Sei dazu $t^* \in \Sigma$. Dann sind $\varphi_i, \varphi_j$ Lösungen des Anfangswertproblems $x' = F(x,t),\ x(t^*) = \varphi_i(t^*) = \varphi_j(t^*) = x_0^*$. Nach dem lokalen Satz von Picard/Lindelöf existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varphi_i \equiv \varphi_j$ auf $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \subset I$. Dann ist aber $(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \subset \Sigma$. D.h. $\Sigma$ ist offen in $I$.

Damit ist $\Sigma \subset I$ offen, abgeschlossen und nicht leer. Nun ist das Intervall $I$ aber zusammenhaïgend. Folglich muß $\Sigma = I$ gelten. □

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} a(x_0) &:= \inf\{a_i \mid i \in \Lambda\}, \\ b(x_0) &:= \sup\{b_i \mid i \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

und definieren die Funktion

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{x_0} \; : \; (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \varphi_i(t)\;, \quad \text{falls } t \in (a_i, b_i) \end{array}$$

Aufgrund des vorigen Lemmas definiert diese Zuordnung eine eindeutige $C^1$–Abbildung auf $(a(x_0), b(x_0))$. Desweiteren löst $\varphi_{x_0}$ das Anfangswertproblem $x' = F(x,t),\; x(t_0) = x_0$ auf dem gesamten (und maximal möglichen) Intervall $(a(x_0), b(x_0))$. Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 10.13** *Die Funktion $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x,t),\; x(t_0) = x_0$.*

**Folgerung 10.3.4** *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen und $(x_0, t_0) \in U$. Dann existiert eine eindeutige maximale Lösung $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ des Anfangswert-Problems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$.*

Wir interessieren uns nun dafür, wie groß der maximale Definitonsbereich $(a(x_0), b(x_0))$ sein kann, insbesondere, unter welchen Bedingungen er ganz $\mathbb{R}$ ist.

**Satz 10.21 (Satz über die maximale Lösung)**
*Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen. Sei $(x_0, t_0) \in U$ und bezeichne $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = F(x,t),\; x(t_0) = x_0$ . Dann gilt:*
*Ist $b(x_0) < \infty$, so existiert zu jeder kompakten Menge $A \subset U$ eine Zahl $t_A < b(x_0)$, so dass*

$$(\varphi_{x_0}(t), t) \in U \setminus A \quad \forall\, t \in [t_A, b(x_0)).$$

*Ist $-\infty < a(x_0)$, so existiert zu jeder kompakten Menge $A \subset U$ eine Zahl $s_A > a(x_0)$, so dass*

$$(\varphi_{x_0}(t), t) \in U \setminus A \quad \forall\, t \in (a(x_0), s_A].$$

*Das heißt, ist $\varphi_{x_0}$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, so verlässt die Kurve $(\varphi_{x_0}(t), t)$ jede kompakte Menge nach endlicher Zeit.*

**Beweis:** Wir beweisen nur die erste Behauptung. Die 2. geht analog.
Sei also $b(x_0) < \infty$. Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, es existiert eine kompakte Menge $A \subset U$ und eine Folge $(t_n)$, die von unten gegen $b(x_0)$ konvergiert, mit $(\varphi_{x_0}(t_n), t_n) \in A$. Da $A$ kompakt ist, ist $A$ auch folgenkompakt. OBdA können wir voraussetzen, dass $(\varphi_{x_0}(t_n), t_n)$ gegen $(x^*, b(x_0)) \in A$ konvergiert (ansonsten gehen wir zu einer Teilfolge über). Da $U$ offen ist, können wir $\varepsilon, \delta > 0$ so wählen, dass

$$\mathrm{cl}(K(x^*, \varepsilon)) \times [b(x_0) - \delta, b(x_0) + \delta] \subset U.$$

Wir betrachten

$$M := \max\{\|F(x,t)\| \mid \|x - x^*\| \le \varepsilon, |t - b(x_0)| \le \delta\}.$$

Da $(\varphi_{x_0}(t_n), t_n) \to_{n\to\infty} (x^*, b(x_0))$, gilt für hinreichend große $n$

$$K\left(\varphi_{x_0}(t_n), \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left[t_n - \frac{\delta}{2}, t_n + \frac{\delta}{2}\right] \;\subset\; K(x^*, \varepsilon) \times [b(x_0) - \delta, b(x_0) + \delta].$$

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf ist die eindeutige Lösung von

$$\left.\begin{aligned} x' &= F(x,t) \\ x(t_n) &= \varphi_{x_0}(t_n) = x_n \end{aligned}\right\} \tag{10.42}$$

zumindest auf dem Intervall

$$I_n := \left[ t_n - \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}\right), t_n + \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}\right) \right]$$

definiert. Da aber $\varphi_{x_0}$ das Problem (10.42) löst, ist $\varphi_{x_0}$ mindestens auf $I_n$ definiert ist. Lassen wir $n$ gegen $\infty$ laufen, so sehen wir, dass $\varphi_{x_0}$ auf

$$\left( b(x_0) - \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}), b(x_0) + \min(\frac{\delta}{2}, \frac{b\varepsilon}{2M}) \right)$$

definiert ist, also rechts über $b(x_0)$ hinaus. Damit ist aber $\varphi_{x_0}$ nicht die maximale Lösung, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. $\square$

Als Spezialfall betrachten wir Differentialgleichungen auf einem Streifengebiet der Form $U := \mathbb{R}^n \times (a,b) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

**Satz 10.22** *Sei $F : \mathbb{R}^n \times (a,b) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen und $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des Anfangswert-problems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$.*

1. *Ist $b(x_0) < b$, so gilt $\lim\limits_{t \to b(x_0)^-} \|\varphi_{x_0}(t)\| = \infty$.*
2. *Ist $a(x_0) > a$, so gilt $\lim\limits_{t \to a(x_0)^+} \|\varphi_{x_0}(t)\| = \infty$.*

**Beweis:** Nach Satz 10.21 verläßt die Kurve $(\varphi_{x_0}(t), t)$ jede kompakte Menge der Form $cl\,(K(0,R)) \times [a(x_0), b(x_0)]$. Da die $t$-Koordinate immer in $[a(x_0), b(x_0)]$ bleibt, verläßt also die Kurve $\varphi_{x_0}(t)$ jede Kugel um $x_0$. Die Norm $\|\varphi_{x_0}(t)\|$ konvergiert somit gegen $+\infty$. $\square$

**Satz 10.23** *Sei $F : \mathbb{R}^n \times (a,b) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Variablen auf jeder Menge vom Typ $\mathbb{R}^n \times I$, wobei $I \subset (a,b)$ ein kompaktes Intervall bezeichnet. Dann ist jede maximale Lösung des Anfangswert-Problems $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$ auf dem Intervall $(a,b)$ definiert.*

**Beweis**: Sei $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung von $x' = F(x,t)$, $x(t_0) = x_0$. Wir nehmen an, dass $b(x_0) < b$ gilt. Nach Satz 10.22 ist dann $\lim\limits_{t \to b(x_0)^-} \|\varphi_{x_0}(t)\| = \infty$. Sei $t^* \in (a,b)$ so gewählt, dass

$$\|\varphi_{x_0}(t)\| \geq 1 \quad \forall\, t^* \leq t < b(x_0).$$

Sei $L$ die Lipschitzkonstante von $F$ bzgl. der $\mathbb{R}^n$-Komponente auf der Menge $\mathbb{R}^n \times [t^*, b(x_0)]$. Dann gilt für alle $t \in [t^*, b(x_0)]$

$$\big|\, \|\varphi'_{x_0}(t)\| - \|F(0,t)\| \,\big| \leq \| \underbrace{F(\varphi_{x_0}(t), t)}_{=\varphi'_{x_0}(t)} - F(0,t)\| \leq L \cdot \|\varphi_{x_0}(t)\|$$

und folglich

$$\|\varphi'_{x_0}(t)\| \leq \underbrace{\sup_{t \in [t^*, b(x_0)]} \|F(0,t)\|}_{=:C} + L \cdot \|\varphi_{x_0}(t)\|. \tag{10.43}$$

Desweiteren gilt für $t \in [t^*, b(x_0)]$

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{x_0}(t)\|^2 &= \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 + \int_{t^*}^{t} \underbrace{\frac{d}{ds}\|\varphi_{x_0}(s)\|^2}_{=2\langle \varphi'_{x_0}(s), \varphi_{x_0}(s)\rangle} \, ds \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 + 2 \int_{t^*}^{t} \|\varphi'_{x_0}(s)\| \cdot \|\varphi_{x_0}(s)\| \, ds \\
&\overset{(10.43)}{\leq} \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 + \int_{t^*}^{t} 2\left(C + L \cdot \|\varphi_{x_0}(s)\|\right) \|\varphi_{x_0}(s)\| \, ds.
\end{aligned}$$

Für alle $s \in [t^*, b(x_0)]$ gilt $\|\varphi_{x_0}(s)\| \geq 1$ und damit auch $\|\varphi_{x_0}(s)\| \leq \|\varphi_{x_0}(s)\|^2$. Es folgt

$$\|\varphi_{x_0}(t)\|^2 \leq \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 + \int_{t^*}^{t} \underbrace{2(L + C)}_{=:u(s)} \cdot \underbrace{\|\varphi_{x_0}(s)\|^2}_{=:v(s)} \, ds.$$

Mit der Gronwall–Ungleichung erhält man daraus

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{x_0}(t)\|^2 &\leq \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 \cdot e^{\int_{t^*}^{t} 2(L+C)\, ds} \\
&= \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 \cdot e^{2(L+C)(t-t^*)} \\
&\leq \|\varphi_{x_0}(t^*)\|^2 \cdot e^{2(L+C)(b(x_0)-t^*)}
\end{aligned}$$

für alle $t \in [t^*, b(x_0)]$. Damit wäre $\varphi_{x_0}$ aber geschränkt und die notwendige Bedingung $\lim\limits_{t \to b(x_0)^-} \|\varphi_{x_0}(t)\|^2 = \infty$, die wir im vorigen Satz bewiesen haben, kann nicht gelten. Folglich ist $b(x_0) = b$. Analog zeigt man, dass $a(x_0) = a$. $\square$

Als Anwendung studieren wir den maximalen Definitionsbereich der Integralkurven von Vektorfeldern. Wir erinnern nochmal an die Definition der Integralkurve: Sei $X$ ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$. Eine $C^1$-Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow W$ heißt Integralkurve von $X$, wenn $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Die Integralkurven sind also Lösungen einer autonomen Differentialgleichung 1. Ordnung.

**Definition 10.14** *Ein stetiges Vektorfeld $X : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt vollständig, wenn alle seine maximalen Integralkurven auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.*

**Satz 10.24 (Vollständige Vektorfelder)**
*Sei $X : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein $C^1$–Vektorfeld auf einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$. Es gelte eine der beiden folgenden Bedingungen:*

1. *Der Träger von $X$, d.h. der Abschluß der Menge $\{x \in W \mid X(x) \neq 0\}$ ist kompakt.*
2. *Es existiert eine Konstante $C$, so dass $\| X(x) \| \leq C \cdot \|x\|$ für alle $x \in W$.*

*Dann ist das Vektorfeld $X$ vollständig.*

**Beweis**: Da $X$ stetig differenzierbar ist, ist $X$ Lipschitz-stetig auf $W$. Folglich existiert durch jeden Punkt $x_0 \in W$ genau eine maximale Integralkurve $\gamma_{x_0}$ von $X$ mit $\gamma_{x_0}(t_0) = x_0$.

*1. Fall:* Sei der Träger von $X$ kompakt. Ist $X(x_0) = 0$, so ist die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte konstante Kurve $\gamma_{x_0}(t) \equiv x_0$ offensichtlich die maximale Integralkurve durch $x_0$. Sei nun $X(x_0) \neq 0$. Die Kurve $(\gamma_{x_0}(t), t)$ verbleibt in der kompakten Menge *supp* $X \times [a(x_0), b(x_0)]$, wobei $supp\, X$ den Träger von $X$ bezeichnet. Wäre nämlich für ein $t_1 \in (a(x_0), b(x_0))$ der Vektor $X(\gamma_{x_0}(t_1))$ der Nullvektor, so wäre die Kurve $\gamma_{x_0}$ konstant, nämlich $\gamma_{x_0}(t) \equiv \gamma_{x_0}(t_1)$. Aus dem Satz 10.21 erhalten wir dann $(a(x_0), b(x_0)) = \mathbb{R}$.

*2. Fall:* Sei zur Abkürzung $\gamma := \gamma_{x_0}$. Die Funktion $\|\gamma(t)\|^2$ ist differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle &= 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle \\
&\overset{CSU}{\leq} 2\|\gamma'(t)\| \cdot \|\gamma(t)\| \\
&= 2\|X(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma(t)\| \\
&\overset{Vor}{=} 2C\|\gamma(t)\|^2.
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\frac{d}{dt}\Big(\ln \|\gamma(t)\|^2\Big) \leq 2C.$$

Durch Integration erhält man

$$\|\gamma(t)\|^2 \leq e^{2Ct+c_1} \leq e^{2Cb(x_0)+c_1} =: R^2$$

Damit bleibt die Kurve $(\gamma(t), t)$ im kompakten Bereich $K(0, R) \times [a(x_0), b(x_0)]$. Nach Satz 10.21 ist dann aber wiederum $(a(x_0), b(x_0)) = \mathbb{R}$. □

## 10.4 Lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$

### 10.4.1 Die allgemeine Struktur des Lösungsraumes einer linearen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$

In Kapitel 10.2 haben wir lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^1$ gelöst. In diesem Kapitel verallgemeinern wir dies und behandeln lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$.

Mit $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnen wir den Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen. In diesem Abschnitt sei $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und

$$\begin{aligned}
A &: I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\
B &: I \longrightarrow \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

stetige Abbildungen. Dann heißt

$$\begin{aligned}
x' &= A(t)x && \textit{homogene, lineare DGL im } \mathbb{R}^n \textit{ („DGL-System“)}, \\
x' &= A(t)x + B(t) && \textit{inhomogene, lineare DGL im } \mathbb{R}^n \textit{ mit Störfunktion } B(t).
\end{aligned}$$

Ausgeschrieben sieht eine lineare Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$ also folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rcl}
x_1'(t) &=& A_{11}(t) \cdot x_1(t) \ + \ \ldots \ + \ A_{1n}(t) \cdot x_n(t) \ + \ B_1(t) \\
x_2'(t) &=& A_{21}(t) \cdot x_1(t) \ + \ \ldots \ + \ A_{2n}(t) \cdot x_n(t) \ + \ B_2(t) \\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n'(t) &=& A_{n1}(t) \cdot x_1(t) \ + \ \ldots \ + \ A_{nn}(t) \cdot x_n(t) \ + \ B_n(t),
\end{array}$$

wobei $A(t) = (A_{ij}(t))$ und $B(t) = (B_i(t))$.

Die qualitativen Aussagen über Differentialgleichungen aus dem letzten Abschnitt liefern uns nun für die linearen Differentialgleichungen das folgende Resultat:

**Satz 10.25** *Sei $t_0 \in (a,b)$. Dann existiert genau eine maximale Lösung der linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x + B(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$. Diese maximale Lösung ist auf dem gesamten Intervall $(a,b)$ definiert.*

**Beweis:** Die rechte Seite der linearen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$F(x,t) = A(t)x + B(t).$$

$F : \mathbb{R}^n \times (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist offensichtlich stetig und linear in der $\mathbb{R}^n$-Komponente. Wir erhalten also

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x-y\|,$$

wobei die Norm einer Matrix $L = (L_{ij})$ durch $\|L\|^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} L_{ij}^2$ gegeben ist. Sei nun $I \subset (a,b)$ ein kompaktes Intervall. Da die Abbildung $A$ stetig ist, existiert das Maximum $L(I) := \max\limits_{t \in I} \|A(t)\|$ und wir erhalten

$$\|F(x,t) - F(y,t)\| \leq L(I)\,\|x-y\|$$

für alle $(x,t),(y,t) \in \mathbb{R}^n \times I$. Die Abbildung $F$ ist also Lipschitz-stetig auf jeder Menge der Form $\mathbb{R}^n \times I$, wobei $I \subset (a,b)$ ein komapktes Intervall ist. Damit existiert nach Folgerung 10.3.4 eine eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswert-Problems und nach Satz 10.23 ist diese auf dem gesamten Intervall $(a,b)$ definiert. $\square$

Für die Struktur des Lösungsraumes einer linearen Differentialgleichung erhalten wir

**Satz 10.26** *Die Menge der maximalen Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$*

$$x' = A(t)x \qquad (*)$$

*ist ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum $V^n$. Die Menge der maximalen Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$*

$$x' = A(t)x + B(t) \qquad (**)$$

*ist der affine Raum*

$$\mathcal{A} = x_s + V^n\,,$$

*wobei $x_s$ eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (**) bezeichnet.*

**Beweis:** Sei $V := \{x \in C^1((a,b),\mathbb{R}^n) \mid x' = A(t)x\}$ der Lösungsraum der homogenen linearen DGL $(*)$. $V$ ist ein reeller Vektorraum, denn wegen der Linearität der DGL erhält man mit zwei Lösungen $x_1$ und $x_2$ von $(*)$ und zwei reellen Zahlen $\lambda_1$ und $\lambda_2$, dass auch $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ Lösung von $(*)$ ist. Wir zeigen, dass $V$ die Dimension $n$ hat. Sei $t_0 \in (a,b)$ fixiert. Zu $r_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert genau eine Lösung $\varphi_{r_0}$ von $(*)$ mit $\varphi_{r_0}(t_0) = r_0$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi : r_0 \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_{r_0} \in V.$$

$\phi$ ist surjektiv, da $\phi(x(t_0)) = x$ für alle $x \in V$ gilt. $\phi$ ist injektiv, da mit $\varphi_{r_0} = 0$ auch $r_0 = \varphi_{r_0}(t_0) = 0$ gilt. Also ist $\phi$ ein linearer Isomorphismus und damit $\dim V = n$.
Sei nun $\mathcal{A} := \{x \in C^1((a,b),\mathbb{R}^n) \mid x' = A(t)x + B(t)\}$ der Lösungsraum der inhomogenen linearen DGL $(**)$. Wir wissen, dass eine spezielle Lösung $x_s$ der inhomogenen linearen

DGL $(**)$ existiert. Ausserdem gilt für jede andere Lösung $x \in \mathcal{A}$, dass $x - x_s \in V$ und für jede Lösung $y \in V$, dass $x_s + y \in \mathcal{A}$. Somit ist $\mathcal{A} = x_s + V^n$. $\square$

**Definition 10.15** *$n$ linear unabhängige Lösungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der homogenen linearen DGL $x' = A(t)x$ nennt man Fundamentalsystem der homogenen DGL $x' = A(t)x$. Die Matrix*

$$Z = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$$

*aus den Spaltenvektoren $\varphi_j$ heißt Fundamentalmatrix von $x' = A(t)x$.*

**Folgerung 10.4.1** *Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem und $Z = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ die zugehörige Fundamentalmatrix der homogenen linearen DGL $x' = A(t)x$. Sei desweiteren $x_s$ eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL*

$$x' = A(t)x + B(t). \tag{10.44}$$

*Dann lässt sich jede Lösung von (10.44) in der Form*

$$x(t) \;=\; x_s(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k\, \varphi_k(t) \;=\; x_s(t) + Z(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

*darstellen, wobei $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und $t \in (a, b)$.*

Wir erinnern an eine Definition aus der Linearen Algebra.

**Definition 10.16** *Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ und $(x_1, \ldots, x_n)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $x_i$. Dann heißt*

$$W(x_1, \ldots, x_n) := \det(x_1, \ldots, x_n)$$

*die Wronski–Determinante von $x_1, \ldots, x_n$.*

Die Wronski-Determinante zeigt uns an, ob die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind. Genau in diesem Fall ist nämlich $W(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

**Satz 10.27 (Satz von Liouville)** *Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem von $x' = A(t)x$ und $W(t) := W(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Ist $t_0 \in (a, b)$ fixiert, so gilt*

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\, ds}.$$

**Beweis**: Es gilt

$$\varphi_j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nj}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \ldots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \ldots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitung von $W(t)$ erhalten wir dann mittels der Produktregel

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{k-1}(t), \varphi_k'(t), \varphi_{k+1}(t), \ldots, \varphi_n(t)\right). \tag{10.45}$$

Sei $C$ eine konstante Matrix mit $\det C \neq 0$ und

$$\psi_k(t) := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)\ C_{ik} \quad \text{, d.h. als Matrizengleichung} \quad (\psi_1, \ldots, \psi_n) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cdot C.$$

Für die Ableitung gilt dann

$$\psi_k' \; = \; \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'\ C_{ik} \; = \; \sum_{i=1}^{n} A \underbrace{\varphi_i\ C_{ik}}_{=\psi_k}.$$

$(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ ist ebenfalls ein Fundamentalsystem der homogenen DGL $x' = A(t)x$, denn es ist $\det(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cdot \det C \neq 0$.
Wir fixieren nun ein $\tau \in (a, b)$ und setzen $C := (\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))^{-1}$. Damit ist $(\psi_1(\tau), \ldots, \psi_n(\tau))$ gleich der Einheitsmatrix $E$. Dann folgt aus (10.45)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\det(\psi_1, \ldots, \psi_n)_{|t=\tau} \; &= \; \sum_{k=1}^{n} \det(e_1, \ldots, e_{k-1}, \psi_k'(\tau), e_{k+1}, \ldots, e_n) \\
&= \; \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\det \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{k-te Spalte} & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & A_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & A_{k-1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{k+1k} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{nk} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}}_{=A_{kk}} \; = \; \text{Tr } A(\tau)
\end{aligned}$$

Da nun $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \cdot C^{-1}$, gilt für alle $t \in (a, b)$

$$\begin{aligned}
W' \; &= \; \frac{d}{dt}\det(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))_{|t=\tau} \\
&= \; \frac{d}{dt}\det(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))_{|t=\tau} \cdot \det C^{-1} \\
&= \; \text{Tr } A(t) \cdot W(t).
\end{aligned}$$

Dies ist aber eine lineare homogene DGL im $\mathbb{R}^1$ mit der Lösung

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\, ds}.$$

$\square$

Wir geben nun an, wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x + B(t)$ aus einem Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DGL erhält. Wie im 1-dimensionalen Fall macht man dazu eine Variation der Konstanten.

**Satz 10.28** *Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL $x' = A(t)x$ . Dann erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $x' = A(t)x + B(t)$ durch*

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(\varphi_1(s), \ldots, B(s), \ldots, \varphi_n(s))}{W(\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))}\, ds,$$

*wobei $W_k(\varphi_1(s), \ldots, B(s), \ldots \varphi_n(s))$ die Wronski–Determinante der Matrix ist, die entsteht, wenn man die $k$–te Spalte der Fundamentalmatrix $Z(s) = (\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))$ durch den Vektor $B(s)$ ersetzt. Die Lösung $x_s$ erfüllt die Anfangsbedingung $x_s(t_0) = 0$.*

**Beweis** (durch Variation der Konstanten:)
Wir setzen

$$y(t) := \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \cdot c_k(t) \tag{10.46}$$

und bestimmen die Funktionen $c_k(t)$ so, dass $y(t)$ die inhomogene DGL $x' = A(t)x + B(t)$ löst. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} A(t)y(t) + B(t) &= y'(t) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_k' \cdot c_k + \varphi_k \cdot c_k') \\ &= \sum_{k=1}^{n} A(t) \cdot \underbrace{\varphi_k \cdot c_k}_{=y(t)} + \varphi_k(t) c_k'(t) \end{aligned}$$

also, wenn

$$\sum_{k=1} \varphi_k(t) \cdot c_k'(t) = B(t).$$

Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung $(c_1'(t), \ldots, c_n'(t))$ für jedes $t \in (a,b)$, da $W(t) = \det(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$. Nach der Cramerschen Regel kann man diese Lösung berechnen durch

$$c_k'(t) = \frac{W_k(\varphi_1(t), \ldots, B(t), \ldots, \varphi_n(t))}{W(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))}.$$

Integriert man dies von $t_0$ bis $t$, so folgt aus (10.46), dass

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(\varphi_1(s), \ldots, B(s), \ldots, \varphi_n(s))}{W(\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))} \, ds$$

die inhomogene DGL löst. (Die Differenz von $y(t)$ und $x_s(t)$ ist eine Lösung der homogenen DGL). □

Eine andere Formel für eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL finden Sie in Übungsaufgabe III.50 (Analysis IIIa, WS 07/08): Ist $Z(t)$ eine Fundamentalmatrix der homogenen linearen DGL $x' = A(t)x$, so ist

$$y_s(t) = Z(t) \left( Z(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1} B(s) \, ds \right)$$

die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL $x' = A(t)x + B(t)$ mit der Anfangsbedingung $y_s(t_0) = x_0$.

**Bemerkung:**

1. Die Sätze aus diesem Abschnitt gelten auch für DGL in $\mathbb{C}^n$.
   In diesem Fall ist $A : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ eine stetige Abbildung in die komplexen $(n \times n)$-Matrizen und $B : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ eine stetige Abbildung in den Vektorraum $\mathbb{C}^n$. Wir suchen dann $C^1$-Lösungen $z : (a,b) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ mit

   $$z'(t) = A(t)z(t) + B(t).$$

2. Um lineare DGL'en zu lösen, muß man Fundamentalsysteme für die homogene, lineare DGL finden.

- Für $n = 1$ ist dies einfach und aus Kapitel 10.2 bekannt.
- Für $n > 1$ gibt es dafür kein allgemeines Verfahren. Fundamentalsysteme sind nicht immer durch elementare Funktionen auszudrücken, man benutzt dann numerische Methoden. Im *Spezialfall* von konstanten Matrizen $A(t) \equiv A$ existiert aber ein Verfahren, um das Fundamentalsystem explizit zu bestimmen. Man benutzt dazu die Jordansche Normalform der Matrix $A$.

Im nächsten Abschnitt behandeln wir dieses Lösungsverfahren im Fall einer konstanten Matrix $A(t) \equiv A$.

### 10.4.2 Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{K}^n$. Wir betrachten auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times n}$ der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ die folgende Matrix-Norm:

$$\|A\| := \sup\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \qquad \text{wobei } A \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Da $\mathbb{K}^{n\times n}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, ist $(\mathbb{K}^{n\times n}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum (siehe Analysis I*, Kapitel 2). Darüber hinaus hat die Matrix-Norm die folgenden Eigenschaften:

**Satz 10.29** *Seien $A$ und $B$ zwei Matrizen aus $\mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:*

1. $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in \mathbb{K}^n$.
2. $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

**Beweis**: Die 1. Ungleichung $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ folgt direkt aus der Definition von $\|A\|$. Desweiteren gilt

$$\|A \circ B\| \;=\; \sup\left\{ \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} \overset{1.}{\leq} \sup\left\{ \|A\| \cdot \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \;\middle|\; x \neq 0 \right\} \;=\; \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

**Bemerkung:** Sei $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ eine Algebra mit einer vollständigen Norm, die die Eigenschaft

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \qquad \forall\, A, B \in \mathcal{A}$$

erfüllt. Dann nennt man $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *Banachalgebra.* Viele der Aussagen im kommenden Abschnitt gelten in jeder Banachalgebra.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Exponential von Matrizen. Sei $A$ eine Matrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $A^k \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $A^0$ bezeichne die Einheitsmatrix $E_n$. Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$. Nach Satz 10.29 gilt

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen $e^{\|A\|}$. Aus dem Majorantenkriterium für Reihen (siehe Analysis I*, Kapitel 3) folgt daraus die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ in $\mathbb{K}^{n\times n}$ und

$$\Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \Big\| \leq e^{\|A\|}.$$

**Definition 10.17** *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *. Die Matrix* $e^A := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ *heißt Exponential von A.*

**Satz 10.30** *Sei* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$*. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n} \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

*ist differenzierbar und die einzige Lösung der folgenden Differentialgleichung in* $\mathbb{K}^{n\times n}$*:*

$$X'(t) \ = \ A \circ X(t) \ , \ X(0) = E_n,$$

**Beweis:** 1.) Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von $f$ benutzen wir das Differenzierbarkeits-Kriterium für Funktionenreihen. Sei $f_k(t) := \frac{t^k A^k}{k!}$ .

- $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ ist differenzierbar für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.
- $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) = e^A$ konvergiert.
- $f_k'(t) = \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}$, und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(t)$ konvergiert gleichmäßig auf jeder Kugel $K(0,R)$, denn $\|A\|e^{R\|A\|}$ ist eine konvergente Majorante.

Aus den Eigenschaften für Funktionenreihen (siehe Analysis II) folgt damit, dass die Reihe $f(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t)$ differenzierbar ist, und für die Ableitung gilt

$$f'(t) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} A \circ \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} \ = \ A \circ e^{tA}.$$

Diese Gleichheit hat man zunächst auf $K(0,R)$, und dann läßt man $R$ gegen $\infty$ laufen.
2.) Die Differentialgleichung $X'(t) = A \circ X(t)$ ist eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung im Vektorraum $\mathbb{K}^{n^2}$. Dabei gilt für $F : X \in \mathbb{K}^{n^2} \longrightarrow A \circ X \in \mathbb{K}^{n^2}$

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq \|A \circ (X - Y)\| \leq \|A\| \cdot \|X - Y\|,$$

d.h. $F$ ist Lipschitz-stetig auf $\mathbb{K}^{n^2}$. Folglich ist die maximale Lösung des Anfangswert-Problems $X'(t) = A \circ X(t)$, $X(0) = E_n$ nach dem Satz von Picard/Lindelöf eindeutig bestimmt. □

**Satz 10.31 (Eigenschaften des Exponentials von Matrizen)**
*Seien A, B und X Matrizen aus* $\mathbb{K}^{n\times n}$*. Dann gilt:*

1. $e^0 = E_n$.
2. $e^A$ *ist invertierbar und es gilt* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

3. *Sind $A$ und $B$ kommutativ, d.h. ist $AB = BA$, so gilt* $e^{A+B} = e^A \circ e^B = e^B \circ e^A$.

4. $e^{XAX^{-1}} = Xe^AX^{-1}$ *für alle invertierbaren Matrizen $X$.*

5. $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$.

**Beweis:** Die 1. Behautung folgt direkt aus der Definition. Wir beweisen als nächstes die 3. Eigenschaft. Dazu betrachten wir die Abbildung $X(t) := e^{tA} \circ e^{tB}$. Dann gilt $X(0) = E_n$ und für die Ableitung folgt nach Satz 10.30

$$\begin{aligned} X'(t) &= e^{tA} \circ B \circ e^{tB} \ + \ A \circ e^{tA} \circ e^{tB} \\ &= B \circ e^{tA} \circ e^{tB} \ + \ A \circ e^{tA} \circ e^{tB} \qquad (\text{ da } \ A^k \ \circ B = B \circ A^k) \\ &= (A+B)X(t) \end{aligned}$$

Das hat wiederunm nach Satz 10.30 zur Folge, dass $X(t) = e^{t(A+B)}$. Das ergibt aber für $t = 1$ die Gleichung $e^A \circ e^B = e^{A+B}$.
Setzen wir nun $B = -A$, so folgt aus der 1. und 3. die 2. Behauptung:

$$e^A \circ e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E_n = e^{-A} \circ e^A.$$

Sei $X$ eine invertierbare Matrix. Dann folgt aus der Definition von $e^A$

$$\begin{aligned} Xe^AX^{-1} &= \lim_{N\to\infty} X \left( \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right) X^{-1} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{XA^kX^{-1}}{k!} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\left(XAX^{-1}\right)^k}{k!} \ = \ e^{XAX^{-1}}. \end{aligned}$$

Zum Beweis der 5. Eigenschaft benutzen wir die Jordansche Normalform von $A$. Wir wissen (siehe Vorlesung über lineare Algebra oder Algebra 1), dass man der Matrix $A$ durch Konjugation mit einer invertierbaren komplexen Matrix $X$ ihre Jordansche Normalform $J(A)$ zuordnen kann: $J(A) = X^{-1} \circ A \circ X$ . Beim Konjugieren bleiben die Spur und die Determinate einer Matrix unverändert, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} Tr\,A &= Tr\,J(A) \\ \det e^A &= \det\left(e^{X\circ J(A)\circ X^{-1}}\right) \ = \ \det\left(X \circ e^{J(A)} \circ X^{-1}\right) \ = \ \det e^{J(A)}. \end{aligned}$$

Eine solche Jordansche Normalform $J(A)$ hat nur Einträge auf der Diagonale und der oberen Nebendiagonale. Auf der Diagonale stehen dabei die (komplexen) Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des charakteristischen Polynoms von $A$. Man sieht leicht durch Ausrechnen (Übungsaufgabe), dass $e^{J(A)}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, auf deren Diagonale die Zahlen $e^{\lambda_1}, \ldots e^{\lambda_n}$ stehen. Folglich gilt:

$$e^{Tr\,A} = e^{Tr\,J(A)} = e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda_j} = \det e^{J(A)} = \det e^A.$$

□

**Anwendung des Matrizenexponentials auf die Lösung von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

Wir betrachten jetzt wieder die lineare homogene Differentialgleichung im $\mathbb{K}^n$: $x' = Ax$, wobei $A = (a_{ij})$ eine konstante $n \times n$-Martix ist. Ausgeschrieben lautet diese DGL

$$\begin{array}{rcll} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + \ldots + \quad a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + \ldots + \quad a_{2n}x_n(t) \\ \vdots & & \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + \ldots + \quad a_{nn}x_n(t). \end{array}$$

Dann gilt

**Satz 10.32** *Die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$ ist gegeben durch die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ mit*

$$\varphi(t) := e^{(t-t_0)A}x_0.$$

*Die allgemeine Lösung von $x' = Ax$ ist*

$$\varphi_{(c_1,\ldots,c_n)}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

*wobei die $c_i \in \mathbb{K}$ beliebige Konstanten sind.*

**Beweis**: Wir wissen, dass genau eine maximale Lösung des Anfangswertproblems auf $\mathbb{R}$ existiert. Damit genügt es zu zeigen, dass $\varphi_{x_0}(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ eine Lösung ist. Nach Satz 10.31 gilt

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi_{x_0}(t) & = & e^{tA} \circ \underbrace{e^{-t_0A}x_0}_{=const} \\ \overset{\text{Satz 10.30}}{\Longrightarrow} & \varphi_{x_0}'(t) & = & A \circ \underbrace{e^{tA} \circ e^{-t_0A}x_0}_{=e^{(t-t_0)A}x_0} \; = \; A \circ \varphi_{x_0}(t). \end{array}$$

Außerdem ist $\varphi_{x_0}(t_0) = e^{0 \cdot A}x_0 = e^0 x_0 = E_n x_0 = x_0$.
Die allgemeine Lösung erhält man für $t_0 = 0$ und $c = (c_1, \ldots, c_n) = x_0$ als Anfangswert. □

**Folgerung 10.4.2** *Ist $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Basis in $\mathbb{K}^n$, so bilden die Funktionen*

$$\varphi_1(t) := e^{tA}a_1\ ,\ \varphi_2(t) := e^{tA}a_2\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi_n(t) := e^{tA}a_n$$

*ein Fundamentalsystem für die DGL $x' = Ax$.* □

Die Aufgaben besteht nun darin, eine Basis $(a_1, \ldots, a_n)$ zu suchen, für die die Funktionen $\varphi_j(t) = e^{tA}a_j$ eine möglichst einfache Gestalt haben. Dies ist die Jordan-Basis, die die Jordansche Normalform von $A$ liefert. Wir werden im folgenden die nötigen Begriffe aus der Algebra nochmal zusammenfassen.

**Einschub: Die Jordansche Normalform komplexer Matrizen**

Sei $A$ eine komplexe $n \times n$–Matrix und $E_n$ die Einheitsmatrix.

- $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von $A$, falls der Eigenunterraum von $A$ zum Eigenwert $\lambda$
$$E_\lambda(A) := \ker(A - \lambda E_n) = \{x \in \mathbb{C}^n | \; Ax = \lambda x\}$$
ungleich $\{0\}$ ist.
- $g_\lambda :=\mathrm{dim} E_\lambda(A)$ heißt geometrische Vielfachheit von $\lambda$.
- Das Polynom $\chi_A \in \mathbb{C}[z]$ definiert durch
$$\chi_A(z) \;:=\; \det(A - zE_n)$$
heißt charakteristisches Polynom von $A$.
$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert von $A$ genau dann, wenn $\chi_A(\lambda) = 0$.

Dann gilt der
**Hauptsatz der Algebra:** *Jedes charakteristische Polynom zerlegt sich in Linearfaktoren.*
Sei nun

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \text{Zahl der Linearfaktoren } (z-\lambda) \text{ in der Linearfaktiorzerlegung von } \chi_A(z) \\ &= \underline{\text{algebraische Vielfachheit von } \lambda}. \end{aligned}$$

Weiterhin definiert man

$$H_\lambda(A) := \ker(A - \lambda E_n)^{m_\lambda} \;\; \text{den } \underline{\text{Hauptraum}} \text{ von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda.$$

Dann gelten die folgenden Eigenschaften

- $\mathrm{dim} H_\lambda(A) = m_\lambda$,
- $1 \leq g_\lambda \leq m_\lambda \leq n$,
- $H_\lambda(A)$ ist ein $A$-invarianter Unterraum, d.h. $A(H_\lambda(A)) \subset H_\lambda(A)$.

Sei nun $\chi_A(z) = \prod_{j=1}^{s}(z - \lambda_j)^{m_j}$ die Zerlegung von $\chi_A$ in Linearfaktoren zu verschiedenen $\lambda_j$ $(0 < m_j \leq n)$. Dann sind die $\lambda_j$ Eigenwerte von $A$, und $\mathbb{C}^n$ zerlegt sich in $A$-invariante Unterräume

$$\mathbb{C}^n \;=\; \bigoplus_{j=1}^{s} H_{\lambda_j}(A).$$

Ist $g_\lambda$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda$, so zerlegt sich $H_\lambda(A)$ weiter in $A$-invariante Unterräume

$$H_\lambda(A) \;=\; U_1 \oplus \ldots \oplus U_{g_\lambda},$$

die jeweils (bis auf Vielfachheiten) genau einen Eigenvektor enthalten.
Im folgenden bezeichnen wir mit $\varphi$ die Matrix $\varphi := A - \lambda E_n$.
In jedem Unterraum $U_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, g_\lambda$ existiert eine Basis $(a_1, \ldots, a_{s_\alpha})$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{array}{rcll} \varphi\, a_1 &=& 0 & \text{d.h.} \quad A\, a_1 = \lambda\, a_1 \\ \varphi\, a_2 &=& a_1 & \text{d.h.} \quad A\, a_2 = \lambda\, a_2 + a_1 \\ \varphi\, a_3 &=& a_2 & \text{d.h.} \quad A\, a_3 = \lambda\, a_3 + a_2 \\ \vdots && \vdots & \qquad\quad \vdots \\ \varphi\, a_s &=& a_{s-1} & \text{d.h.} \quad A\, a_s = \lambda\, a_s + a_{s-1}. \end{array}$$

Eine solche Basis in $U_\alpha$ nennt man Jordan-Kette zum Eigenwert $\lambda$ mit dem Eigenvektor $a_1$. Kennt man den letzten Vektor der Kette, so kennt man alle anderen Vektoren, da $a_{i-1} = \varphi a_i$ für $i = 1, \ldots, s$. Die Jordankette ist also gegeben durch

$$(\varphi^{s-1}(a_s), \varphi^{s-2}(a_s), \ldots, \varphi(a_s), a_s).$$

Eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Jordan-Ketten in den Haupträumen heißt dann Jordan-Basis.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann nennt man

$$D_r(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{r\times r} \quad \text{„Jordan-Kästchen“.}$$

Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Jordan-Basis von $A$ und $B := (b_1, \ldots, b_n)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $b_1$ bis $b_n$. In dieser Basis hat $A$ die Form

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} \boxed{D_{r_{11}}(\lambda_1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{D_{r_{1g_{\lambda_1}}}(\lambda_1)} \end{matrix}}}^{H_{\lambda_1}(A)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \boxed{D_{r_{s1}}(\lambda_s)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \boxed{D_{r_{sg_{\lambda_s}}}(\lambda_s)} \end{matrix}}}_{H_{\lambda_s}(A)} \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Eigenwerte von $A$, und $\lambda_i$ hat die geometrischen Vielfachheit $g_{\lambda_i}$ und die arithmetische Vielfachheit $m_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{g_{\lambda_i}} r_{ij}$.

**Verfahren zur Bestimmung der Jordanschen Normalform:** Wichtig dafür sind die Eigenwerte und die Jordanketten dazu.

1. Bestimmen die Eigenwerte von $A$, d.h die Nullstellen von $\chi_A$. Seien dies $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

2. Bestimmen die Haupträume zu jedem Eigenwert $\lambda = \lambda_i$:

$$H_\lambda(A) = \ker(A - \lambda E_n)^{m_\lambda}.$$

3. Betrachten die „Flagge“von Unterräumen, definiert durch $\varphi = A - \lambda E_n$ im Hauptraum $H_\lambda(A)$:

$$0 \subset V_1 = \ker\varphi \subset V_2 = \ker\varphi^2 \subset \ldots \subset V_r = \ker^r\varphi.$$

   Sei $r := \min\{i \mid \ker \varphi^i = H_\lambda(A)\}$. Es ist

$$H_\lambda(A) = V_r = W_r \oplus V_{r-1}.$$

4. Fixiere ein Komplement von $V_{r-1}$ in $V_r$

$$V_r = W_r \oplus V_{r-1},$$

und bestimmen eine Basis $w_{r1}, \dots, w_{rs}$ von $W_r$. Dann sind $\varphi(w_{r1}), \dots, \varphi(w_{rs})$ linear unabhängig und in $V_{r-1}$.

5. Zerlege $V_{r-1} = W_{r-1} \oplus V_{r-2}$, wobei $W_{r-1}$ eine Basis in der Form

$$w_{r-1,1} = \varphi(w_{r1}),\ \dots\ , w_{r-1,s} = \varphi(w_{rs}),\ w_{r-1,s+1},\ \dots,\ w_{r-1,\rho}$$

hat.

Und so verfahren wir weiter, d.h. wir zerlegen in jedem Schritt

$$V_j = W_j \oplus V_{j-1},$$

und bestimmen eine Basis in $W_j$, deren erste Vektoren durch Anwendung von $\varphi$ auf die Basis von $W_{j+1}$ enstehen.

$$H_\lambda(A) = W_r \oplus W_{r-1} \oplus \underbrace{W_{r-2} \oplus \dots \oplus \underbrace{W_2 \oplus \overset{\text{Eigenunterraum}}{\overset{\downarrow}{V_1}}}_{=V_2}}_{=V_{r-2}}.$$

**Beispiel: r=4**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_4$ | $w_{41}$ | $w_{42}$ | | | | | |
| $W_3$ | $\varphi(w_{41})$ | $\varphi(w_{42})$ | $w_{33}$ | $w_{34}$ | | | |
| $W_2$ | $\varphi^2(w_{41})$ | $\varphi^2(w_{42})$ | $\varphi(w_{33})$ | $\varphi(w_{34})$ | $w_{25}$ | | |
| $W_1$ | $\varphi^3(w_{41})$ | $\varphi^3(w_{42})$ | $\varphi^2(w_{33})$ | $\varphi^2(w_{34})$ | $\varphi(w_{25})$ | $w_{16}$ | $w_{17}$ |
| | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ | $U_4$ | $U_5$ | $U_6$ | $U_7$ |

In diesem Fall sieht die Jordansche Normalform von $A_{|H_\lambda(A)}$ folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix}
\boxed{\begin{matrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{matrix}} &&&&&& \\
& \boxed{\begin{matrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{matrix}} &&&&& \\
&& \boxed{\begin{matrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{matrix}} &&&& \\
&&& \boxed{\begin{matrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{matrix}} &&& \\
&&&& \boxed{\begin{matrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{matrix}} && \\
&&&&& \boxed{\lambda} & \\
&&&&&& \boxed{\lambda}
\end{pmatrix}.$$

**Beispiel 1**: Wir betrachten die $(2 \times 2)$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich für das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von $A$

$$\chi_A(\lambda) \;=\; \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \;=\; \lambda(\lambda+2)+1 \;=\; \lambda^2+2\lambda+1 \;=\; (\lambda+1)^2.$$

Folglich ist $\lambda = -1$ doppelte Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$, d.h es gilt:

- für den Hauptraum $H_{-1}(A) = \mathbb{C}^2$,
- $\varphi = A + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Wir haben die folgende Flagge

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \subset & \ker\varphi & \subset & \mathbb{C}^2 & = & V_2 \\ & & \| & & & & \\ & & V_1 & = & E_{-1}(A) & = & \{x \mid \varphi x = 0\}. \end{array}$$

D.h. $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt im Komplement von $V_1$. Es ist

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 & = & W_2 & \oplus & V_1 \\ & & \| & & \\ & & \mathbb{C}\, w_2 & & \end{array}$$

und

$$\varphi(w_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man hat also die Jordanbasis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Jordansche Normalform $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Beispiel 2**: Wir betrachten die $(3 \times 3)$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und berechnen die Eigenwerte von $A$, indem wir die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ bestimmen.

$$\chi_A(z) \;=\; \det(A - \lambda E) \;=\; \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \;=\; (1-\lambda)^3.$$

Somit ist $\lambda = 1$ dreifache Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$. Es gilt:

- für den Hauptraum $H_1(A) = \mathbb{C}^3$ und

- $\varphi = A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Wir haben die folgende Flagge

$$0 \subset V_1 = \ker\varphi \subset V_2 = \ker\varphi^2 = \mathbb{C}^3 , \qquad \text{da } \varphi^2 \text{ die Nullmatrix ist.}$$

Wir bestimmen $V_1$ und ein Komplement dazu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{vom Rang } 1} x = 0 \iff x \in \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = V_1,$$

$V_1$ ist also zweidimensional und $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt im Komplement von $V_1$., d.h.

$W_2 = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Außerdem ist $\varphi w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1$ und ergänzend dazu $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man hat also

$$\text{Jordanketten: } \overset{U_1}{\overset{\downarrow}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{U_2}$$

$$\text{Jordansche Normalform: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Beispiel 3**: Wir betrachten die $(3 \times 3)$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst wieder die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 1 + 1 + (1-\lambda) - \lambda - (2-\lambda) \\ &= -\lambda(2 - 3\lambda + \lambda^2) + 2 - 1 - \lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= -(\lambda - 1)^3. \end{aligned}$$

Somit ist $\lambda = 1$ dreifache Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$. Es ist

$$\varphi = A - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben die folgende Flagge

$$0 \subset V_1 = \ker\varphi \subset V_2 = \ker\varphi^2 \subset \mathbb{C}^3.$$

Es ist

- $\varphi^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang } 1},$

- $V_2 = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$

- $W_3 = \mathbb{C}\, w_3 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

- $\varphi(w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi^2(w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

- $\mathbb{C}^3 = V_3 \ = \ W_3 \oplus V_2 = \overset{\overset{w_3}{\downarrow}}{W_3} \oplus \underbrace{\overset{\overset{\varphi(w_3)}{\downarrow}}{W_2} \oplus V_1}_{=V_2}.$

Man hat also

$$\text{Jordankette=Jordanbasis} \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jordansche Normalform} \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Verfahren für die Lösung der linearen, homogenen DGL $x' = Ax$ in $\mathbb{C}^n$ (Bestimmung eines komplexen Fundamentalsystems)**

**(1)** Wir bilden die **Jordansche Normalform** der komplexen Matrix $A$, d.h.

- Eigenwerte bestimmen,
- Haupträume bestimmen,
- Zerlegung der Haupträume in die invarianten Unterräume $U_\alpha$, d.h. Jordanketten in den Haupträumen bestimmen.

Sei $(a_1, \ldots, a_s)$ eine Jordankette zum Eigenwert $\lambda$, $X = (a_1, \ldots, a_s)$ die Matrix, die aus den Spaltenvektoren $a_j$ besteht und $U = \text{span}(a_1, \ldots, a_s)$. Dann bringt eine Konjugation mit $X$ die Martix $A_{|U}$ auf die Jordansche Normalform, d.h. es ist

$$X^{-1}A_{|U}X = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = D(\lambda) \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{rcl} A\,a_1 &=& \lambda\,a_1 \\ A\,a_2 &=& \lambda\,a_2 + a_1 \\ A\,a_3 &=& \lambda\,a_3 + a_2 \\ &\vdots& \\ A\,a_s &=& \lambda\,a_s + a_{s-1}. \end{array}$$

**(2)** Wir müssen das **Fundamentalsystem ermitteln**: Es ist $e^{tA}(U) = U$. Auf $U$ hat $e^{tA}$ in der Basis $(a_1, \ldots, a_s)$ die Matrixgestalt

$$X^{-1}(e^{tA})_{|U}X = e^{X^{-1}A_{|U}X} = e^{tD(\lambda)} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der $\alpha$-te Spalte dieser Matrix stehen die Komponenten des Vektors $e^{tA}a_\alpha$ in der Basis $(a_1, \ldots, a_s)$. Es ist also

$$\varphi_\alpha(t) = e^{tA}a_\alpha = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}a_1 + \frac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}a_2 + \ldots + ta_{\alpha-1} + a_\alpha \right)$$

für $\alpha = 1, \ldots, s$.
Diese Funktionen gehören zum Fundamentalsystem der DGL $x' = Ax$, denn es galt:

> Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Jordanbasis, so ist $\left(\varphi_j(t) = e^{tA}b_j\right)_{j=1}^n$ ein Fundamentalsystem.

Damit ergibt sich folgender Satz.

**Satz 10.33** *Sei $A$ eine komplexe $(n \times n)$-Matrix und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Jordanbasis von $A$. Für jede Jordankette $(a_1, \ldots, a_k)$ zum Eigenwert $\lambda$ in dieser Jordanbasis bildet man die Funktionen*

$$\varphi_\alpha(t) = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}a_1 + \frac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}a_2 + \ldots + ta_{\alpha-1} + a_\alpha \right) \quad \textit{für } \alpha = 1, \ldots, s.$$

*Alle so gebildeten Funktionen bilden ein Fundamentalsystem von $x' = Ax$ in $\mathbb{C}^n$.*

**Verfahren zur Lösung der linearen, homogenen DGL $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^n$ (Bestimmung eines reellen Fundamentalsystems)**

Sei $A$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix. Um die lineare homogene Differentialgleichung $x' = Ax$ zu lösen, geht man folgendermaßen vor:

1. Man löst $x' = Ax$ im Komplexen ($A \in \mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$).

2. Aus den komplexen Lösungen bekommt man die reellen Lösungen.

**Jordansche Normalform von $A$:** Wir bezeichnen mit $\overline{z}$ die komplexe Konjugation einer kompexen Zahl bzw. eines komplexen Vektors $z$. Da die Matrix $A$ reell ist, gilt für ihre Eigenwerte und Eigenvektoren $A\overline{x} = \overline{\mu} \cdot \overline{x}$ falls $Ax = \mu x$. D.h. man hat die folgenden Eigenwerte:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1, \ldots, \lambda_s & \text{reelle Eigenwerte,} \\ \left.\begin{array}{l} \mu_1, \ldots, \mu_r \\ \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_r \end{array}\right\} & \text{echt komplexe Eigenwerte.} \end{array}$$

Es treten also zwei Fälle auf:

(1) Ist $\lambda$ ein reeller Eigenwert, so können die Jordanketten durch reelle Vektoren gewählt werden ($Aa_r = \lambda a_r + a_{r-1}$ alles reell). In diesem Fall wird das Fundamentalsystem aus den folgenden Funktionen gebildet:

$$\varphi_\alpha(t) = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} a_1 + \frac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} a_2 + \ldots + t a_{\alpha-1} + a_\alpha \right) \quad \text{für } \alpha = 1, \ldots, s.$$

(2) Ist $(\mu, \overline{\mu})$ ein Paar komplexer Eigenwerte und $(b_1, \ldots, b_p)$ eine Jordankette zu $\mu$, so ist $(\overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_p)$ eine Jordankette zu $\overline{\mu}$ (da $Ab_r = \mu b_r + b_{r-1} \implies A\overline{b}_r = \overline{\mu}\, \overline{b}_r + \overline{b}_{r-1}$).

In diesem Fall erhält man also ein Fundamentalsystem aus den Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_\beta(t) &= e^{\mu t} \cdot \left( \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} b_1 + \frac{t^{\beta-2}}{(\beta-2)!} b_2 + \ldots + t b_{\beta-1} + b_\beta \right) \\ \overline{\psi}_\beta(t) &= e^{\overline{\mu} t} \cdot \left( \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \overline{b}_1 + \frac{t^{\beta-2}}{(\beta-2)!} \overline{b}_2 + \ldots + t \overline{b}_{\beta-1} + \overline{b}_\beta \right) \end{aligned}$$

für $\beta = 1, \ldots, r$. Aus diesen komplexen linear unabhängigen Funktionen kann man die reellen linear unabhängigen Funktionen

$$\begin{array}{ll} Re(\psi_\beta(t)) & \text{und} \\ Im(\psi_\beta(t)), & \beta = 1, \ldots, r \end{array}$$

bilden.

Damit erhalten wir folgenden Satz.

**Satz 10.34** *Sei $A$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Man erhält ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen der DGL $x' = Ax$ im durch die oben angegebenen Funktionen:*

$$\begin{array}{ll} \varphi_\alpha & \textit{zu den Jordanketten zu reellen Eigenwerten,} \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(\psi_\beta(t)) \\ \mathrm{Im}(\psi_\beta(t)) \end{array}\right\} & \textit{zu den Jordanketten zu den echt komplexen Eigenwertpaaren } (\mu, \overline{\mu}). \end{array}$$

**Beispiel 1**: Wir betrachten die DGL $x' = Ax$ mit der $(2 \times 2)$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und die DGL} \quad x' = Ax.$$

Hier hatten wir die Jordanbasis berechnet zum reellen Eigenwert $\lambda = -1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Damit erhält man als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{-t}a_1 &&= e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \varphi_2(t) &= e^{-t}(ta_1 + a_2) &&= e^{-t}\begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit als Lösung:

$$x(t) = e^{-t}\left(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix}\right).$$

**Beispiel 2**: Wir betrachten die DGL $x' = Ax$ mit der $(3 \times 3)$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir hatten die Jordanketten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda = 1$ berechnet. Man erhält also als Fundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2(t) = e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \varphi_3(t) = e^t\left(t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^t\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

und somit als Lösung

$$x(t) = e^t\left(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}\right).$$

**Beispiel 3**: Wir betrachten die DGL $x' = Ax$ mit der $(3 \times 3)$–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Als Jordankette zum Eigenwert $\lambda = 1$ hatten wir oben $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bestimmt.

Damit erhalten wir als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\varphi_2(t) &= e^t \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &&= e^t \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \\
\varphi_3(t) &= e^t \left( \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &&= e^t \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ t \\ -\frac{t^2}{2} + t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und somit als Lösung

$$x(t) = e^t \left( c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ t \\ -\frac{t^2}{2} + t \end{pmatrix} \right).$$

**Beispiel 4**: Wir betrachten die DGL $x' = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich für das charakteristische Polynom $\chi_A(z) = z^2 + 1$. Dies hat die echt komplexen, zueinander konjugierten Nullstellen i und $-$i, d.h. man hat die Eigenwerte $\mu = \mathrm{i}$ und $\overline{\mu} = -\mathrm{i}$. Weiterhin ist $g_\mu = m_\mu$, d.h. man hat die Eigenvektoren zu bestimmen. Es genügt dies für $\mu = \mathrm{i}$ zu tun:

$$(A - \mathrm{i})a = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} a = 0 \implies a = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Somit hat man als komplexes Fundamentalsystem

$$\psi_1(t) = e^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \psi_2(t) = e^{-\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den Realteil und den Imaginarteil von $\psi_1$

$$\psi_1(t) = e^{\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = (\cos t + \mathrm{i} \sin t) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Re}\psi_1(t) = \varphi_1(t)} + \mathrm{i} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{=\mathrm{Im}\psi_1(t) = \varphi_2(t)}$$

Als reelles Fundamentalsystem erhalten wir also die Funktionen

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \qquad \text{und } \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Die reelle Lösung ist

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Geometrische Diskussion der Integralkurven der linearen homogenen DGL $x' = Ax$ im $\mathbb{R}^2$**

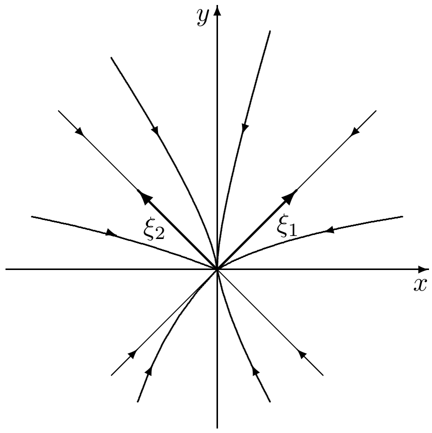
In diesem Abschnitt veranschaulichen wir uns den Verlauf der Lösungskurven der homogenen linearen Diffentialgleichung $x' = Ax$ für reelle $(2 \times 2)$-Matrizen $A$ bei den verschiedenen möglichen Jordanschen Normalformen von $A$.
$\chi_A(\lambda)$ bezeichne das zu $A$ gehörende charakteristische Polynom und $\lambda_1, \lambda_2$ seien die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$.

<u>1.Fall</u>: Seien $\lambda_1, \lambda_2$ reell und verschieden. Dann existiert eine Orthonormalbasis $(\xi_1, \xi_2)$ aus Eigenvektoren im $\mathbb{R}^2$. Die Jordansche Normalform von $A$ bzgl. $(\xi_1, \xi_2)$ sieht dann folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

und die Integralkurven werden beschrieben durch

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2.$$

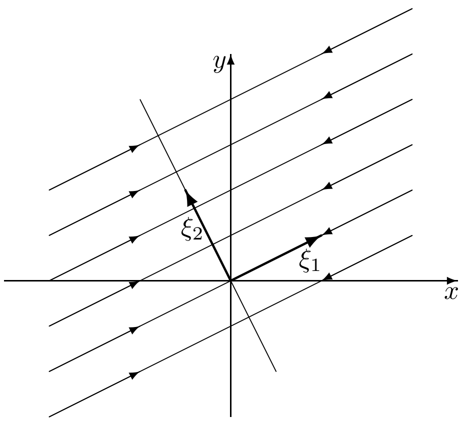


Fall 1.1

1.1 Sei $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Dann laufen alle Integralkurven in den Punkt $(0, 0)$. Dieser Punkt wird Knoten genannt.
1.2 Sei $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 = 0$. Dann sind die Integralkurven

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 \xi_2.$$

Das heißt, alle Integralkurven laufen auf die $\xi_2$–Achse, parallel zur $\xi_1$–Achse, zu.



Fall 1.2

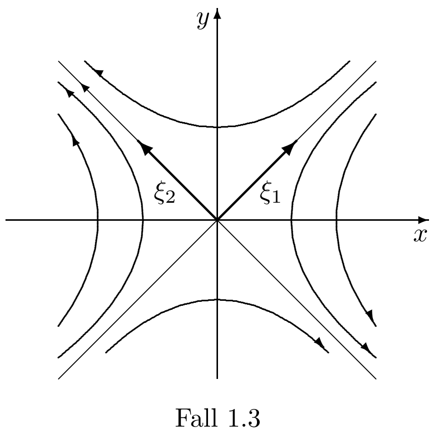
1.3 Sei $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Dann konvergiert $e^{\lambda_1 t}$ gegen 0 und $e^{\lambda_2 t}$ gegen $\infty$ für $t$ gegen $\infty$. Der Punkt $(0, 0)$ heißt Sattel.

1.4 Sei $0 = \lambda_1 < \lambda_2$. Dann sind die Integralkurven

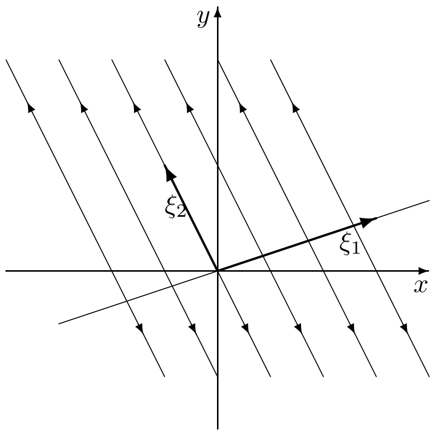
$$\varphi(t) = c_1 \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei $e^{\lambda_2 t}$ gegen $\infty$ konvergiert für $t$ gegen $\infty$. Die Integralkurven sind also Geraden, die parallel zur $\xi_2$–Achse sind.

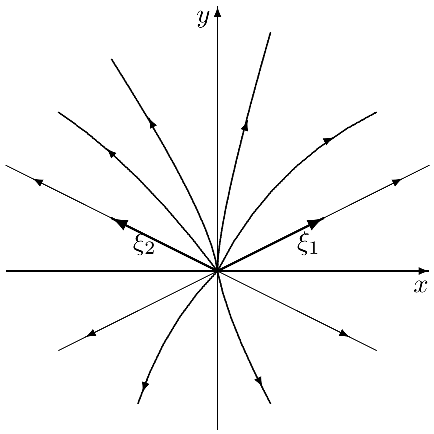
1.5 Sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.



Fall 1.3




Fall 1.4

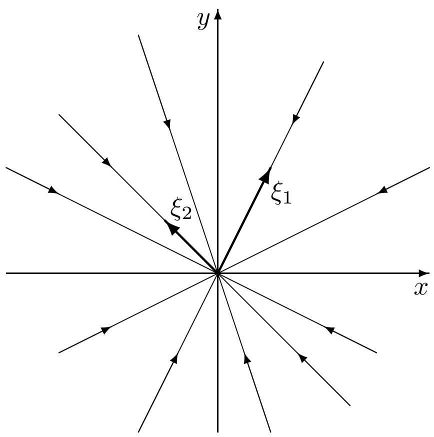



Fall 1.5

<u>2.Fall</u>: Seien $\lambda_1 = \lambda_2$ reell.
2.1 $A$ sei diagonalisierbar, das heißt $A$ hat $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ als zweifachen Eigenwert und $A$ hat bzgl. der Basis der Eigenvektoren die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Integralkurven sind dann Geraden $\varphi(t) = e^{t\lambda}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$. Wir erhalten einen degenerierten Knoten in $(0,0)$. Für $\lambda < 0$ laufen die Geraden auf den Knoten zu, für $\lambda > 0$ von ihnen weg.




Fall 2.1

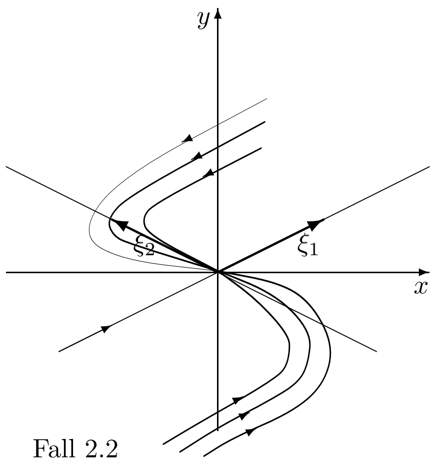
2.2 Sei $A$ nicht diagonalisierbar. Sei $\xi_1$ der Eigenvektor zu $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ und $\xi_2$ der Hauptvektor zu $\lambda$. Dann hat $A$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis $(\xi_1, \xi_2)$. Wir erhalten dann die Integralkurven

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}((c_1 + tc_2)\xi_1 + c_2\xi_2).$$

Für $\lambda < 0$ laufen alle Integralkurven in den Punkt $(0,0)$ während für $\lambda > 0$ die Kurven von $(0,0)$ weglaufen.




Fall 2.2

<u>3.Fall</u>: $A$ habe die komplexen Eigenwerte $\mu = \alpha + i\beta$ und $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$. Dann exsitiert ein $\xi \in \mathbb{C}^2$, so dass $A$ bzgl. $(\xi, \overline{\xi})$ die Form

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix}$$

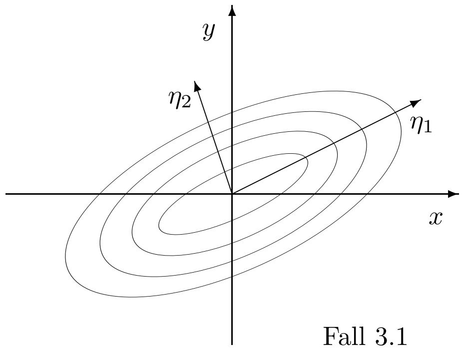
hat. Sei $\xi = \eta_1 + i\eta_2$ für $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$. Dann sind die Integralkurven

$$\varphi(t) = e^{\alpha t}((\cos(\beta t) \cdot \eta_1 - \sin(\beta t) \cdot \eta_2)c_1 + (\cos(\beta t) \cdot \eta_2 + \sin(\beta t) \cdot \eta_1)c_2).$$

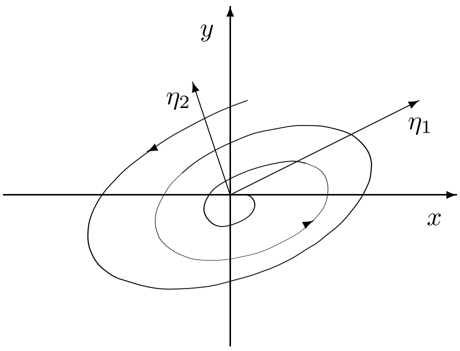
3.1 Sei $\alpha = 0$. Dann ist $\mu = i\beta$ und die Integralkurven sind periodisch.

3.2 Ist $\alpha < 0$, so sind die Integralkurven Spiralen, die zu $(0,0)$ hinlaufen.

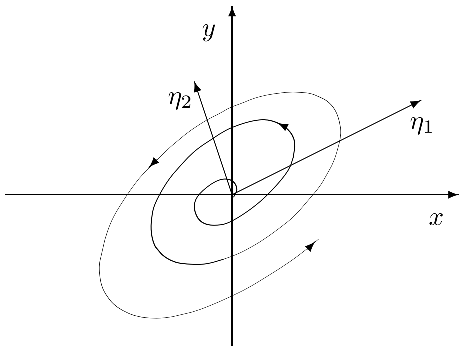
3.3 Ist $\alpha > 0$, so sind die Integralkurven Spiralen, die von $(0,0)$ weglaufen.




Fall 3.1




Fall 3.2




Fall 3.3

### 10.4.3 Die lineare Differentialgleichung $n$–ter Ordnung im $\mathbb{R}^1(\mathbb{C}^1)$

In diesem Abschnitt betrachten wir die folgende DGL in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t) = b(t),$$

wobei $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ stetige Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sind. Die Gleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t) = 0 \tag{10.47}$$

heißt homogene, lineare DGL $n$. Ordnung , und die Gleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)x(t) = b(t) \tag{10.48}$$

heißt inhomogene, lineare DGL $n$. Ordnung. Nach Satz 10.1 ist die DGL (10.47) (bzw. (10.48)) äquivalent zu einem DGL–System erster Ordnung im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$. Wir setzen dazu

$$y_1 = x \ , \ y_2 = y_1' = x' \ , \ y_3 = y_2' = x'' \ , \ \ldots \ , \ y_n = y_{n-1}' = x^{(n-1)}$$

und betrachten die homogene lineare DGL

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{=:A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \tag{10.49}$$

bzw. die inhomogene lineare DGL

$$y' = A(t)y + B(t) \text{ mit } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \tag{10.50}$$

Nach Satz 10.1 ist $x$ genau dann Lösung von (10.47), wenn $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$ Lösung von (10.49) ist. Ebenso ist $x$ genau dann Lösung von (10.48), wenn $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$ Lösung von (10.50) ist.
Die Funktionen $x_1, \dots, x_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)})^t \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \varphi_k &= (x_k, x_k', \dots, x_k^{(n-1)})^t \end{aligned}$$

linear unabhängig sind.
Damit können wir die Sätze aus Kapitel 9.4.1 auf diesen Spezialfall anwenden und erhalten:

**Satz 10.35** *(1) Sei $V$ der Lösungsraum der homogenen DGL (10.47), das heißt*

$$V = \{x : I \longrightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ löst } (10.47)\}.$$

*Dann ist $V$ ein $n$–dimensionaler, $\mathbb{K}$-Vektorraum.*
*(2) Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von $V$, das heißt ein Fundamentalsystem der DGL (10.47). $y_s$ sei eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (10.48). Dann erhält man alle Lösungen von (10.48) durch*

$$y(t) = y_s(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t) \quad c_k \in \mathbb{K}.$$

**Beweis**: Man wendet Satz 10.26 auf (10.50) an und betrachtet die erste Komponente der Lösungsfunktion. □

Seien $x_1, \dots, x_n$ Lösungen von (10.47). Wir betrachten die zugehörigen Lösungen $\varphi_i = (x_i, x_i', \dots, x_i^{(n-1)})$ von (10.49). Dann heißt

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) := W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (t)$$

Wronski–Determinante von $x_1, \dots, x_n$. Aus Kapitel 8.4.1 folgt:

1. $(x_1, \dots, x_n)$ ist genau dann ein Fundamentalsystem von (10.47), wenn $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

2. Ist $(x_1, \dots, x_n)$ ein Fundamentalsystem von (10.47), so folgt nach dem Satz 10.27 von Liouville, dass

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\, ds}.$$

**Satz 10.36** *Sei $x_1, \dots, x_n$ ein Fundamentalsystem von (10.47). Dann ist eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (10.48) gegeben durch*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(b)(s)}{W(x_1, \dots, x_n)(s)}\, ds,$$

*wobei*

$$W_k(b) = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-1} & 0 & x_{k+1} & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_{k-1}' & 0 & x_{k+1}' & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_{k-1}^{(n-1)} & b(s) & x_{k+1}^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Beweis**: Wir wenden Satz 10.28 auf (10.50) und erhalten mit der Äquivalenz von (10.48) und (10.50) die Behauptung. □

Der Beweis liefert eine **Praktische Methode** zur Bestimmung einer speziellen Lösung der DGL (10.48):

**(1)** Bestimmen ein Fundamentalsystem $x_1, \dots, x_n$ von (10.47).

**(2)** Bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (10.48) mittels

a) Variation der Konstanten: Dazu machen wir den Ansatz:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t) \underline{c_k(t)}$$

und bestimmen die Funktionen $c_k(t)$ so, dass $y(t)$ die inhomogene DGL (10.48) löst. Damit die Bestimmung der $c_k(t)$ möglichst einfach wird, setzt man am besten $y(t)$ nicht direkt in (10.48) ein, sondern die Funktion $\psi = (y, y', \dots, y^{n-1})^t$ in (10.50). Dann erhält man als Bedingung für die Ableitungen $c_k'(t)$ das folgende lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) c_k'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_k^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

das man wie üblich lösen kann. Integration liefert dann die Funktionen $c_k(t)$.

b) Sind die Koeffizientenfunktionen $a_k(t) \equiv a_k$ konstant, so kann man bei „einfacher"rechter Seite speziellere Ansätze für eine Lösung der inhomogenen DGL machen. Sei $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$.

| $b(t)$ | Ansatz für $x_s(t)$ |
|---|---|
| $e^{rt}\sum_{k=0}^{N} c_k t^k$,<br>$r$ ist $m$-fache Nullstelle<br>von $p(\lambda)$ | $e^{rt}\cdot t^m \cdot \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k t^k$ |
| $e^{\alpha t}\cos(\beta t)\sum_{k=0}^{N} c_k t^k$<br>$e^{\alpha t}\sin(\beta t)\sum_{k=0}^{N} c_k t^k$<br>$\alpha + \mathrm{i}\beta$ ist $m$-fache Nullstelle<br>von $p(\lambda), m \geq 0$ | $e^{\alpha t}\cdot t^m \cdot \left\{\cos(t\beta)\sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k t^k + \sin(t\beta)\sum_{k=0}^{N} \tilde{d}_k t^k\right\}$ |

Dabei bestimmt man $\tilde{c}_k$ und $\tilde{d}_k$ durch Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich.

c) Ist der Störterm $b(t)$ der DGL (10.48) von der Form $b(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$ , dann gilt:

> Ist $y_1$ eine spezielle Lösung der DGL mit Störterm $b_1(t)$ und $y_2$ eine spezielle Lösung mit Störterm $b_2(t)$, so ist $y(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ eine spezielle Lösung der DGL mit Störterm $b(t)$.

Daraus ergibt sich: Wie für das System ist für die Lösung der DGL

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x \;=\; b(t)$$

die Kenntnis des Fundamentalsystems wichtig. Wir erklären zunächst, wie man ein solches Fundamentalsystem für DGL mit konstanten Koeffizienten $a_k$ erhält und fügen dann einige Kommentare für den Fall nicht-konstanter Koeffizienten an.

### I. Die homogene lineare DGL $n$-ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten

Wir betrachten nun den Fall, dass die Funktionen $\mathbf{a_j(t) \equiv a_j}$ **reelle und konstant** sind. Wie erhält man dann ein Fundamentalsystem? Man könnte nach dem allgemeinen Verfahren die Jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir können hier aber einfacher anders vorgehen. Wir wissen bereits, dass das Fundamentalsystem durch Funktionen der Form $e^{\lambda_j t}t^k$, mit einem Eigenwert $\lambda_j$ von A, gegeben wird. Wir gehen nun folgendermaßen vor: Wir wollen die lineare homogene DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$$

für konstante Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ lösen. Wir ordnen dieser DGL das folgende Polynom $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ zu:

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

$P(\lambda)$ heißt das charakteristisches Polynom der DGL (10.4.3). (Dies entspricht bis auf ein Vorzeichen der Determinate von $A - \lambda E_n$, wenn man nach der letzten Zeile entwickelt.) Man erhält auf folgende Weise ein Fundamentalsystem:

**Satz 10.37** *Seien*

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *die reellen Nullstellen von* $P$ *mit der algebraischen Vielfachheit* $m_j$ *zu* $\lambda_j$ *und*
- $(\mu_1, \overline{\mu}_1), \ldots, (\mu_p, \overline{\mu}_p)$ *die Paare echt komplexer Nullstellen von* $P$ *mit der algebraischen Vielfachheit* $v_l$ *zu* $\mu_l$ *und* $\overline{\mu}_l$,

*d.h.*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \cdot (\lambda - \mu_1)^{v_1} \cdot (\lambda - \overline{\mu}_1)^{v_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \mu_p)^{v_p} \cdot (\lambda - \overline{\mu}_p)^{v_p}$$

*und* $\mu_l = u_l + iv_l$ *für alle* $l = 1, \ldots, p$. *Dann ist ein Fundamentalsystem von (10.4.3) durch folgende reelle Funktionen gegeben*

$$\begin{array}{rclll} x_{jk}(t) & = & e^{\lambda_j t} \cdot t^k & & \forall\, j = 1, \ldots, s,\ k = 0, \ldots, m_j - 1 \\ y_{lq}(t) & = & e^{\alpha_l t} \cdot \cos(\beta_l t) \cdot t^q & \rbrace & \forall\, l = 1, \ldots, p,\ q = 0, \ldots, \nu_l - 1. \\ \tilde{y}_{lq}(t) & = & e^{\alpha_l t} \cdot \sin(\beta_l t) \cdot t^q & & \end{array}$$

**Beweis**:
1.) Lösung der DGL im Komplexen:
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen, komplexen Nullstellen von $P(\lambda)$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $m_j$.

a) Behauptung:

Die Funktionen $x_{jk} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gegeben durch

$$x_{kj}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad j \in \{1, \ldots, s\},\ k \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$$

lösen die DGL $\sum\limits_{l=0}^{n} a_l x^{(l)} = 0$.

Nach dem Haupsatz der Algebra gilt

$$\sum_{l=0}^{n} a_l \lambda^l = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{m_j} \in \mathbb{C}[\lambda].$$

Diese Identität gilt dann auch in $\mathbb{C}[\frac{d}{dt}]$ als Differentialgleichung (Koeffizientenvergleich):

$$\sum_{l=0}^{n} a_l \frac{d^l}{dt^l} = \prod_{j=1}^{r} (\frac{d}{dt} - \lambda_j)^{m_j}. \tag{10.51}$$

Andererseits errechnet man

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_j) x_{\alpha j}(t) = k \cdot x_{k-1,j}(t)$$

für die Funktionen $x_{\alpha j}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^\alpha, \;\; j = 1, \ldots, r, \alpha = 0, \ldots, m_j - 1$. Da $k \leq m_j - 1$ ist, erhalten wir durch mehrfaches Anwenden

$$(\frac{d}{dt} - \lambda_j)^{m_j} x_{kj}(t) = 0 \quad k \in \{0, \ldots, m_j - 1\}$$

und damit wegen (10.51)

$$\sum_{l=0}^{n} a_l x_{kj}^{(l)} \equiv 0.$$

b) Die Funktionen $x_{\alpha j}(t)$, $j = 1, \ldots, r$, $\alpha = 0, \ldots, m_j - 1$ sind linear unabhängig (Übungsaufgabe), sie bilden somit ein Fundamentalsystem im komplexen Lösungsraum.

2.) Da die Koeffizienten reell sind, $a_j \in \mathbb{R}$, gibt es reelle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ und Paare echter komplexer Nullstellen $(\mu_1, \overline{\mu}_1), \ldots, (\mu_p, \overline{\mu}_p)$. Sei $\mu_l = u_l + i w_l$. Dann bilden die Funktionen

$$\begin{array}{rcll} x_{\alpha j}(t) & = & e^{\lambda_j t} \cdot t^\alpha & , \; j = 1, \ldots, s, \; \alpha = 0, \ldots, m_j - 1, \\ z_{lq}(t) & = & e^{t(u_l + \mathrm{i} w_l)} \cdot t^q, & \multirow{2}{*}{$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \; l = 1, \ldots, p, \; q = 0, \ldots, \nu_l - 1$} \\ \overline{z}_{lq}(t) & = & e^{t(u_l - \mathrm{i} w_l)} \cdot t^q & , \end{array}$$

ein komplexes Fundamentalsystem. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z_{lq}(t)) &= t^q \cdot e^{t a_l} \cos(w_l t) \\ \mathrm{Im}(z_{lq}(t)) &= t^q \cdot e^{t a_l} \sin(w_l t). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$span_{\mathbb{C}}(z_{lq}, \overline{z}_{lq}) = span_{\mathbb{C}}(\mathrm{Re} z_{lq}, \mathrm{Im} z_{lq}).$$

Folglich haben wir mit

$$\begin{array}{rcll} x_{\alpha j}(t) & = & e^{\lambda_j t} \cdot t^\alpha & , \; j = 1, \ldots, s, \; \alpha = 0, \ldots, m_j - 1, \\ y_{lq}(t) & = & e^{t u_l} \cdot t^q \cdot \cos(w_l t), & \multirow{2}{*}{$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \; l = 1, \ldots, p, \; q = 0, \ldots, \nu_l - 1$} \\ \overline{y}_{lq}(t) & = & e^{t u_l} \cdot t^q \sin(w_l t), & \end{array}$$

ein reelles Fundamentalsystem. □

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$x''' - x'' + x' - x = t.$$

(1) Fundamentalsystem der homogenen DGL: Um dies zu finden, suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$P(\lambda) \; = \; \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 \; = \; (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \; = \; (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Wir erhalten somit als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t \\ \hat{x}_2(t) &= e^{\mathrm{i}t} \\ \hat{x}_3(t) &= e^{-\mathrm{i}t} \end{aligned} \Bigg\} \text{ komplex.}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} x_1 &= e^t \\ x_2(t) &= \cos(t) = \mathrm{Re}(\hat{x}_2) \\ x_3(t) &= \sin(t) = \mathrm{Im}(\hat{x}_2). \end{aligned}$$

Wir haben also als allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

(2) Spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $b(t) = t$ ist ein Polynom ersten Grades, d.h. wir machen den folgenden Ansatz

$$y_s(t) = \alpha t + \beta.$$

Damit ist $y_s' = \alpha$, $y_s'' = 0$, $y_s''' = 0$, und Einsetzen in die DGL ergibt $\alpha - \alpha t - \beta = t$, d.h

$$-\alpha = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = \beta \qquad \text{d.h.} \qquad \beta = -1$$

Somit ist die spezielle Lösung $y_s(t) = -(t+1)$, und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$x(t) = -(t+1) + c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

## II. Beispiele für die Lösung von linearen DGL $n$–ter Ordnung im $\mathbb{R}^1$ mit nichtkonstanten Koeffizienten

Im allgemeinen ist es kompliziert, Fundamentalsysteme zu finden. Fundamentalsysteme sind nicht immer durch elementare Funktionen anzugeben. Es gibt aber einige Tricks, von denen wir hier noch drei besprechen wollen.

### 1. Die Eulersche Differentialgleichung

Wir betrachten die DGL

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 t x' + a_0 x = b(t). \tag{10.52}$$

mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$ und suchen Lösungen auf $(0, \infty)$.

**Satz 10.38** *Durch die Substitution $t = e^s$ geht die Eulersche DGL (10.52) in eine DGL mit konstanten Koeffizienten*

$$\sum_{k=0}^{n} b_k z^{(k)}(s) = b(e^s) \tag{10.53}$$

*über, wobei $b_k \in \mathbb{R}$ geeignete Konstanten sind. $z(s)$ ist genau dann Lösung von (10.53), wenn $x(t) = z(\ln(t))$ Lösung von (10.52) ist.*

**Beweis**: Sei $s = \ln(t)$ und $z(s) := x(e^s)$, das heißt $x(t) = z(\ln(t))$.

(1) Behauptung: Es existieren Konstanten $c_{kj} \in \mathbb{R}$, so dass

$$t^k x^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_{kj} z^{(j)}(s), \tag{10.54}$$

wobei $c_{kk} = 1$.

Wir beweisen dies durch Induktion über $k$.
Ist $k = 1$, so gilt

$$t x'(t) = t \cdot z'(\ln t) \cdot \frac{1}{t} = z'(s).$$

Damit ist der Induktionsanfang gegeben.
$\underline{k \curvearrowright k+1}$: Gelte nun (10.54) für $k$. Differenzieren wir die Induktionsvoraussetzung, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
t^k x^{(k)}(t) &= \sum_{j=1}^{k} c_{kj} z^{(j)}(\overset{\ln t}{\underset{s}{\|}}) \qquad \text{d.h.} \\
kt^{k-1}x^{(k)}(t) + t^k x^{(k+1)}(t) &= \sum_{j=1}^{k} c_{kj} z^{(j+1)}(s) \cdot \frac{1}{t} \qquad \text{und damit} \\
t^{k+1}x^{(k+1)}(t) &= \sum_{j=2}^{k+1} c_{k,j-1} z^{(j)}(s) - kt^k x^{(k)}(t) \\
&\overset{\text{IV}}{=} \sum_{j=2}^{k} \overbrace{(c_{k,j-1} - kc_{kj})}^{=:c_{k+1,j}} z^{(j)}(s) + \overset{1}{\underset{c_{kk}}{\|}} z^{k+1}(s) - \overset{c_{k+1,1}}{\underset{c_{k1}}{\|}} z^{(1)}(s) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} c_{k+1,j} z^{(j)}(s).
\end{aligned}$$

(2) Setzen wir nun (10.54) in die DGL (10.52) ein und ordnen dann nach den Ableitungen von $z(s)$, so erhalten wir, dass $x(t)$ genau dann (10.52) löst, wenn $z(s) := x(e^s)$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
a_0 z(s) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (\sum_{j=1}^{k} c_{kj} z^{(j)}(s)) &= b(e^s) \quad \text{, löst, d.h.} \\
\sum_{j=1}^{n} \overbrace{(\sum_{k=j}^{n} a_k c_{kj})}^{=:b_j} z^{(j)}(s) + \overset{b_0}{\underset{a_0}{\|}} z(s) &= b(e^s).
\end{aligned}$$

□

**Beispiel**: Wir betrachten die DGL

$$t^2 x'' + tx' - n^2 x = 0$$

und suchen eine Lösung auf $(0, \infty)$. Es sei dazu $x(t) = z(\ln(t))$ und $s = \ln(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
x'(t) &= z'(s)\frac{1}{t}, \\
x''(t) &= z''(s)\frac{1}{t^2} - z'(s)\frac{1}{t^2}.
\end{aligned}$$

Dann ist

- die <u>transformierte DGL</u>: $z''(s) - z'(s) + z'(s) - n^2 z(s) = z'' - n^2 z = 0$, d.h.

$$z''(s) - n^2 z(s) = 0.$$

- das <u>charakteristische Polynom</u>: $P(\lambda) = \lambda^2 - n^2$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm n$. Damit haben wir ein Fundamentalsystem für die transformierte DGL

$$\begin{aligned}
z_1(s) &= e^{ns}, \\
z_2(s) &= e^{-ns}.
\end{aligned}$$

- und somit das Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z_1(\ln(t)) = e^{n\ln(t)} = t^n, \\ x_2(t) &= z_2(\ln(t)) = e^{-n\ln(t)} = t^{-n}. \end{aligned}$$

Man erhält damit als Lösung der gegebenen DGL

$$x(t) = c_1 \cdot t^n + c_2 \cdot t^{-n} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**2. Die Reduktionsmethode von D'Alambert**

Wir betrachten die homogene lineare DGL

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x = 0,$$

wobei $a_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ und $a_n(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Wenn man bereits eine Lösung von (10.4.3) kennt, so kann man das Problem auf eine DGL $(n-1)$–ter Ordnung reduzieren. Dazu folgender Satz:

**Satz 10.39 (Reduktionssatz von D'Alambert)** *Sei $x_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen DGL (10.4.3) und $x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Mit dem Produktansatz*

$$x(t) = x_1(t) \cdot y(t)$$

*geht (10.4.3) in eine DGL der Form*

$$b_n(t)y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + b_1(t)y'(t) = 0$$

*über. Substituieren wir nun $z = y'$, so erhalten wir eine DGL $(n-1)$–ter Ordnung*

$$b_n(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + b_1(t)z = 0. \tag{10.55}$$

*Ist $z_1, \ldots, z_{n-1}$ ein Fundamentalsystem der DGL (10.55), so ist*

$$x_1, \;\; x_1 \cdot \int z_1(t)\,dt, \;\; \ldots, \;\; x_1 \cdot \int z_{n-1}(t)\,dt$$

*ein Fundamentalsystem der DGL (10.4.3).*

**Beweis**: Nach der Produktregel folgt für $x = x_1 \cdot y$

$$x^{(k)} = \sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} x_1^{(k-v)} y^{(v)}.$$

Setzen wir dies in (10.4.3) ein, so erfüllt $x(t)$ genau dann (10.4.3), wenn $y(t)$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \cdot \Big(\sum_{v=0}^{k} \binom{k}{v} x_1^{(k-v)} y^{(v)}\Big) \\ &= \sum_{v=0}^{n} \Bigg( \underbrace{\sum_{k=v}^{n} a_k(t) \binom{k}{v} x_1^{(k-v)}}_{=:b_v(t)} \Bigg) y^{(v)}. \end{aligned}$$

erfüllt. Dabei gilt

$$b_0(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overset{\overset{1}{\|}}{\binom{k}{0}} a_k(t)x_1^{(k)} \;=\; 0,$$

da $x_1$ Lösung von (10.4.3) ist. Sei nun $z := y'$. Dann löst $z(t)$ genau dann $\sum_{v=0}^{n-1} b_{v+1}(t)z^{(v)} = 0$, wenn

$$x(t) = x_1(t) \cdot \int z(t)\,dt$$

Lösung von (10.4.3) ist.
Es ist noch zu zeigen, dass, wenn $z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)$ linear unabhängige Funktionen sind, auch

$$x_1(t), \quad x_1(t) \cdot \int z_1(t)\,dt, \; \ldots, \quad x_1(t) \cdot \int z_{n-1}(t)\,dt$$

linear unabhängige Funktionen sind. Seien dazu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_1 \cdot \int z_j(t)\,dt = 0 \quad \forall t \in I.$$

Teilen wir diese Gleichung durch $x_1(t)$ ($x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ nach Voraussetzung) und differenzieren wir dann nach $t$, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j z_j(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

und folglich $\lambda_j = 0$, $\forall j \in \{1, \ldots, n-1\}$. □

**Beispiel 1**: Wir betrachten die DGL

$$(1 - t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0 \tag{10.56}$$

und suchen eine Lösung auf $I \subset \mathbb{R}$ mit $\pm 1, 0 \notin I$. Dabei gehen wir folgendermaßen vor.

1. Wir erraten die Lösung: $x_1(t) = t$

2. Dann machen wir den Produktansatz $x(t) = t \cdot y(t)$ und leiten ab

$$\begin{aligned} x' &= y + ty', \\ x'' &= 2y' + ty''. \end{aligned}$$

   Für die transformierte DGL ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - t^2)(2y' + ty'') + 2t(y + ty') - 2ty \text{ , d.h.} \\ 0 &= (1 - t^2)ty'' + 2y'. \end{aligned}$$

   Mit $z = y'$ ist nun

$$(1 - t^2)tz' + 2z = 0 \tag{10.57}$$

   zu lösen.

3. Wir lösen (10.57) mit Trennung der Variablen. Es gilt

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{2}{t(1-t^2)} z, \quad \text{also} \\ z(t) &= c \cdot e^{-2 \int \frac{1}{t(1-t^2)}\, dt}. \end{aligned}$$

Durch Partialbruchzerlegung können wir das Integral lösen und erhalten

$$\int \frac{-2}{t(1-t^2)}\, dt = \int \left( \frac{-2}{t} - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right).$$

Damit folgt, dass (10.57) von $z_1(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$ gelöst wird, und wir erhalten ein Fundamentalsystem von (10.56)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t \\ x_2(t) = t \int (1 - \frac{1}{t^2})\, dt &= t^2 + 1. \end{aligned}$$

Folglich ist die allgemeine Lösung von (10.56)

$$x(t) = c_1 t + c_2(t^2 + 1)$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**Beispiel 2**: Wir betrachten die Hillsche DGL, eine vereinfachte Sturm–Liouville–DGL,

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0,$$

wobei $a : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sei.

**Satz 10.40** *Ist $\varphi(t)$ eine Lösung der Hillschen DGL und $\varphi(t) \neq 0$ auf $I$, so hat die allgemeine Lösung die Form*

$$x(t) = \varphi(t) \left( c_1 + c_2 \int \frac{1}{\varphi^2(t)}\, dt \right) \quad \textit{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Beweis**: Wir gehen mit dem Produktansatz $x = \varphi \cdot y$ vor und leiten ab

$$\begin{aligned} x' &= \varphi' y + \varphi y' \\ x'' &= \varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y''. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y'' + a(t)\varphi y = 0.$$

Da $\varphi$ Lösung der Hillschen DGL ist, folgt

$$\varphi y'' + 2\varphi' y' = 0, \quad \text{also } y'' = -\frac{2\varphi'}{\varphi} y'.$$

Mit der Substitution $z = y'$ ist $z' = -2(\ln \varphi)' z$ zu lösen. Es folgt mittels Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-2 \int (\ln \varphi)'\, dt} = e^{-2 \ln \varphi(t)} \\ &= \frac{1}{\varphi(t)^2}. \end{aligned}$$

Damit ist
$$\varphi, \quad \varphi \cdot \int \frac{1}{\varphi(t)^2}\, dt$$
ein Fundamentalsystem der Hillschen DGL. $\square$

**Beispiel 3**: Wir wollen die Besselsche DGL
$$t^2x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$
auf $(0, \infty)$ lösen. Die Lösungen sind die Besselschen Funktionen.

**Definition 10.18** *Die Funktion*
$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - t\sin\varphi)\, d\varphi$$
*heißt Besselsche Funktion 1. Art.*

Für die Besselsche Funktion erster Art gelten die folgenden Eigenschaften:

1. $J_n(t)$ ist keine elementare Funktion.
2. $J_n(t)$ ist eine Lösung der Besselschen DGL.
3. Durch die Reduktionsmethode erhält man eine weitere linear unabhängige Lösung durch
$$Y_n(t) = J_n(t) \cdot \int \frac{1}{t \cdot J_n(t)^2}\, dt.$$
$Y_n(t)$ heißt Besselsche Funktion 2. Art.

Zum Beweis dieser Eigenschaften, zeigt man zunächst, dass
$$\begin{aligned} J_{2n}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cdot \sin\varphi) \cdot \cos(2n\varphi)\, d\varphi \\ J_{2n+1}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t \cdot \sin\varphi) \cdot \sin((2n+1)\varphi)\, d\varphi. \end{aligned}$$
Damit beweist man dann die folgenden Rekursionsformeln
$$\begin{aligned} 2J_n'(t) &= J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \\ 2J_n(t) &= t \cdot J_{n+1}(t) + t \cdot J_n(t) \quad \text{für } t > 0, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
Aus diesen Rekursionsformeln folgt dann, dass $J_n$ die Besselsche DGL löst.

### 3. Der Potenzreihenansatz

Wir betrachten die lineare DGL
$$x^{(n)} +_{n-1} (t)x^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)x = b(t), \tag{10.58}$$
wobei $a_j, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $I = (t_0 - r, t_0 + r)$ in Potenzreihen um $t_0$ zu entwickeln seien:
$$\begin{aligned} a_j(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}(t - t_0)^k \quad \forall j = 0, \ldots, n-1 \\ b(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t - t_0)^k. \end{aligned}$$

**Satz 10.41** *Die Lösung $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems zur DGL (10.58) mit den Anfangsbedingungen*

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

*ist eine auf $I$ konvergente Potenzreihe*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k.$$

*Die Koeffizienten $p_k$ können durch Einsetzen in (10.58) und Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Sind keine Anfangsbedingungen gegeben, so bleiben bei diesem Verfahren die $p_0, \ldots, p_{n-1}$ beliebig, und die $p_k$ für $k \geq n$ werden daraus bestimmt.*

**Beweis**: Wir setzen $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k$ in (10.58) ein und bestimmen $p_k$. Dann zeigt man, dass mit den so gefundenen $p_k$ die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k$ auf $I$ konvergiert [zu finden u.a. in Luhl/Wiesner III]. $\square$

**Beispiel**: Wir betrachten die Hermitesche DGL

$$x'' - 2tx' + \lambda x = 0,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest sei. Dann sind $a_1(t) = -2t$ und $a_0(t) = \lambda$ spezielle Potenzreihen um 0 auf $\mathbb{R}$.
Wir machen den Lösungsansatz

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

mit $t \in \mathbb{R}$. Differenzieren wir diese Gleichung und setzen sie dann in die Hermitesche DGL ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k t^{k-2} - 2t \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = 0 \quad \forall t \in I \\ \text{und somit} \qquad 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1) p_{k+2} - 2k p_k + \lambda p_k) t^k \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt dann

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1) p_{k+2} &= (2k - \lambda) p_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{, d.h.} \\ p_{k+2} &= \frac{2k - \lambda}{(k+2)(k+1)} p_k. \end{aligned}$$

Wir haben also eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $p_k$. Es ist dann

$$\begin{aligned} x(t) &= p_0 \Big( \overbrace{1 + \sum_{k=1}^{\infty} - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda) \cdot \ldots \cdot (4(k-1) - \lambda)}{(2k)!} \cdot t^{2k}}^{=: x_1[\lambda](t)} \Big) + \\ &\quad + p_1 \Big( \underbrace{t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)(6-\lambda) \cdot \ldots \cdot (4k - 2 - \lambda)}{(2k+1)!} \cdot t^{2k+1}}_{=: x_2[\lambda](t)} \Big) \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der Hermiteschen DGL, wobei $p_0, p_1 \in \mathbb{R}$.

**Bemerkung**:

- Ist $\lambda = 4n$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_1[\lambda](t)$ ein Polynom vom Grad $2n$

$$x_1[\lambda](t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 4^k \cdot \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{(2k)!} \cdot t^{2k}.$$

- Ist $\lambda = 4n+2$ für $n \in \mathbb{N}$, so ist $x_2[\lambda](t)$ ein Polynom vom Grad $2n+1$

$$x_2[\lambda](t) = t + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 4^k \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$

Die normierten Polynome

$$H_n(t) := \begin{cases} (-1)^m \ \frac{n!}{m!}\ x_1[n](t) & : \ n = 2m \\ \\ (-1)^m \ \frac{n!}{m!}\ 2x_2[n](t) & : \ n = 2m+1 \end{cases}$$

heißen Hermitesche Polynome. Es gilt

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} (e^{-t^2}).$$

Weitere Beispiele findet man im Buch von H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen:

- Airysche DGL: $x'' - tx = 0$ (Heuser, S. 261)
- Tschebyscheffsche DGL: $(1-t^2)x'' - tx + \lambda^2 x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (Heuser, S. 266)
- Legendresche DGL: $(1-t^2)x'' - 2tx + \lambda(\lambda+1)x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (Heuser, S. 266)

## 10.5 Anwendung: Kurventheorie im $\mathbb{R}^n$

[Literatur: W. Kühnel, Differentialgeometrie, Vieweg, 1999]

### 10.5.1 Einleitung

Wir betrachten $C^\infty$-Kurven $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die regulär sein sollen, d.h. $\gamma'(t) \neq 0 \; \forall t$. Wie kann man solche Kurven unterscheiden? Dazu benutzt man zwei Größen.

- $\rightsquigarrow$ Länge: $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$.
- $\rightsquigarrow$ Krümmungen: Dieser Begriff ist wesentlich für die Beschreibung von Kurven und wird noch zu definieren sein. Er beschreibt die Abweichung einer Kurve von einer Gerade, einer Ebene usw.

Wann möchte man Kurven $\gamma$, $\tilde{\gamma}$ als dieselben ansehen?

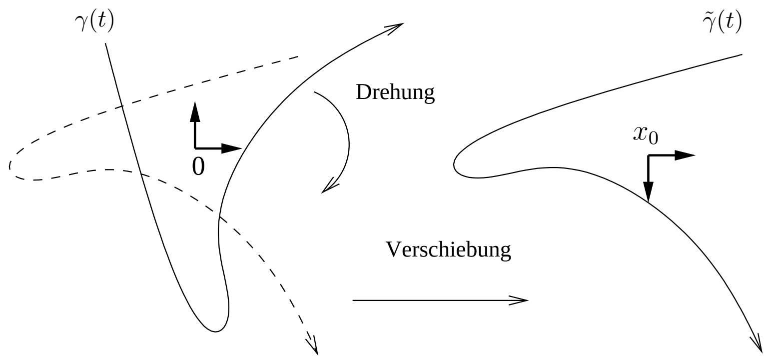
a) $\tilde{\gamma}$ entsteht aus $\gamma$ durch orientierungserhaltende Umparametrisierung

$$\begin{aligned} \tau &: \tilde{I} \longrightarrow I \quad \text{ein Diffeomorphismus mit} \quad \tau' > 0 \\ \tilde{\gamma} &= \gamma \circ \tau. \end{aligned}$$

b) $\tilde{\gamma}$ entsteht aus $\gamma$ durch eine eigentliche Euklidische Bewegung im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto x_0 + Ax \quad \text{, mit } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ fixiert (Verschiebung um } x_0\text{) und} \\ & \qquad A \in SO(n) \text{ (Drehung).} \end{aligned}$$

Eine solche Euklidische Bewegung entspricht der Einführung eines neuen Koordinatensystems, in dem die gleiche Kurve beschrieben werden kann. Man sagt $\gamma$ ist kongruent zu $\tilde{\gamma}$ ($\gamma \approx \tilde{\gamma}$) genau dann, wenn $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ mit einer euklidischen Bewegung $F$.




Aus Analysis II kennen wir bereit die folgenden Eigenschaften der Bogenlänge:

1. Für eine umparametrisierte Kurve $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ gilt $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$.
2. Für ein euklidisch bewegte Kurve $\tilde{\gamma} = x_0 + A\gamma$ gilt ebenfalls $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$.
3. Eine Kurve heißt nach ihrer Bogenlänge parametrisiert, falls

$$l\left(\gamma_{|[s,t]}\right) = t - s = \text{Länge des durchlaufenen Parameterbereiches.}$$

Dann gilt

- $\gamma$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$.
- Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regulär. Dann existiert eine orientierungserhaltende Umparametrisierung $\tau : \tilde{I} \longrightarrow I$, so daß $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau$ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

**Ziel:** Wir suchen ein vollständiges Invariantensystem für (auf Bogenlänge parametrisierte) Kurven, d.h. wir suchen Größen, die entscheiden, ob $\gamma = \delta$. Bei diesen Größen wird es sich um $(n-1)$ Funktionen handeln (sogenannte Krümmungen), die man $\gamma$ zuordnet: $k_1^\gamma, \ldots, k_{n-1}^\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\gamma = \delta \iff k_j^\gamma = k_j^\delta \text{ für } j = 1, \ldots, n-1.$$

Diese wurden von *Frenet* (1847) und *Serret* (1851) definiert und studiert. Man schränkt sich dabei auf Kurven „in allgemeiner Lage“ein.

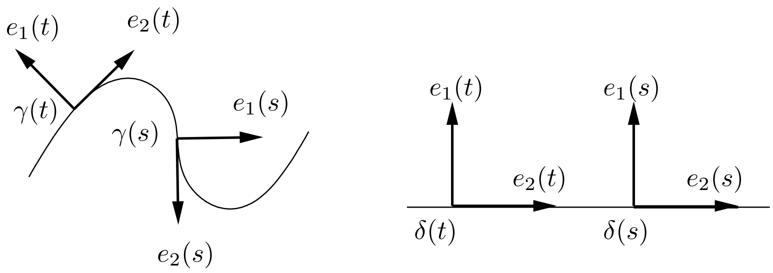
### 10.5.2 Frenet-Kurven und deren Krümmungen

**Definition 10.19** *Eine $C^\infty$-Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Frenet-Kurve (allgemein gekrümmt), falls die Vektoren*

$$\gamma'(t)\ ,\ \gamma''(t)\ ,\ \ldots\ ,\ \gamma^{n-1}(t)$$

*linear unbahängig sind für alle $t \in I$.*

Insbesondere ist eine Frenet-Kurve regulär und liegt nicht in einer $(n-2)$- dimensionalen Ebene des $\mathbb{R}^n$. Die **Idee** besteht nun in folgendem: Die Krümmungen von $\gamma$ beschreibt man durch die Änderung eines begleitenden Euklidischen Koordinatensystems.




Wir ordnen jedem Kurvenpunkt $\gamma(t)$ ein Euklidisches Koordinatensystem $(\gamma(t); e_1(t), \ldots e_n(t))$ zu, so daß:

- die Abbildungen $e_i : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sind $C^\infty$,
- $(e_1(t), \ldots e_n(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis, d.h.

$$\begin{aligned} \langle e_i(t), e_j(t)\rangle &= \delta_{ij} \quad \text{und} \\ \det(\underbrace{e_1(t)}, \ldots, \underbrace{e_n(t)}_{\text{als Spaltenvektoren}}) &= 1. \end{aligned}$$

Dazu orthonormieren wir die linear unabhängigen Vektoren $\gamma'(t), \ldots, \gamma^{n-1}(t)$ nach dem Erhard-Schmittschen Orthonormalisierungsverfahren:

$$\begin{aligned} e_1(t) &:= \tfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \\ e_j(t) &:= \gamma^{(j)}(t) - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(t), e_k(t)\rangle\, e_k(t) \qquad \text{für } j = 2, \ldots, n-1 \\ e_n(t) &:= e_1(t) \times \ldots \times e_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Dabei ist $\times$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^n$, welches wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n-1 \text{ mal}} &\xrightarrow{\times} \mathbb{R}^n \\
(a_1, \ldots, a_{n-1}) &\longmapsto a_1 \times \ldots \times a_{n-1} := \text{ der eindeutig definierte Vektor mit} \\
&\qquad \det(a_1, \ldots, a_{n-1}, y) = \langle a_1 \times \ldots \times a_{n-1}, y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Für das Vektorprodukt gelten dann die folgenden Eigenschaften:

- $a_1 \times \ldots \times a_{n-1} = 0$ genau dann, wenn $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ linear abhängig,
- $a_1 \times \ldots \times a_{n-1} \perp \operatorname{span}(a_1, \ldots, a_n)$,
- $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_1 \times \ldots \times a_{n-1})$ ist positiv orientiert,
- Die Länge $\|a_1 \times \ldots \times a_{n-1}\|$ ist gleich dem Volumen des durch $a_1, \ldots, a_{n-1}$ erzeugten Parallelepipeds.

Sind also $a_1, \ldots, a_{n-1}$ orthonormale Vektoren, so ist $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_1 \times \ldots \times a_{n-1})$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^n$.

Seien nun $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ die oben definierten orthonormalen Vektoren entlang einer Kurve $\gamma(t)$. Dann gilt:

1. $\operatorname{span}(\gamma'(t), \ldots, \gamma^{(j)}(t)) = \operatorname{span}(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ für alle $t \in I$.
2. Die Vektoren $(\gamma'(t), \ldots, \gamma^{(j)}(t))$ und $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ sind gleichorientiert für alle $t$, d.h. die Übergangsmatrix hat eine positive Determinante.
3. $e_j : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist $C^\infty$.
4. $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis für alle $t \in I$.

$(e_1, \ldots, e_n)$ mit diesen Eigenschaften ist eindeutig bestimmt.

**Definition 10.20** $(\gamma(t); e_1(t), \ldots, e_n(t))$ *heißt begleitendes Frenetsches Koordinatensystem von $\gamma$.*

Wie ändert sich nun ein Frenetsches Koordinatensystem mit der Zeit $t$?
Sei dazu $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Frenetsche Kurve und $(\gamma(t); e_1(t), \ldots, e_n(t))$ das Frenetsche Koordinatensystem zu $\gamma$. Wir betrachten dann die Funktionen

$$e_j'(t) \;:\; I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{zeitliche Änderung von } e_j.$$

Wir stellen nun den Vektor $e_j'(t)$ in der Basis $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ dar:

$$\begin{aligned}
e_j'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \omega_{jk}(t) e_k(t), \\
\text{d.h.} \qquad \omega_{jk} &= \langle e_j'(t), e_k(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned}$$

Es gilt der

**Satz 10.42** *Sei $(\gamma(t); e_1(t), \ldots, e_n(t))$ das begleitende Frenetsche Koordinatensystem einer Frenet-Kurve $\gamma$. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -\omega_{12}(t) & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \omega_{n-1n}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -\omega_{n-1n}(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{pmatrix},$$

*d.h. die $\omega_{ij}$ erfüllen für jedes $t \in I$*

$$\begin{aligned} \omega_{kj}(t) &= -\omega_{jk}(t), \\ \omega_{jk} &= 0 \text{ für } k > j+1. \end{aligned}$$

**Beweis:** Da $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ eine Orthonormalbasis ist, gilt $\langle e_j(t), e_k(t) \rangle = \delta_{jk}$. Differenziert man diese Beziehung nach $t$, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_j'(t), e_k(t) \rangle + \langle e_j(t), e_k'(t) \rangle \\ &= \omega_{jk}(t) + \omega_{kj}(t). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt, daß $e_j(t) \in \operatorname{span}(\gamma'(t), \ldots, \gamma^{(j)})$ und damit

$$e_j'(t) \in \operatorname{span}(\gamma''(t), \ldots, \gamma^{(j+1)}) \subset \operatorname{span}(e_1(t), \ldots, e_{j+1}(t)).$$

Somit ist aber $\langle e_j'(t), e_k(t) \rangle = 0$ für $k > j+1$. □

**Definition 10.21** *Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve. Die $C^\infty$-Funktionen $k_j : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch*

$$k_j(t) := \frac{\omega_{jj+1}(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad \text{für } j = 1, \ldots, n-1$$

*heißen Krümmungen der Frenet-Kurve $\gamma$.*

Für ein Frenetsches Koordinatensystem $(\gamma(t); e_1(t), \ldots, e_n(t))$ einer Frenet-Kurve $\gamma$ gilt dann

$$\boxed{\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1(t) & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & k_{n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{pmatrix}.}$$

Dies sind die Frenetschen Formeln für $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Es gilt

**Satz 10.43** *Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Frenet-Kurve. Die Krümmungen $k_j : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ erfüllen dann:*

1. *$k_j(t) > 0$ für alle $t \in I$ und für $j = 1, \ldots, n-2$.*

2. *Ist $\tau : \tilde{I} \longrightarrow I$ eine orientierungserhaltende Parametertransformation ($\tau' > 0$) und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ die Umparametrisierung von $\gamma$, so ist $\tilde{\gamma}$ eine Frenet-Kurve und es gilt für die Krümmung von $\tilde{\gamma}$*

$$\tilde{k}_j(t) = k_j(\tau(t)) \quad \text{für } j = 1, \ldots, n-1.$$

3. *Ist $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine eigentliche Euklidische Bewegung, d.h. $F(x) = x_0 + Ax$ mit $x_0$ fixiert in $\mathbb{R}^n$ und $A \in SO(n)$, und sei $\hat{\gamma} = F \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist $\hat{\gamma}$ eine Frenet-Kurve, für deren Krümmungen gilt, daß*

$$\hat{k}_j(t) \;=\; k_j(t) \;\; \text{für } j = 1, \ldots, \mathbb{R}^n.$$

**Beweis:** Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Wir beweisen nun den

**Satz 10.44 (Hauptsatz der Kurventheorie)** *Seien $k_1, \ldots, k_{n-1} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ glatte Funktionen mit $k_1, \ldots, k_{n-2} > 0$. Dann existiert eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Krümmungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$.*
*Ist $\tilde{\gamma}$ eine weitere auf Bogenlänge parametrisierte Kurve mit den Krümmungen $k_1, \ldots, k_{n-1}$, so existiert eine eigentliche Euklidische Bewegung $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$.*
*(D.h. die Krümmungen sind ein vollständiges Invariantensystem für die Kongruenzklassen von Frenet-Kurven.)*

**Beweis:** Seien $k_1, \ldots, k_{n-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem im $\mathbb{R}^{n^2}$ für die Funktionen $e_1, \ldots, e_n : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} e_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1(t) & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & k_{n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{pmatrix} \\ \text{mit den Anfangsbedingungen } e_j(t_0) = a_j \in \mathbb{R}^n, \text{ wobei} \\ (a_1, \ldots, a_n) \text{ eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist.} \end{array}\right\} \quad (10.59)$$

Aus dem Abschnitt 8.3. wissen wir:

> Es existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (10.59) auf dem gesamten Intervall $I$. Die Lösung
>
> $$(e_1, \ldots, e_n) : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$$
>
> ist $C^\infty$, da die Koeffizientenmatrix $C^\infty$ ist.

Weiterhin gelten die folgenden Behauptungen:

1. $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.
2. Diese bestimmt eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma$ mit dem Frenetschen Koordinatensystem $(\gamma(t); e_1(t), \ldots, e_n(t))$.
3. Diese Kurve $\gamma$ ist eindeutig modulo eigentlicher Euklidischer Bewegungen.

Wir zeigen
1.) Dazu betrachten wir die Funktionen $f_{ij}(t) := \langle e_i(t), e_j(t) \rangle$. Diese erfüllen die DGL'en

$$\begin{aligned} f_{ij}'(t) &= \langle e_i(t)', e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), e_j'(t) \rangle \\ &= -k_{i-1}\langle e_{i-1}(t), e_j(t) \rangle + k_i \langle e_{i+1}(t), e_j(t) \rangle - k_{j-1}\langle e_i(t), e_{j-1}(t) \rangle + k_j \langle e_i(t), e_{j+1}(t) \rangle \\ &= -k_{i-1} f_{i-1j}(t) + k_i f_{i+1j}(t) - k_{j-1} f_{ij-1}(t) + k_j f_{ij+1}(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $f_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$.
Dies ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen. Es existiert also genau eine Lösung, und zwar

$$f_{ij} \; = \; \delta_{ij}. \qquad\qquad \text{(Einsetzen!)}$$

Das heißt aber, daß $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ eine Orthonormalbasis für jedes $t \in I$ ist.
Es ist nach Wahl der Anfangsbedingung $\det(e_1(t_0), \ldots, e_n(t_0)) > 0$. Nun ist $\det(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ stetig in $t$ und $I$ zusammenhängend. Daher ist $\det(e_1(t), \ldots, e_n(t)) > 0$ für alle $t \in I$, d.h. $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

2.) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixiert. Wir betrachten die $C^\infty$-Kurve

$$\gamma(t) \; = \; x_0 + \int_{t_0}^{t} e_1(s) \; ds \quad \forall t \in I.$$

Dann ist

- $\gamma(t_0) = x_0$,
- $\gamma'(t) = e_1(t)$, d.h. $\gamma$ ist auf Bogenlänge parametrisiert,
- $\gamma$ ist $C^\infty$ auf $I$.

Die Behauptung lautet nun

$(\gamma(t); e_1(t), \ldots, e_n(t))$ ist ein Frenetsches Koordinatensystem von $\gamma$.

Wir beweisen zunächst die folgende Formel

$$\gamma^{(j)}(t) = e_j(t) \cdot \left( \prod_{r=1}^{j-1} k_r(t) \right) \bmod \operatorname{span}(e_1(t), \ldots, e_{j-1}(t)) \tag{10.60}$$

für $j = 2, \ldots, n-1$. Dazu führen wir eine Induktion über $j$ durch.

- Induktionsanfang: Es ist $\gamma' = e_1$ und damit $\gamma'' = e_1' = k_1 e_2$.
- $j \curvearrowright j+1$: Es ist

$$\begin{aligned}
\gamma^{(j+1)} \quad &= \quad \left(\gamma^{(j)}\right)' \\
&= \quad \left( e_j \cdot \prod_{r=1}^{j-1} k_r + \sum_{l=1}^{j-1} a_l e_l \right)' \\
&= \quad e_j' \cdot \prod_{r=1}^{j-1} k_r \bmod \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j) \\
&\overset{\text{DGL}}{=} \quad e_{j+1}(t) \cdot \prod_{r=1}^{j} k_r \bmod \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j)
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen.
Wir haben also

a) $\operatorname{span}(\gamma', \ldots, \gamma^{(j)}) = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_j)$,

b) $(\gamma', \dots, \gamma^{(j)}) \sim (e_1, \dots, e_j)$ mit der Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & k_1 & & & \\ & & k_1 k_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \prod_{r=1}^{j-1} k_r \end{pmatrix}.$$

Da nun $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$ ist $\det M > 0$

c) $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Da nun das Frenetsche Koordinatensystem durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, haben wir 2. bewiesen.

3.) Sei $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine weitere auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit den Krümmungen $k_1, \dots, k_{n-1}$. Sei weiterhin $(\tilde{\gamma}(t); \tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t))$ das Frenetsche Koordinatensystem zu $\tilde{\gamma}$.
Nun ist $(\tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t))$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis, d.h. es existiert ein $A \in SO(n)$ mit

$$A\, e_j(t_0) \;=\; \tilde{e}_j(t_0) \quad j = 1, \dots, n.$$

Dann erfüllen $\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} Ae_1 \\ \vdots \\ Ae_n \end{pmatrix}$ das DGL-System (10.59) mit der gleichen Anfangsbedingung in $t_0$. Dies ist klar, denn es ist

$$\begin{aligned} (Ae_j)' &= Ae_j' \\ &= A\left(-k_{j-1} e_{j-1} + k_j e_{j+1}\right) \\ &= -k_{j-1} A e_{j-1} + k_j A e_{j+1}. \end{aligned}$$

Damit ist aber wegen der Eindeutigkeit der Lösung $\tilde{e}_j = Ae_j$ auf $I$.
Insbesondere gilt

$$\tilde{\gamma}'(t) = A\gamma'(t) = (A\gamma)'(t) \qquad \text{d.h.} \qquad (\tilde{\gamma} - Ag)' \equiv 0.$$

Das heißt aber $\tilde{\gamma}(t) = A\gamma(t) + a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{R}^n$ konstant. □

### 10.5.3 Berechnung und geometrische Deutung der Krümmung in Spezialfällen

#### 10.5.3.1 Kurven im $\mathbb{R}^2$

Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve im $\mathbb{R}^2$. Das Frenetsche Koordinatensystem ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} && \underline{\text{Tangentenvektor}}, \\ e_2(t) &= D_{\frac{\pi}{2}}(e_1(t)) && \underline{\text{Normalenvektor}}. \end{aligned}$$

Dabei ist $D_{\frac{\pi}{2}}$ die Drehung um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn, d.h.

$$D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } D_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Frenetsche Formel:

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) \\ -k(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei heißt $k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ Krümmung von $\gamma$.
Es gilt der

**Satz 10.45** *Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

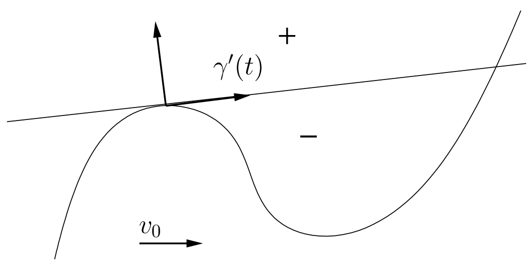
1. *Sei $v_0 \in \mathbb{R}^2$ fixiert, $v_0 \neq 0$. $\omega(t) := \sphericalangle(v_0, \gamma'(t))$ sei der positiv orientierte Drehwinkel. Dann gilt*

$$\boxed{k(t) = \tfrac{\omega'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.}$$

   *D.h. die Krümmung einer auf Bogenlänge parametrisierten Kurve ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Tangente der Kurve dreht.*

2. *Sei $Tan_{t_0}\gamma := \gamma(t_0) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(t_0)$ die Tangente im Parameter $t_0$. Dann gilt in den beiden Fällen*

   - $k(t_0) > 0$*: $\gamma$ liegt nahe $t_0$ auf der positiven Seite der Tangente.*
   - $k(t_0) < 0$*: $\gamma$ liegt nahe $t_0$ auf der negativen Seite der Tangente.*




3. *Die Krümmung berechnet sich wie folgt:*

$$\boxed{k(t) = \tfrac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.}$$

**Beweis:** Der Beweis erfolgt analog wie die folgenden für Aussagen im $\mathbb{R}^3$. □

Als eine Folgerung aus dem S atz erhält man die folgenden beiden Aussagen.

1. Ist $k(t) \equiv 0$ so liegt das Bild von $\gamma$ auf einer Geraden.

2. Ist $k(t) \equiv r \neq 0$ so liegt das Bild von $\gamma$ auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{|r|}$.

#### 10.5.3.2 Kurven im $\mathbb{R}^3$

Sei $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve im $\mathbb{R}^3$. Das Frenetsche Koordinatensystem ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \tfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} && \underline{\text{Tangentenvektor}}, \\ e_2(t) &= \tfrac{\gamma''(t)-\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\langle\gamma''(t),\gamma'(t)\rangle}{\|\gamma''(t)-\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\langle\gamma''(t),\gamma'(t)\rangle\|} && \underline{\text{Hauptnormalenvektor}}, \\ e_3(t) &= e_1(t) \times e_2(t) \\ &= \tfrac{\gamma''(t)\times\gamma'(t)}{\|\gamma''(t)\times\gamma'(t)\|} && \underline{\text{Binormalenvektor}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten als <u>Frenetsche Formeln</u>:

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei heißt $k$ <u>Krümmung</u> und $\tau$ <u>Windung</u> oder <u>Torsion</u> von $\gamma$.

**Formeln zur Berechnung von Krümmung und Windung:** Sei zunächst $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ <u>auf Bogenlänge parametrisiert</u>. Dann ist $e_1(t) = \gamma'(t)$, was $\gamma' \perp \gamma''$ zur Folge hat. Damit vereinfacht sich der Rest des Frenetschen Koordinatensystems und man erhält:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \gamma'(t) \\ e_2(t) &= \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|} \\ e_3(t) &= \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}. \end{aligned}$$

Für die Frenetschen Formeln ergibt dies

$$e_1'(t) \;=\; \gamma''(t) \;=\; k(t)\; e_2(t) \quad \text{mit } k(t) > 0.$$

Daraus erhält man die folgende Beziehung, wegen der man $\gamma''$ auch <u>Krümmungsvektor</u> nennt:

$$\boxed{k(t) \;=\; \|\gamma''(t)\|.} \tag{10.61}$$

Weiter hat man

$$e_2'(t) = -ke_1 + \tau e_3.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \langle e_2'(t), e_3(t)\rangle \\ &= \langle \frac{\gamma'''(t)}{k(t)} + \gamma''(t)\left(\frac{1}{k(t)}\right)', \frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{k(t)}\rangle \\ &= \frac{1}{k^2(t)}\langle\gamma'''(t), \gamma'(t)\times\gamma''(t)\rangle \end{aligned}$$

und damit als Formel für die Windung

$$\boxed{\tau(t) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)).} \tag{10.62}$$

Daraus erhält man die Formeln für eine beliebige Frenet-Kurve.

**Satz 10.46** *Für die Krümmung und Windung einer Frenet-Kurve* $\gamma : I \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *gilt*

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{10.63}$$

$$\tau(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)}{k^2(t) \cdot \|\gamma'(t)\|^6}. \tag{10.64}$$

**Beweis:** Wir parametrisieren $\gamma$ auf Bogenlänge um. Sei $a \in I$ fixiert und

$$l(t) := \int_a^t \|\gamma'(s)\| \, ds.$$

Dann ist $l : I \longrightarrow \tilde{I} := l(I)$ und monoton wachsend, da $l'(t) = \|\gamma'(t)\|$ . Nun betrachten wir die Kurve

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} \ : \ \tilde{I} \ &\longrightarrow \ \mathbb{R}^3 \ \text{ definiert durch:} \\ \tilde{\gamma}(l(t)) \ &= \ \gamma(t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(l(t)) \, l'(t) &= \gamma'(t) \ \text{ und damit} \\ \|\tilde{\gamma}(l(t))\| &= \frac{\|\gamma'(t)\|}{l'(t)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

d.h. $\gamma$ ist auf Bogenlänge parametrisiert.
Dann ergibt sich aus Satz 10.43 für die Krümmung und Windung von $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \tilde{k}(l(t)) &= K(t) \\ \tilde{\tau}(t) &= \tau(t). \end{aligned}$$

Man errechnet nun

$$\begin{aligned} \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} &= \frac{1}{(l'(t))^3} \big(\tilde{\gamma}'(l(t)) \cdot l'(t)\big) \times \big(\tilde{\gamma}''(l(t)) \cdot (l'(t))^2 + \tilde{\gamma}'(l(t)) l''(t)\big) \\ &= \frac{1}{(l'(t))^3} \ \|\tilde{\gamma}'(l(t)) \times \tilde{\gamma}''(l(t))\| \ (l'(t))^3 \\ &= \|\tilde{\gamma}'(l(t)) \times \tilde{\gamma}''(l(t))\| \\ &= \|\tilde{\gamma}''(l(t))\| \\ &\overset{(10.61)}{=} \tilde{k}(l(t)) \\ &= k(t). \end{aligned}$$

Damit ist die Formel für die Krümmung bewiesen.
Für die Windung errechnet man zunächst:

$$\gamma''' = \tilde{\gamma}'''(l) \cdot (l')^3 + 3\tilde{\gamma}''(l) \cdot l' \cdot l'' + \tilde{\gamma}'(l) \cdot l'''.$$

Damit ergibt sich

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = (l')^6 \cdot \det(\tilde{\gamma}'(l), \tilde{\gamma}''(l), \tilde{\gamma}'''(l)).$$

Da $\tilde{\gamma}$ nun auf Bogenlänge parametrisiert war, ergibt sich aus (10.62)

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \|\gamma'\|^6 \cdot \tilde{\tau}(l) \cdot \tilde{k}(l)^2$$

und somit für die Windung

$$\tau(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\tilde{\tau}(l(t)) \cdot \tilde{k}(l(t))^2}.$$

□

#### 10.5.3.3 Geometrische Bedeutung von Krümmung und Windung von Raumkurven

Sei $\gamma$ eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$.

**Definition 10.22** *Sei $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ ein Frenetsches Koordinatensystem der Kurve $\gamma$. Dann nennt man*

$$Binorm_t\gamma := \gamma(t) + \mathbb{R}e_3(t)$$

*die <u>Binormale</u> und*

$$E_s^\gamma(t) := \gamma(t) + span(\gamma'(t), \gamma''(t))$$

*die <u>Schmiegebene</u> von $\gamma$ in $t$.*
*Weiterhin definiert man den <u>Drehwinkel der Binormalen</u>*

$$\nu_{t_0}(t) := \sphericalangle(e_3(t_0), e_3(t)).$$

Für die Schmiegebene gilt dann, dass

$$E_s(t_0) \;=\; \lim_{h\to 0^*}(\text{ Ebene durch } \gamma(t_0), \gamma(t_0+h), \gamma(t_0-h)\ ).$$

Damit ist der Drehwinkel der Binormalen gleich dem Drehwinkel der Schmiegebene

$$\nu_{t_0}(t) = \sphericalangle(E_s(t_0), E_s(t)).$$

Es gilt der

**Satz 10.47** *Sei $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ auf Bogenlänge parametrisiert und $t_0 \in I$ fixiert. Dann gelten die folgenden Eigenschaften*

1. *Für den nichtorientierten Winkel $\omega_{t_o}(t) := \sphericalangle(\gamma'(t_0), \gamma'(t)) \in [0, \pi]$ gilt*

$$k(t_0) \;=\; \omega'_{t_0}(t_0).$$

   *D.h. $k$ mißt die Geschwindigkeit, mit der sich die Tangente dreht.*

2. *Für den Drehwinkel des Binormalenvektors gilt*

$$|\tau(t_0)| \;=\; \nu'_{t_0}(t_0).$$

   *D.h der Betrag der Windung beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Binormale (bzw. die Schmiegebene) dreht.*

**Beweis:** Da $\|\gamma'(t)\| = 1$ gilt

$$\sin\left(\frac{\omega_{t_0}(t)}{2}\right) = \frac{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\|}{2}. \tag{10.65}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\omega'_{t_0}(t_0) \quad &= \quad \lim_{h\to 0}\frac{\omega_{t_0}(t_0+h) - \overbrace{\omega_{t_0}(t_0)}^{=0}}{h} \\
&= \quad \lim_{h\to 0}\frac{\omega_{t_0}(t_0+h)}{h} \\
&\overset{(10.65)}{=} \quad \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{\gamma'(t_0+h) - \gamma'(t_0)}{h}}_{\to_{h\to 0}\|\gamma''(t)\|} \cdot \underbrace{\frac{\omega_{t_0}(t_0+h)}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega_{t_0}(t_0+h)}{2}\right)}}_{\to_{h\to 0}1}\right) \\
&= \quad k(t_0).
\end{aligned}$$

Für die zweite Aussage benutzt man die Beziehung

$$\sin\left(\frac{\nu_{t_0}(t)}{2}\right) = \frac{\|e_3(t) - e_3(t_0)\|}{2}$$

und rechnet dann analog

$$\begin{aligned}\nu'_{t_0}(t_0) &= \|e'_3(t_0)\| \\ &= \| - \tau(t_0)\ e_2(t_0)\| \\ &= |\tau(t_0)|.\end{aligned}$$

□

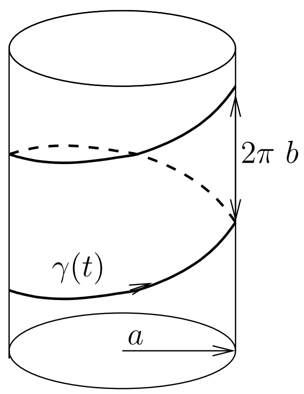
Als **Folgerung** aus diesem Satz ergibt sich:

> $\tau \equiv 0$ genau dann, wenn das Bild von $\gamma$ in einer Ebene liegt( d.h. $E_s^\gamma(t_0)$ dreht sich nicht).

Das ist klar, denn man hat

$$\begin{aligned}\tau \equiv 0 &\iff e_3(t) = const = v_0 \\ &\iff \langle \gamma'(t), e_3(t)\rangle = 0 = \langle \gamma(t), v_0\rangle' \\ &\iff \underbrace{\langle \gamma(t), v_0\rangle = const.}_{=\text{ Ebenengleichung}}\end{aligned}$$

**Beispiel:** Die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung und Windung sind Stücke von Geraden, Kreisen und Schraubenlinien.




Schraubenlinien sind definiert durch

$\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

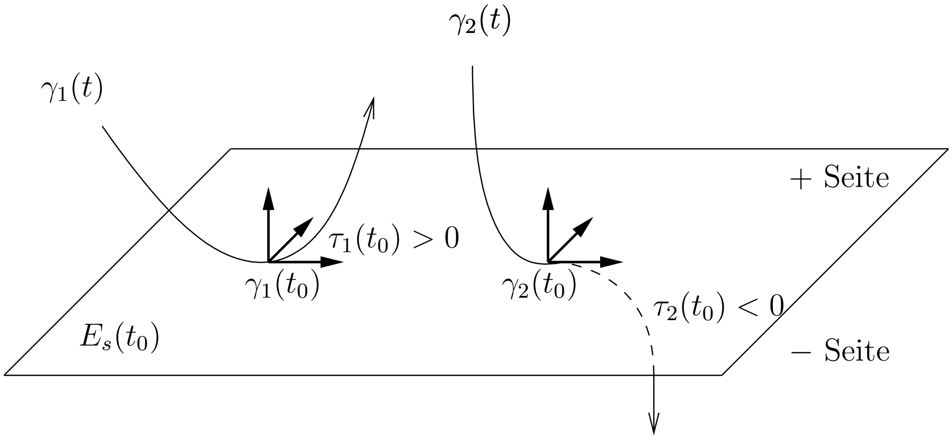
$$k(t) = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{und} \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Welche Interpretation hat das Vorzeichen der Krümmung?
Wir betrachten die Schmiegebene in $t$

$$\begin{aligned}E_s(t) &= \gamma(t) + \operatorname{span}(e_1(t), e_2(t)) \\ &= \lim_{h\to 0^*}(\text{ Ebene durch } \gamma(t), \gamma(t+h), \gamma(t-h))\end{aligned}$$

Es gilt:

- Ist $\tau(t_0) > 0$, so durchstößt die Kurve $\gamma$ in $t = t_0$ die Schmiegebene $E_s(t_0)$ von der negativen zur positiven Seite.
- Ist $\tau(t_0) < 0$, so durchstößt die Kurve $\gamma$ in $t = t_0$ die Schmiegebene $E_s(t_0)$ von der positiven zur negativen Seite.




Dazu betrachten wir die Kurve $\gamma(t)$ in einem fixierten Koordinatensystem $(\gamma(t_0); e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0))$ und die Taylorentwicklung von $\gamma$ um $t_0$:

$$\begin{aligned}\gamma(t)-\gamma(t_0) &= \gamma'(t_0)(t-t_0)+\gamma''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2}+\gamma'''(t_0)\frac{(t-t_0)^3}{6}+\mathcal{O}\left((t-t_0)^3\right)\\ &= x(t)e_1(t_0)+y(t)e_2(t_0)+z(t)e_3(t_0).\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= e_1(t) \ \text{ da } \gamma \text{ auf Bogenlänge parametrisiert ist,}\\ \gamma'' &= e_1'(t)\\ &= k(t)e_2(t)\\ \gamma'''(t) &= k'(t)e_2(t)+k(t)e_2'(t)\\ &= k'(t)e_2(t)+k(t)\left(-k(t)e_1(t)+\tau(t)e_3(t)\right).\end{aligned}$$

Macht man nun einen Koeffizientenvergleich vor $e_3(t_0)$, so erhält man:

$$z(t)=\underbrace{k(t_0)}_{>0}\cdot\tau(t_0)\cdot\frac{(t-t_0)^3}{6}+\mathcal{O}\left((t-t_0)^3\right).$$

Ist nun

$$\begin{array}{rll}\tau(t_0)>0, & \text{so ist} & z(t)<0 \ \text{ falls } \ t<t_0\\ & \text{und} & z(t)<0 \ \text{ falls } \ t>t_0,\\ & \text{d.h.} & \gamma \text{ läuft von } - \text{ nach } +,\\ \tau(t_0)<0, & \text{so} & \text{läuft } \gamma \text{ von } + \text{ nach } -.\end{array}$$

□

## 10.6 Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung

Die folgenden Fragen fassen den in Kapitel 8 behandelten Stoff zusammen. Sie sollen die Vorbereitung auf die Analysisprüfung erleichtern. Bei der Beantwortung der Fragen sollten Sie folgendes beachten: Zu getroffenen Aussagen sollten Sie Beweise bzw. kurze Beweisideen kennen, mathematische Begriffe sollten Sie an Beispielen bzw. Gegenbeispielen erläutern können. Außerdem sollten Sie den Vorlesungsstoff auf die Lösung von Aufgaben anwenden können (wie in der Übung behandelt bzw. in den wöchentlichen Hausaufgaben gestellt wurden).

1. Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung? Wo treten solche Gleichungen auf (Beispiele)?

2. Erläutern Sie den Reduktionsprozess einer Differentialgleichung k. Ordnung auf eine Differentialgleichung 1.Ordnung.

3. Was versteht man unter der Integralkurve eines Vektorfeldes? Wie hängt dieser Begriff mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zusammen?

4. Erläutern Sie die elementaren Integrationsmethoden für folgende Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1.Ordnung mit einer Variablen:
   -Differentialgleichung mit getrennten Variablen
   -Euler-homogene Differentialgleichung
   -DGL $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{pt+qx+v}\right)$
   -Exakte Differentialgleichung
   -Lineare Differentialgleichung
   -Bernoullische Differentialgleichung
   -Riccatische Differentialgleichung

5. Welche Kriterien für die Kompaktheit von Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes kennen Sie. Formulieren Sie insbesondere den Satz von Arzela-Ascoli (Kompaktheitskriterium für Teilmengen des Banachraumes der stetigen Abbildungen eines kompakten metrischen Raumes in einen endlich-dimensionalen normierten Vektorraum) und erläutern Sie die Beweisidee.

6. Formulieren und beweisen Sie die Beziehung zwischen gewöhnlichen Differentialgleichungen und Integralgleichungen.

7. Erläutern Sie die Aussagen und Beweisideen der Fixpunktsätze von Banach, Brouwer und Schauder. Wo werden diese Sätze in der Theorie der Differentialgleichungen angewendet?

8. Was wissen Sie über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung (Satz von Cauchy-Peano, Satz von Picard-Lindelöf)? Erläutern Sie die Beweisideen.

9. Was wissen Sie über die Abhängigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von den Anfangswerten bzw. von Parametern?

10. Definieren Sie den Begriff der maximalen Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Erläutern Sie deren Existenz. Nennen Sie Eigenschaften der maximalen Lösung für spezielle Klassen von Differentialgleichungen.

11. Wie sieht die allgemeine Struktur des Lösungsraumes einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$ aus (Beweis)? Was ist ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung? Wie erhält man aus dem Fundamentalsystem des homogenen Teils einer linearen DGL eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL?

12. Definieren Sie den Begriff des Exponentials einer Matrix (oder allgemeiner des Exponentials eines Elementes einer Banachalgebra) und nennen Sie seine Eigenschaften (mit Beweis).

13. Geben Sie die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mittels des Exponentials der Koeffizientenmatrix $A$ an (Beweis). Leiten Sie daraus die spezielle Form des Fundamentalsystems her, die man aus der Jordanschen Normalform von $A$ erhält (im komplexen und reellen Fall).

14. Erläutern Sie das Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten im $\mathbb{R}^1$. Diskutieren Sie den Spezialfall harmonischer Schwingungen mit einem Freiheitsgrad.

15. Welche Lösungsverfahren kennen Sie für lineare DGL höherer Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten im $\mathbb{R}^1$ (Eulersche Differentialgleichung, Reduktionssatz von d'Alambert, Potenzreihenansatz).

16. Was versteht man unter den Krümmungen einer Frenetkurve im $\mathbb{R}^n$?. Formulieren und beweisen Sie den Hauptsatz der (lokalen) Kurventheorie. Welche Sätze aus der Theorie der gewöhnlichen DGL werden dabei angewendet?. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von Krümmung und Windung von ebenen Kurven und von Raumkurven.

## 10.7 Weitere Literatur zur Vorlesung


- V.I. Arnold: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, 1980
- H. Ammann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter Lehrbuch, 1994
- H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Teubner-Verlag Stuttgart, 1991
- E. Kamke: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Lösungen und Lösungsmethoden. Teubner-Verlag Stuttgart, 1983
- W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, 1990

## 10.8 Übungsaufgaben

**Aufgabe 10.1**
Geben Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme an und diskutieren Sie deren Definitionsbereich:

1. $x' = -\frac{t^2}{x^3}$ , $\quad x(0) = 1 \quad$ bzw. $x(0) = -1$
2. $x' = e^x \sin t$ , $\quad x(0) = 0$
3. $t^2 x = (1+t)x'$ , $\quad x(0) = 1$

**Aufgabe 10.2**
Geben Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme an:

1. $tx' = x - t - te^{-\frac{x}{t}}$ , $\quad x(1) = 0$
2. $x' = \frac{x^2 - t^2}{xt}$ , $\quad x(1) = 1$

**Aufgabe 10.3**
Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (geben Sie die Lösungen in impliziter Form an):

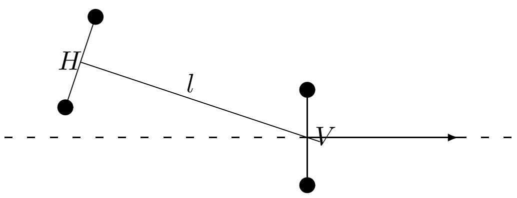
1. $x' = -\frac{t+x+1}{2t+2x-1}$
2. $x' = \sin(x+t)$

**Aufgabe 10.4**
Sei $H : \mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ die Abbildung

$$H(x_1, x_2) := \frac{x_2^2}{x_1}$$

Beweisen Sie, dass die Integralkurven des Vektorfeldes grad$H$ auf Ellipsen liegen.

**Aufgabe 10.5**
Wir betrachten einen zweiachsigen Wagen mit fixierter Hinterachse und drehbarer Vorderachse. Der Abstand zwischen beiden Achsen sei $l$. Ein Bauer zieht den Wagen entlang einer Gerade (gestrichelt), die nicht auf der Wagenachse liegt:




Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt $H$ der Hinterachse?
Diese Kurve heißt Schleppkurve. Sie ist durch folgende Eigenschaft beschrieben:
Die Länge der Strecke von Kurvenpunkt $H$ bis zum Schnittpunkt $V$ der Tangente an die Kurve mit der $x$-Achse ist konstant gleich $l$.
Zeigen Sie: Ist $t$ der Winkel zwischen der $x$-Achse und der Tangente an die Kurve $H(t) = (x(t), y(t))$ (in der Zeichnung der stumpfe Winkel oberhalb der $x$-Achse), so gilt

$$H(t) = l\left(\cos t + \ln \tan \frac{t}{2}, \sin t\right).$$

**Aufgabe 10.6**
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme bzw. Differenzialgleichung:

1. $x' = -\frac{2t\sin x}{t^2\cos x}$ , $\qquad x(1) = \frac{\pi}{4}$
2. $x' = -\frac{12tx+3}{6t^2}$ , $\qquad x(1) = 1$
3. $4t + 3x^2 + 2txx' = 0$

**Aufgabe 10.7**
Geben Sie die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen an:

1. $x' = 2x + 1 + t^2$
2. $x' = 3x + e^{2t}$
3. $x' = x + t\cos 2t$

**Aufgabe 10.8**
Geben Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme an:

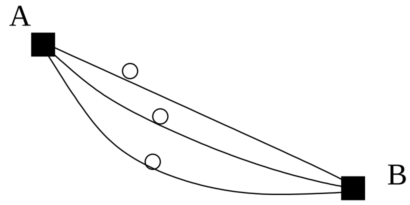
1. $x' = (\sin t)\, x + \sin t, \qquad x(0) = 0$
2. $x' = 2tx + 1, \qquad x(0) = 0$
3. $x' = \frac{t-4tx}{1+t^2}, \qquad x(1) = 1$

**Aufgabe 10.9**
Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme

1. $x' = t(x + x^2), \qquad x(0) = 1$
2. $x' + (t - \frac{1}{t})x + \frac{te^{-t^2}}{x} = 0, \qquad x(1) = 1$

**Aufgabe 10.10***

1. Betrachten Sie einen Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Radius $r$ und Mittelpunkt $(0, r)$ und stellen Sie sich vor, dass der Kreis aus dieser Lage nach rechts auf der Geraden $\mathbb{R} \times \{0\}$ rollt. Zeige: Die Bahnkurve des zum Zeitpunkt $t = 0$ fixierten Kreispunktes $P(0) = (0, 0)$ ist gegeben durch die Formel:
$$P(t) = (t - r\sin(t/r), r - r\cos(t/r)).$$
Eine Kurve dieser Art heißt gewöhnliche Zykloide.
2. Brachistochronenproblem: Auf welcher von den unendlich vielen Kurven $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, die die Punkte A und B verbinden, kann ein Massepunkt unter dem Eindruck der Schwerkraft am schnellsten nach unten rutschen? $A$ und $B$ besitzen nicht die gleiche Höhe und sich auch nicht senkrecht übereinander. Zeigen Sie, dass die Lösungskurve die Form einer gewöhnlichen Zykloide hat.




Hinweis: Setzen Sie den Koordinaten Ursprung in $A$ und verwenden Sie folgende Gesetzmäßigkeiten

(a) Energieerhaltung: $E_{kin} + E_{pot} = const.$

(b) Sei $\gamma(t) = (t, y(t))$ eine Parametrisierung der zu suchenden Kurve und $\alpha(t)$ der Winkel zwischen der Tangente an die Kurve $\gamma$ und der $y$-Achse im Punkt $\gamma(t)$ und $v(t) = \|\gamma'(t)\|$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\frac{\sin\alpha}{v}(t) = C, \quad \forall t. \qquad (*)$$

Dies ergibt sich aus dem Snellinsches Brechungsgesetz: Licht schlägt beim Durchgang durch ein brechendes Medium immer den Weg ein, der es in kürzester Zeit von einem gegebenen Punkt zu einem anderen bringt. Für übereinander liegende Medien mit konstanten Brechungsindex gilt dann:

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\alpha_3}{v_3}...$$

Hierbei bezeichnet $\alpha_i$ den Winkel zur Senkrechten und $v_i$ die Geschwindigkeit beim Übergang in das neue Medium. Hinsichtlich der Aufgabe stellt man sich auf den Standpunkt, dass es gleich ist, ob man Licht betrachtet, welches sich den schnellsten Weg nach unten sucht, oder einen Körper, der das gleiche unter dem Einfluss der Schwerkraft will. Die Formel (*) ergibt sich, wenn man 'unendlich feine' Medien betrachtet.

Man muss letzendlich folgende Differentialgleichung lösen

$$\overline{y}'(t) = \sqrt{\frac{a - \overline{y}(t)}{\overline{y}(t)}} \text{ mit } a > 0 \text{ und } \overline{y}(t) = -y(t).$$

Die Lösung soll $\overline{y}(0) = 0$ erfüllen.

**Aufgabe 10.11**

Seien $x_1, \ldots, x_p$ Elemente eines normierten Vektorraumes $(E, \|\cdot\|)$. Die konvexe Hülle ist

$$\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p) := \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}^{\geq}, \sum \lambda_i = 1 \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_p)$

1. konvex,

2. kompakt und

3. gleich $\bigcap \{C \subseteq E \mid C \text{ konvex}, x_1, \ldots, x_p \in C\}$ ist.

**Aufgabe 10.12**
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $U \subseteq E$ eine nichtleere abgeschlossene Menge, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen, $A : U \to U$ eine Selbstabbildung von $U$ mit $\|A^n u - A^n v\| \leq a_n \|u - v\|$ für alle $u, v \in U$ und $n \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie, dass die Abbildung $A$ genau einen Fixpunkt besitzt und für beliebige $u_0 \in U$ die Folge $(A^n u_0)_{n=0}^{\infty}$ gegen diesen Fixpunkt konvergiert, wobei die Fehlerabschätzung $\|u - u_n\| \leq (\sum_{k=n}^{\infty} a_k) \cdot \|u_1 - u_0\|$ gilt.
Hinweis: Vergleichen Sie dies mit dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes.

**Aufgabe 10.13**
Beweisen Sie den Satz 14 der Vorlesung:
Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine $C^1$-Abbildung, $W \times [a, b] \subseteq U$ und $W \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex. Dann erfüllt $F$ die Lipschitzbedingung bzgl. der $x$-Variable auf $Q = W \times [a, b]$.

**Aufgabe 10.14**
Beweisen Sie, dass mit den Bezeichnungen des Beweises und den Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf (Satz 15 der Vorlesung) folgende Fehlerabschätzung bei der sukzessiven Approximation gilt:

$$\|x^*(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{M \cdot L^n}{(n+1)!} \cdot |t - t_0|^{n+1} .$$

Hinweis: Vgl. Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes, Induktion über $n$.

**Aufgabe 10.15**
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen

1. $y' = y^2 - (2x + 1)y + 1 + x + x^2$
2. $y' = y^2 + 2xy + 2$

**Aufgabe 10.16**
Die Funktion $k(x, t, z)$ sei fr $0 \leq t \leq x \leq a$, $-\infty < z < \infty$ stetig und genüge einer Lipschitzbedingung in $z$:

$$|k(x, t, z_1) - k(x, t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|,$$

die Funktion $g(x)$ sei fr $0 \leq x \leq a$ stetig. Man zeige, dass die *Volterra-Integralgleichung*

$$u(x) = g(x) + \int_0^x k(x, t, u(t))dt$$

genau eine in $0 \leq x \leq a$ stetige Lösung besitzt.

**Aufgabe 10.17**
Zeige: Genügt $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D$ offen einer lokalen Lipschitzbedingung im zweiten Argument, ist $K \subset D$ kompakt und $f$ auf $K$ beschränkt, so genügt $f$ auf ganz $K$ einer Lipschitzbedingung im zweiten Argument.

**Aufgabe 10.18**
Lösen Sie iterativ das Anfangswertproblem $x' = tx$, $x(0) = 1$, für $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Aufgabe 10.19**
Beweisen Sie Lemma 18 aus Abschnitt 10.3.3 der Vorlesung.
Hinweis: Betrachten Sie $I = (\max(a_i, a_j), \min(b_i, b_j))$ und $\Sigma := \{t \in I | \varphi_i(t) = \varphi_j(t)\} \subset I$. Verwenden Sie Eigenschaften der beiden Mengen als metrische Räume.

**Aufgabe 10.20**

1. Beweisen Sie folgende Bemerkung der Vorlesung (vor Satz 25):
   Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $n$ Lösungen der homogenen DGL $x' = A(t)x$. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem von $x' = Ax$, wenn $W(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$.

2. Sei $Z = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ eine Fundamentalmatrix der linearen homogenen DGL $x' = A(t)x$. Dann ist eine spezielle Lösung der linearen inhomogenen DGL $x'(t) = A(t)x(t)+B(t)$ mit dem Anfangswert $x(t_0) = x_0$ durch
   $$x_s(t) = Z(t)\Big(Z(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1}B(s)\,ds\Big)$$
   gegeben.

**Aufgabe 10.21**
Wir berachten das AWP im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + 1 & x_1(0) &= x_{10} \\ x_2' &= -x_1 & x_2(0) &= x_{20}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der homogenen DGL durch Raten und geben Sie *alle* Lösungen des AWP an.

**Aufgabe 10.22**
Berechnen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrizen $e^{A+B}$ und $e^A \cdot e^B$.

**Aufgabe 10.23**
Beweisen Sie folgende Eigenschaften für das Exponential von Matrizen:

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordanblock. Dann gilt für das Exponential $e^{tA}$

$$e^{tA} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sei $C$ eine Matrix in Blockform $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$e^C = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10.24**

Sei $\mathcal{L} := L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n^2}$ der Raum der linearen Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{L} &\to \mathcal{L} \\ A &\mapsto e^A. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung exp im Nullvektor $0 \in \mathcal{L}$ differenzierbar ist und $\mathrm{Dexp}_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n^2}}$ gilt.

**Aufgabe 10.25**

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen im $\mathbf{R}^3$

1. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$

**Aufgabe 10.26**

Lösen Sie die folgende Anfangswertprobleme:

1. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x\ ,\ x(0) = (0, 5)$

2. $x' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x\ ,\ x(0) = (3, 1)$

**Aufgabe 10.27**

Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^3$ an:

1. $x' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x$

2. $x' = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} x$

3. $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} x$

**Aufgabe 10.28**
Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^2$ an:

1. $x' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x \ - \ \begin{pmatrix} 36t \\ 2e^t \end{pmatrix}$

2. $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x \ + \ \begin{pmatrix} -5t+2 \\ -8t-8 \end{pmatrix}$

3. $x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} x \ + \ \begin{pmatrix} 3e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$

**Aufgabe 10.29**
Beweisen Sie: Die $C^{(n-1)}$-Funktionen $x_1, ..., x_k$ sind im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionen $\varphi_1 = (x_1, x_1', ..., x_1^{(n-1)}), ..., \varphi_k = (x_k, x_k', ..., x_k^{(n-1)})$ linear unabhängig im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ sind.

**Aufgabe 10.30**
Seien $\lambda_1, ..., \lambda_s$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Beweisen Sie, daß die folgenden Funktionen linear unabhängig im Vektorraum $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind:

$$x_{jk}(t) = t^k e^{\lambda_j t} \qquad j = 1, ..., s\ ;\ k = 0, ..., p_j$$

**Aufgabe 10.31**
Ein quaderförmiges Schiff $S$ der Masse $m$ schwimme in Wasser der Dichte $\delta$ und die durch die Wasserlinie markierte Schwimmfläche sei $F$. Die $x-$Achse weise, mit Nullpunkt auf der Wasseroberfläche, vertikal nach unten. Wird $S$ nach unten oder oben ausgelenkt, so vollführt $S$ sogenannte Tauchschwingungen. Zeigen Sie mit Hilfe des Archimedischen Prinzips (Auftriebskraft = Gewicht des verdrängten Wassers), dass die Schwingung der Gleichung

$$mx'' + g\delta F x = 0$$

genügt. Leiten Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung her.

**Aufgabe 10.32**
Lösen Sie die folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen höherer Ordnung im $\mathbb{R}^1$:

1. $x'' - 4x = 5\cos t + 8e^{-2t}$

2. $x''' - x'' + x' - x = 2e^{-t}$

3. $x''' + x'' - 4x' - 4x = 2 - 4t$

4. $x'' + x = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$

**Aufgabe 10.33** *Gekoppelte Pendel.*
Für zwei durch eine Feder gekoppelte Pendel der Masse $m$ und gleicher Länge $l$ lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} mx'' &= -\alpha x - k(x-y) \\ my'' &= -\alpha y - k(y-x), \end{aligned}$$

mit $\alpha = mg/l$, $g$ die Erdbeschleunigung und $k$ die physikalische Federkonstante der Koppelung. Es handelt sich um eine linearisierte Gleichung, die für kleine Ausschläge gültig ist. Dabei sind die Nullpunkte der beiden Koordinatensysteme so gelegt, dass $x = y = 0$ der Ruhelage entspricht und die Pendel in dieser Lage auch senkrecht hängen. Geben Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen an (entweder durch Transformation in ein System erster Ordnung, oder durch Wahl spezieller Lösungen, die ein Fundamentalsystem generieren).

**Aufgabe 10.34**
Beweisen Sie, dass die Bessel-Funktionen $J_n, Y_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$J_n(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - t\sin\varphi)\, d\varphi \quad , \quad Y_n(t) := J_n(t) \int \frac{1}{tJ_n^2(t)}\, dt$$

ein Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung:

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0\ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

bilden.

**Aufgabe 10.35**
Geben Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Eulerschen Differentialgleichung auf dem Interval $(0, \infty)$ an:

1. $t^2 x'' - 3tx' + 4x = \ln t$

2. $t^2 x'' + 5tx' + 4x = t^2 + 16 \ln^2 t$

**Aufgabe 10.36**
Bestimmen Sie mittels Potenzreihenansatz die allgemeine Lösung der Airyschen Differentialgleichung

$$x'' - tx = 0$$

auf $\mathbb{R}$.

**Aufgabe 10.37**
Bestimmen Sie mittels Potenzreihenansatz die allgemeine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung

$$(1 - t^2)x'' - 2tx' + \lambda(1 + \lambda)x = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

auf dem Intervall $(-1, 1)$.

**Aufgabe 10.38**
Betrachten Sie auf $(0, \infty)$ die Differentialgleichung

$$t^2 x'' + (3t+1)x' + x = 0.$$

1. Lösen Sie die Gleichung, indem Sie ausnutzen, dass die linke Seite ein vollständiges Differential ist. Dabei erhält man durch Integration der Gleichung eine inhomogene Gleichung 1. Grades. In der inhomogenen Lösung dieser Gleichung integriere man gliedweise, nachdem man die Exponentialfunktion durch die zugehörige Reihe ersetzt hat.

2. Probieren Sie, die Differentialgleichung mithilfe des Potenzreihenansatzes $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ zu lösen.

3. Transformieren Sie zunächst die Differentialgleichung mit $s := \frac{1}{t}$, und probieren Sie dann einen Potenzreihenansatz.

4. Diskutieren Sie die Ergebnisse im Hinblick auf Satz 39 der Vorlesung.

**Aufgabe 10.39**
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$x'' + 2ax' + \omega^2 x = c \cdot \cos \omega t \quad (c > 0,\ 0 \leq a < \omega).$$

Zeigen Sie, dass $L := \limsup_{t\to\infty} |x(t)|$ nur von $a$, $c$, $\omega$ abhängt, und berechnen Sie $L$.
Die Differentialgleichung ist ein einfaches mathematisches Modell für die bei periodisch erregten (entspricht $c \cdot \cos \omega t$) Systemen auftretenden Resonanzerscheinungen. $a$ ist dabei die Dämpfung, $a = 0$ ist also ungedämpft. Interpretieren Sie $L$ in diesem Modell.
*Hinweis: Es ist leichter, die Variation der Konstanten im Komplexen auszuführen.*

**Aufgabe 10.40**
Beweisen Sie Satz 41 der Vorlesung.

**Aufgabe 10.41**
Welche der Ihnen geläufigen Kurven $\gamma(s) = (x(s), y(s))^T, s \in [-1, 1]$ im $\mathbb{R}^2$ besitzt die Krümmung $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$?
*Hinweis: Stellen Sie im geeigneten Moment die Bedingungen* $\gamma(0) = (0,1)^T$ *und* $\gamma'(0) = (1,0)^T$.

**Aufgabe 10.42**
Eine Raumkurve heit Böschungslinie, falls alle Tangenten dieser Kurve einen konstanten Winkel mit einer festen Richtung des $\mathbb{R}^3$ bilden. Man zeige: Eine Frenet-Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann eine Böschungslinie, wenn für die Krümmung und die Windung von $\gamma$ folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\tau(t) = c \cdot k(t), \quad c = const, t \in I.$$

**Aufgabe 10.43**
Eine Raumkurve heißt sphärisch, falls ihr Bild auf der Oberfläche einer Kugel im $\mathbb{R}^3$ liegt. Man zeige, dass eine Frenet-Kurve $\gamma$ im $\mathbb{R}^3$ mit niemals verschwindender Krümmung und Torsion genau dann sphärisch ist, wenn

$$\frac{\tau}{k} + \left(\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right)' = 0$$

gilt.